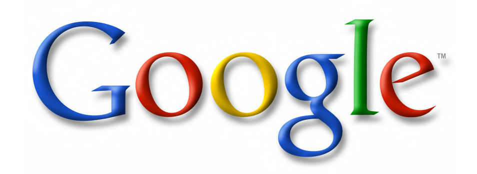



Stanford University Libraries
3 6105 000 992 656

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

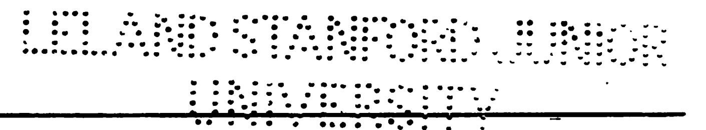
In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.



Zehnter Band,

in 4 Heften.

Mit vier Kupfertafeln und einer Steindrucktafel.

Berlin, 1833.
Bei G. Reimer.

Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier), Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichnifs.

des zehnten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

2. Geometrie.

II. Angewandte Mathematik.

Nachrichten.

Inhalts-Verzeichnisse der ersten 10 Bände dieses Journals.

Druckfehler im 2ten Hefte des 10ten Bandes.

S. 129. Z. 4. statt Dreiecke lies Kugeldreiecke
— 130. — 20. st. durch l. auf
— 141. — 11. st. $bi.di.\cos c$ l. $2.bi.di.\cos c$
— — — 12. st. $fi.ei.\cos c$ l. $2.fi.ei.\cos c$
— 146. — 21. st. $\sin\frac{1}{2}(a+b+c)$ l. $\cos\frac{1}{2}(a+b+c)$
— — — 26. st. $\sin(90^\circ-\frac{1}{2}c)$ l. $\sin(90^\circ+\frac{1}{2}c)$
— 149. letzte Z. st. $\cos^2\frac{1}{2}a$ l. $\sin^2\frac{1}{2}a$
— 151. Z. 3. st. $>$ l. $<$
— 153. — 12. st. $\cot b$ l. $\operatorname{tang} b$
Tafel I. Fig. 6. ist die Linie *ce* zu ziehen.

1.

Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung.

(Von dem Herrn Dr. Stern, zu Göttingen.)

Erstes Kapitel.

A. Allgemeine Eigenschaften der Kettenbrüche.

1.

Ein **Kettenbruch** (continuirlicher, zusammenhängender, stetiger Bruch) ist ein Bruch, dessen Nenner aus zwei Theilen, die durch + oder — verbunden sind, besteht, von welchen wenigstens der eine wieder ein Bruch ist. Bezeichnen daher die Buchstaben a, b, c, d beliebige Ausdrücke, so ist

$$1. \quad \frac{a}{b \pm \frac{c}{d}}$$

das allgemeine Schema eines Kettenbruchs. Zuweilen ist der Kettenbruch noch mit einem Ausdrucke A durch + oder — verbunden. Man nennt alsdann auch den Ausdruck

$$2. \quad A \pm \frac{a}{b \pm \frac{c}{d}}$$

einen *) Kettenbruch. In der Regel ist d wieder ein ähnliches Aggregat zweier Theile, von welchen wenigstens der eine ein Bruch ist, der Nenner des letztern wieder ein solches u. s. w., bis zu einer gewissen Gränze oder bis in das Unendliche. Im ersten Falle ist der Kettenbruch ein **endlicher**, im zweiten ein **unendlicher**. Kettenbrüche sind keine, ihrer Natur nach abgesonderte Art von Gröſsen; im Gegentheil kann ein Kettenbruch jede beliege Art von Gröſsen ausdrücken; nur ihre Form ist es, die sie zu einem besonderen Gegenstande der Betrachtung macht. Die einzelnen Brüche, aus welchen ein Kettenbruch zusammengesetzt ist, wie z. B. in (1.) $\frac{a}{b}$, nenne ich **Theilbrüche**, ihre Zähler, wie a, **Theilzähler**, ihre

*) Fast in allen Schriften ist die Definition der Kettenbrüche unbestimmt gegeben. So z. B. sagt Eytelwein (Grundlehren der höheren Analysis Th. 1. §. 247.): ein Kettenbruch ist ein solcher, dessen Zähler aus einer ganzen Zahl, der Nenner aber aus einer ganzen Zahl und einem Bruche u. s. w. besteht, während dort z. B. Brüche vorkommen, deren Zähler Wurzelgröſsen sind, wie in §. 320. Einen ähnlichen Fehler findet man in Kausler's „Lehre von den Kettenbrüchen."

Nenner, wie b, **Theilnenner**. Ist der Kettenbruch von der Form (2.), so nenne ich auch A einen Theilnenner.

2.

Man kann freilich bei Betrachtung der Kettenbrüche, diese als willkührlich gebildete Ausdrücke annehmen; aber wegen mancher folgenden Betrachtung ist es gut, sich ihre Entstehung auf folgende Weise zu denken. Es seien $A, B, C, D, E, \ldots, a, b, a', b', a'', b'', \ldots$ beliebige Ausdrücke, und $A = aB + bC$, $B = a'C + b'D$, $C = a''D + b''E$ u. s. w., so ist

$$\frac{A}{B} = a + \frac{bC}{B} = a + \frac{b}{B:C},$$
$$\frac{B}{C} = a' + \frac{b'D}{C} = a' + \frac{b'}{C:D},$$
$$\frac{C}{D} = a'' + \frac{b''E}{D} = a'' + \frac{b''}{D:E},$$

folglich $\frac{A}{B} = a + \cfrac{b}{a' + \cfrac{b'}{a'' + \cfrac{b''}{D:E}}}$, und man würde den Kettenbruch noch weiter führen können, wenn man, auf ähnliche Weise wie im Vorhergehenden, D aus E und F u. s. w. ableitete. Da nun a, b, a', b', u. s. w. jede Gröfse bezeichnen können, so darf man jeden Kettenbruch, als aus einer Reihe von Ausdrücken A, B, C u. s. w., die auf die bezeichnete Weise zusammenhängen, entstanden, betrachten. Es ist daher sehr leicht, einen gewöhnlichen Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln. Ist z. B. der Bruch $\frac{45}{13}$ gegeben, so setze man $45 = 3.13 + 1.6$, $13 = 2.6 + 1$, $6 = 6.1 + 0$, also $\frac{45}{13} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6}}$, oder man setze $45 = 2.13 + 1.19$, $13 = 1.19 - 1.6$, $19 = 3.6 + 1$, $6 = 6.1 + 0$, also $\frac{45}{13} = 2 + \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6}}}$.

Auf ähnliche Weise könnte man noch andere Kettenbrüche erhalten, die dem Bruche $\frac{45}{13}$ gleich wären. Man sieht hieraus zugleich, dafs mehrere Kettenbrüche dem Werthe nach gleich sein können, ohne identisch zu sein.

3.

Es soll nun zuerst die Theorie der endlichen Kettenbrüche abgehandelt werden. Ein solcher hat, als abgeschlossener arithmetischer Ausdruck, im Allgemeinen, immer einen bestimmt angebbaren Werth, wiewohl dieser in einzelnen Fällen imaginair oder unendlich klein werden

kann *). Dieser Werth kann durch ein recurrirendes Verfahren auf doppeltem Wege gefunden werden. Es sei der **) Kettenbruch

$$3. \quad a + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \ldots + \frac{b_{m-1}}{a_{m-1}} + \frac{b_m}{a_m}$$

gegeben, und a, b_1, a_1, ... im Allgemeinen unter sich verschiedene Gröfsen. Man verwandle zuerst den Theil $a + \frac{b_1}{a_1}$ in einen gewöhnlichen Bruch, und man erhält $a + \frac{b_1}{a_1} = \frac{a a_1 + b_1}{a_1}$; für a_1 substituire man $a_1 + \frac{b_2}{a_2}$, und man erhält $a + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} = \frac{a\left(a_1 + \frac{b_2}{a_2}\right) + b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2}}$; letzteren Werth verwandle man in einen gewöhnlichen Bruch und substituire in diesem für a_2 den Ausdruck $a_2 + \frac{b_3}{a_3}$, und verfahre mit dem Resultate wie früher. Setzt man diese Operation fort, so erhält man zuletzt den Werth des ganzen gegebenen Kettenbruchs. Denselben Werth kann man aber auch finden, wenn man den Kettenbruch von unten herauf in einen gewöhnlichen verwandelt. Man hat zuerst $a_{m-1} + \frac{b_m}{a_m} = \frac{a_{m-1} a_m + b_m}{a_m}$; man substituire diesen Werth statt a_{m-1} in dem Bruche $a_{m-2} + \frac{b_{m-1}}{a_{m-1}}$, und man erhält $a_{m-2} + \frac{b_{m-1}}{a_{m-1}} + \frac{b_m}{a_m} = a_{m-2} + \frac{b_{m-1}}{\frac{a_{m-1} \cdot a_m + b_m}{a_m}}$; letzteren Ausdruck verwandle man wieder in einen gewöhnlichen Bruch, und substituire den erhaltenen Werth statt a_{m-2} in dem Bruche $a_{m-3} + \frac{b_{m-2}}{a_{m-2}}$, und verwandle das Resultat wieder in einen gewöhnlichen Bruch. Fährt man auf diese Weise fort, so mufs man, wie

*) Wie z. B. in den Brüchen $\frac{\sqrt{-1}}{a} + \frac{b}{c}$ oder $\frac{a}{b} + \frac{c}{0}$

**) Wiewohl früher gesagt wurde, dafs die einzelnen Theilbrüche durch + oder — verbunden sein können, so drückt doch der Kettenbruch (3.) jeden beliebigen Kettenbruch aus, denn hätte man z. B. $a - \frac{b_1}{a_1} + \text{etc.}$, so wäre dies $= a + \frac{(-b_1)}{a_1} + \text{etc.}$, man mufs daher immer nur die Ausdrücke a, b_1 u. s. w. mit ihren Zeichen nehmen.

leicht einzusehen ist, den Werth des ganzen Kettenbruchs erhalten. Den Kettenbruch (3.) bezeichne ich durch $F(a, a_m)$, und den ihm gleichen gewöhnlichen Bruch nenne ich den reducirten *) Kettenbruch $F(a, a_m)$. Den Zähler dieses letzteren bezeichne ich durch a, a_m. Überhaupt soll auf ähnliche Weise $F(a_l, a_m)$ einen Kettenbruch bedeuten, dessen erster Theilnenner $= a_l$, dessen letzter $= a_m$ ist, und **) a_l, a_m ist der Zähler des reducirten Kettenbruchs $F(a_l, a_m)$. Der Nenner des reducirten Kettenbruchs $F(a, a_m)$ ist alsdann $= a_1, a_m$. Denn es ist $F(a, a_m) = a + \frac{b_1}{F(a_1, a_m)}$; nun ist a_1, a_m der Zähler des reducirten Kettenbruchs $F(a_1, a_m)$; nennt man daher seinen Nenner p, so ist $F(a, a_m) = a + \frac{b_1}{\frac{a_1, a_m}{p}} = \frac{a \cdot a_1, a_m + b_1 \cdot p}{a_1, a_m}$,

also $F(a, a_m) = \frac{a, a_m}{a_1, a_m}$. Ganz auf dieselbe Weise könnte man zeigen, dafs überhaupt $F(a_l, a_m) = \frac{a_l, a_m}{a_{l+1}, a_m}$ ist, d. h., wenn man die Kettenbrüche $F(a, a_m)$, $F(a_1, a_m)$, $F(a_2, a_m)$ u. s. w. in gewöhnliche Brüche verwandelt, so wird in diesen, der Nenner eines in der Reihe vorhergehenden der Zähler des folgenden sein. Da nun $F(a_1, a_m) = \frac{a_1, a_m}{a_2, a_m}$ ist, so wird $F(a, a_m) = a + \frac{b_1}{\frac{a_1, a_m}{a_2, a_m}} = \frac{a \cdot a_1, a_m + b_1 \cdot a_2, a_m}{a_1, a_m}$ und $a, a_m = a . a_1, a_m + b_1 . a_2, a_m$.

Eben so kann man zeigen, dafs überhaupt

$$A. \quad a_l, a_m = a_l . a_{l+1}, a_m + b_{l+1} . a_{l+2}, a_m.$$

Hierdurch ist eine Recursionsformel gefunden, die der zweiten oben gegebenen rekurrirenden Reductionsmethode entspricht. Kennt man nemlich den reducirten Bruch $F(a_{l+1}, a_m)$, also dessen Zähler a_{l+1}, a_m und Nenner a_{l+2}, a_m, so kennt man zugleich den Nenner des reducirten Bruchs $F(a_l, a_m)$, und findet den Zähler durch die Formel (A.).

4.

Es ist wichtig, den Werth des Kettenbruchs $F(a, a_m)$ auch auf independentem Wege finden zu können, d. h. unmittelbar aus den Theilzählern

---

*) Es wird hierbei immer vorausgesetzt, dafs während und nach der Reduction keine etwa mögliche Zurückführung der Brüche auf kleinere Benennung vorgenommen wird. Wäre z. B. $F(a, a_m) = 1 + \frac{2}{4 + \frac{8}{7}} = \frac{50}{36} = \frac{25}{18}$, so wäre a, a_m nicht $= 25$, sondern $= 50$.

**) Man bemerke, dafs $a_m, a_m = a_m$ ist. Hat der Kettenbruch nur zwei Theilnenner, a und a_1, so ist $a, a_m = a, a_1$; $a_1, a_m = a_1$.

und Theilnennern des Kettenbruchs den Zähler und Nenner des ihm gleichen gewöhnlichen Bruches abzuleiten. Hierzu führen folgende Betrachtungen. Man bilde zuerst die Zähler der Brüche $F(a_m, a_m)$, $F(a_{m-1}, a_m)$; diese sind bezüglich a_m und a_{m-1}, a_m. Man setze jedem Gliede des Ausdrucks a_{m-1}, a_m den Theilnenner a_{m-2}, und a_m den Theilzähler b_{m-1} vor, und addire die Producte, so hat man a_{m-2}, a_m (nach Formel $A.$). Setzt man jedem Gliede von a_{m-2}, a_m den Theilnenner a_{m-3}, jedem Gliede von a_{m-1}, a_m den Theilzähler b_{m-2} vor, so erhält man a_{m-3}, a_m, und wenn man auf diese Weise fortführt, erhält man den Zähler des Bruches $F(a, a_m)$ und zugleich den Nenner, da man zugleich den Zähler des Bruches $F(a_1, a_m)$ bildet. Ist z. B. Zähler und Nenner des Kettenbruchs $F(a, a_4)$ zu finden, so hat man $a, a_4 =$

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
a & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\
a & a_1 & a_2 & & b_4 \\
a & a_1 & b_3 & & a_4 \\
a & b_2 & & a_3 & a_4 \\
a & b_2 & & & b_4 \\
b_1 & & a_2 & a_3 & a_4 \\
b_1 & & & a_2 & b_4 \\
b_1 & & & b_3 & a_4
\end{array}$$

$$\text{also } F(a, a_4) = \frac{a, a_4}{a_1, a_4}$$

$$= \frac{aa_1a_2a_3a_4 + aa_1a_2b_4 + aa_1b_3a_4 + ab_2a_3a_4 + ab_2b_4 + b_1a_2a_3a_4 + b_1a_2b_4 + b_1b_3a_4}{a_1a_2a_3a_4 + a_1a_2a_4 + a_1b_3a_4 + b_2a_3a_4 + b_2b_4}.$$

Man kann den Werth a, a_m auch auf eine andere Weise finden. Es ist $a_{m-1}, a_m = a_{m-1}a_m + b_m$. Hier erhält man das zweite Glied, indem man im ersten für $a_{m-1}a_m$ den Werth b_m substituirt und dieses Resultat zum ersten Gliede addirt. Eben so ist

$$a_{m-2}, a_m = a_{m-2}a_{m-1}a_m + b_{m-1}a_m + b_m a_{m-2}.$$

Man denke sich nun das Product $a_{l+1}.a_{l+2}\ldots.a_m$, setze in demselben $a_{m-1}a_m = b_m$ und addire das entstehende Product zu dem vorigen, man substituire b_{m-1} statt $a_{m-2}a_{m-1}$ und addire das entstehende Product zu den vorigen. Auf dieselbe Weise fahre man fort, indem man überhaupt, wo es angeht, in den schon vorhandenen Gliedern b_{m-r+1} statt $a_{m-r}a_{m-r+1}$ setzt, und die erhaltenen Producte zu den früheren addirt, für r allmählig alle Werthe von 1 bis m setzend. Die Summe der enstehenden Producte, das erste $a_{l+1}\ldots.a_m$ mitgerechnet, sei $\overline{a_{l+1}\ldots.a_m}$. Dieselben Substitutio-

nen mache man in dem Producte $a_l \ldots . a_m$, mit dem Unterschiede, dafs man noch in allen, auf diese Weise erhaltenen Producten, wo es angeht, den Werth b_{l+1} statt a_l, a_{l+1} setzt, und die so entstehenden Producte zu den schon vorhandenen addirt. Die Summe aller dieser Producte bezeichne man durch $\overline{a_l \ldots . a_m}$, es ist also $\overline{a_l \ldots .. a_m} = a_l . \overline{a_{l+1} \ldots . a_m} + b_{l+1} . \overline{a_{l+2} \ldots . a_m}$. Nun ist aber auch $a_l, a_m = a_l . a_{l+1}, a_m + b_{l+1} . a_{l+2}, a_m$, und da $\overline{a_{m-1} . a_m} = a_{m-1}, a_m$; $\overline{a_{m-2} \ldots . a_m} = a_{m-2}, a_m$, so mufs überhaupt $\overline{a_l \ldots . a_m} = a_l, a_m$ sein. Um also z. B. den Werth von a, a_4 zu finden, schreibe man zuerst das Product $a . a_1 a_2 a_3 a_4$; man setze b_4 statt $a_3 a_4$, so hat man $a a_1 a_2 a_3 a_4 + a a_1 a_2 b_4$, dann setze man b_3 statt $a_2 a_3$, und man hat $a a_1 a_2 a_3 a_4 + a a_1 a_2 b_4 + a a_1 b_3 a_4$, dann b_2 statt $a_1 a_2$; dies giebt $a a_1 a_2 a_3 a_4 + a a_1 a_2 b_4 + a a_1 b_3 a_4 + a b_2 a_3 a_4 + a b_2 b_4$, endlich b_1 statt $a a_1$, und man erhält $a a_1 a_2 a_3 a_4 + a a_1 a_2 b_4 + a a_1 b_3 a_4 + a b_2 a_3 a_4 + a b_2 b_4 + b_1 a_2 a_3 a_4 + b_1 a_2 b_4 b_1 b_3 a_4 = a, a_4$. Diese Methode läfst noch eine Abkürzung zu. Statt nemlich in den Gliedern, welche z. B. aus der Substitution $b_m = a_{m-1} a_m$ entstehen, für $a_{m-3} a_{m-2}$ den Werth b_{m-2} zu setzen, kann man unmittelbar in dem ersten Gliede $a a_1 \ldots . a_m$, statt $a_{m-3} a_{m-2} a_{m-1} a_m$ den Werth $b_{m-2} b_m$ substituiren, und so in allen ähnlichen Fällen. Man kann also diese Methode auf folgende Weise bezeichnen. Will man den Werth von a, a_m finden, so wird sein erstes Glied $a . a_1 \ldots . a_m$ sein; man setze $a a_1 = b_1$; $a_1 a_2 = b_2 \ldots . a_{m-1} a_m = b_m$ und substituire diese Werthe allmählig in $a a_1 \ldots . a_m$. Dadurch erhält man einen Theil des Resultats. Man mache aus den Elementen $b_1, b_2 \ldots . b_m$ alle Combinationen der zweiten Classe ohne Wiederholung mit Weglassung aller Glieder, in welchen zwei auf einander folgende Elemente vorkommen, und unter derselben Einschränkung alle Combinationen ohne Wiederholung zur dritten, vierten u. s. w. Classe, und substituire die erhaltenen Formen statt der gleichgeltenden Producte in $a a_1 \ldots . a_m$. Ist m eine ungrade Zahl, so mufs man alle Combinationsclassen bis zur $\frac{m+1}{2}^{\text{ten}}$, wenn m eine gerade Zahl ist, bis zur $\frac{m}{2}^{\text{ten}}$ bilden; im ersten Falle hat die letzte Classe nur ein Glied $b_1 b_3 \ldots . b_m$, im zweiten zwei, $b_1 b_3 \ldots . b_{m-1}$ und $b_2 . b_4 \ldots . b_m$. Sucht man z. B. den Werth von a, a_4, so ist das erste Glied $a a_1 a_2 a_3 a_4$, und man erhält daraus die übrigen, indem man setzt, $a a_1 = b_1$; $a_1 a_2 = b_2$; $a_2 a_3 = b_3$, $a_3 a_4 = b_4$, $a a_1 a_2 a_3 = b_1 b_3$; $a a_1 a_3 a_4 = b_1 b_4$; $a_1 a_2 a_3 a_4 = b_2 b_4$, und diese Werthe allmählig in $a a_1 a_2 a_3 a_4$ substituirt.

Wollte man den Werth des Bruches $F(a_m, a)$, d. h. des Bruches $a_m + \frac{b_m}{a_{m-1}} + \text{etc.}$ finden, so ergiebt sich aus dem Obigen, daſs man den Zähler a_m, a finden wird, indem man als erstes Glied $a_m \ldots . a$ setzt, dann $a_m a_{m-1} = b_m$, $a_{m-1} a_{m-2} = b_{m-1}$ u. s. w. setzt, und mit den Elementen $b_m \ldots$ $\ldots b_1$, wie oben angegeben wurde, verfährt. Hieraus sieht man, daſs die so entstehenden Glieder völlig denen des Werthes a, a_m gleich sind, und nur in anderer Ordnung erscheinen, man hat daher *) $(B.)$ $a, a_m = a_m, a, \ldots .$

5.

Die Formel $A.$ zeigt, daſs die Anzahl der Glieder, die den Zähler a, a_m ausmachen, so groſs sein muſs, als die Anzahl der Glieder, die a_1, a_m ausmachen, und der, die a_2, a_m ausmachen, zusammengenommen. Denkt man sich die Zahlen, welche die Anzahl der in a_m; a_{m-1}, a_m; a_{m-2}, a_m; $\ldots . a, a_m$ enthaltenen Glieder angeben, in einer Reihe verbunden, so ist diese eine recurrirende, in der jedes Glied die Summe der zwei vorhergehenden ist; die Zahl der in a_m, a_{m-1}, a_m enthaltenen Glieder ist bezüglich 1 und 2, also die Reihe 1, 2, 1+2, 3+2, 5+3 .... Diese Reihe ist als einzelner Fall in der Reihe a, bx, $(a+b)x^2$, $(a+2b)x^3$, $(2a+3b)x^4$ enthalten, wenn man in letzter $a=x=1$, $b=2$ setzt; und letztere ergiebt sich, wenn alle Glieder mit + verbunden sind, aus dem Quotienten $\frac{a+(b-a)x}{1-x-x^2}$. Will man also die Anzahl der in a, a_m enthaltenen Glieder finden, so braucht man nur das $m$te Glied der aus diesem Quotienten entspringenden Reihe zu suchen, indem man das Anfangsglied a nicht mitzählt, und dann $a=x=1$, $b=2$ zu setzen. Dieses Glied ist = **) $x^m [p^{m}C . a + p^{m-1}C\ (b-a)]$, wenn man unter $p^{m}C$, $p^{m-1}C$ alle Combinationen aus den Elementen 1, 2 zur Summe m mit vorgesetzter Permutationszahl versteht, und also die Summe der Glieder von $a, a_m = p^{m}C + p^{m-1}C$. Nun wird

---

*) Es sei ein Kettenbruch $\frac{a, a_m}{a_1, a_m}$ gegeben; man soll einen anderen finden, in dem die Theilzähler und Theilnenner in umgekehrter Ordnung erscheinen; der zweite Kettenbruch ist also $= \frac{a_m, a}{a_{m-1}, a} = \frac{a, a_m}{a, a_{m-1}}$. Ist z. B. $\frac{a, a_m}{a_1, a_m} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} = \frac{233}{151}$, so ist $a, a_m = 233$, $a, a_{m-1} = 29$ und $\frac{233}{29} = 7 + \frac{6}{5} + \frac{4}{3} + \frac{2}{1}$.

**) Man vergl. Thibaut's Analysis 2te Ausg S. 42.

$$p^{m}C = 1 + m-1 + \frac{m-3.m-2}{1.2} + \frac{m-5.m-4.m-3}{1.2.3} + \frac{m-7.m-6.m-5.m-4}{1.2.3.4} \text{ etc.}$$

$$p^{m-1}C = \quad 1 + \; m-2 \; + \frac{m-4.m-3}{1.2} + \frac{m-6.m-5.m-4}{1.2.3} \text{ etc.}$$

Addirt man die unter einander stehenden Glieder, und bemerkt, dafs

$$\frac{m-n.m-n+1 \ldots m-n+r}{1.2 \ldots r+1} + \frac{m-n+1 \ldots m-n+r}{1.2 \ldots r} = \left(\frac{m-n}{r+1}+1\right)\left(\frac{m-n+1 \ldots m-n+r}{1 \ldots 2r}\right)$$

$= \frac{m-n+1 \ldots m-n+r+1}{1.2 \ldots r+1}$ ist, so findet man die Summe der Glieder von $a, a_m = 1 + m + \frac{m-2.m-1}{1.2} + \frac{m-4.m-3.m-2}{1.2.3}$ etc.

Man kann diese Summe auch finden, ohne auf die Theorie der recurrirenden Reihen einzugehen, und zwar unmittelbar aus dem independenten Verfahren, durch welches früher der Werth von a, a_m gefunden wurde. Den Ausdruck $a.a_1 \ldots a_m$ giebt ein Glied der Summe, dann hat man so viel Glieder als Theilzähler vorhanden sind, hier m Glieder, ferner so viel Glieder als aus m Elementen Combinationen zur zweiten Classe ohne Wiederholung gebildet werden können. Ohne Einschränkung wäre deren Anzahl $\frac{m.m-1}{1.2}$; da aber in den Combinationen, die mit b_1 anfangen, nicht b_2, in denen, die mit b_2 anfangen, nicht b_3 u. s. w. vorkommen kann, so wird die Zahl der entstehenden Combinationen dieselbe sein, als wenn nur aus $m-1$ Elementen alle Combinationen zur zweiten Classe gebildet würden, also $\frac{m-1.m-2}{1.2}$. Auf dieselbe Weise findet man, dafs, unter der erwähnten Einschränkung, die Anzahl der Combinationen zur dritten Classe aus m Elementen, dieselben ist wie die Summe aller Combinationen zur dritten Classe aus $m-2$ Elementen, da in den Gliedern, die mit b_1 anfangen, nicht b_2 und b_3, b_3 und b_4 etc., in denen, die mit b_2 anfangen, nicht b_3 und b_4, b_4 und b_5 etc. zusammen vorkommen dürfen, also $= \frac{m-2.m-3.m-4}{1.2.3}$. Fährt man auf diese Weise fort, so sieht man, dafs mit der erwähnten Einschränkung so viel Glieder in der $r$ten Combinationsclasse aus m Elementen enthalten sind, als ohne dieselben in derselben Classe aus $m-r+1$ Elementen, und man findet dann die entstehende Summe mit der oben gegebenen übereinstimmend, sieht aber zugleich, wie die einzelnen Glieder derselben entstehen. Hieraus ergiebt sich zugleich ein Mittel, eine andere Aufgabe mit Leichtigkeit zu lösen, nämlich wenn der Kettenbruch $F(a, a_m)$ gegeben ist, und alle Theilnenner identisch, also $=a$ sind, eben so alle

Theilzähler $= b_1$, den Werth des Bruches aus den drei Gröfsen a, b_1, m zu finden. Hier ist $a \ldots\ldots a_m = a^{m+1}$, $a.a_1 \ldots\ldots a_{m-2} = a.a. \ldots\ldots a_{m-3}.a_m$ etc. $= a^{m-1}$ etc. Man kann also alle Glieder, in welchen die Theilzähler zu Combinationen derselben Classe gehören, zusammenfassen und erhält

$$a,\ a_m = a^{m+1} + m.b_1.a^{m-1} + \frac{m-1.m-2}{1.2}b_1^2.a^{m-3} \text{ etc.}$$

eben so

$$a_1,\ a_m = a,\ a_{m-1} = a^m + m-1.b_1.a^{m-2} + \frac{m-2.m-3}{1.2}b_1^2.a^{m-4} \text{ etc.}$$

Da die Ausdrücke a_m; a_{m-1}, a_m; .... a, a_m in diesem Falle eine recurrirende Reihe bilden, indem man jedes Glied a_l, a_m aus den zwei vorhergehenden durch die Formel $a_l,\ a_m = a.a_{l+1},\ a_m + b_1.a_{l+2},\ a_m$ findet, so könnte man auch den Werth von a, a_m finden, wenn man das $m$te Glied nach dem Anfangsgliede der aus dem Quotienten $\frac{a+b_1 x}{1-ax-b_1 x^2}$ entspringenden Reihe entwickelte und $x = 1$ setzte, was ich jedoch hier nicht weiter ausführen will. Einen anderen Ausdruck für a, a_m findet man aber auf folgende Weise. Man bilde aus den Gliedern 1; a_m; a_{m-1}, a_m .... eine Reihe, deren erste Glieder im vorliegenden Falle 1, a, a^2+b sein werden, und vermöge des Gesetzes wie sich jedes Glied aus den zwei vorhergehenden bildet, werden die Glieder dieser Reihe den successiven Gliedern der aus dem Quotienten $\frac{1}{1-ax-bx^2}$ entspringenden gleich sein, wenn man $x = 1$ setzt, und zwar wird das $m+1$te nach dem Anfangsgliede den Werth von a, a_m geben. Nun ist

$$\frac{1}{1-ax+bx^2} = \frac{[a+\sqrt{(a^2+4b)}]:2\sqrt{(a^2+4b)}}{1-\left(\frac{a+\sqrt{(a^2+4b)}}{2}\right)x} + \frac{[-a+\sqrt{(a^2+4b)}]:2\sqrt{(a^2+4b)}}{1-\left(\frac{a-\sqrt{(a^2+4b)}}{2}\right)x}.$$

Da nun das $m$te Glied der aus dem Quotienten $\frac{A}{1-Bx}$ entspringenden Reihe $AB^m x^m$ ist, so ist,*) das $m$te Glied der aus $\frac{1}{1-ax-bx^2}$ entspringenden Reihe, wenn man $x = 1$ setzt:

$$\frac{a+\sqrt{(a^2+4b)}}{2\sqrt{(a^2+4b)}} \times \left(\frac{a+\sqrt{(a^2+4b)}}{2}\right)^m + \frac{\sqrt{(a^2+4b)}-a}{2\sqrt{(a^2+4b)}} \times \left(\frac{a-\sqrt{(a^2+4b)}}{2}\right)^m,$$

oder da $\frac{a+\sqrt{(a^2+4b)}}{2} = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}$,

$$= \frac{[\frac{1}{2}a+\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}]^{m+1}}{2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}} + \frac{[\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}-\frac{1}{2}a]^{m+1}}{2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}},$$

*) Man vergl. Euler *Introd. in anal. infinit. Cap.* 13.

und das $m+1$te Glied, d. h.

$$c,\ a_m = \frac{[\frac{1}{2}a+\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}]^{m+2}-[\frac{1}{2}a-\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}]^{m+2}}{2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}}$$

und

$$F(a,\ a_m) = \frac{a,\ a_m}{a_1,\ a_m} = \frac{a,\ a_m}{a_1,\ a_{m-1}} = \frac{[\frac{1}{2}a+\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}]^{m+2}-[\frac{1}{2}a-\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}]^{m+2}}{[\frac{1}{2}a+\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}]^{m+1}-[\frac{1}{2}a-\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}]^{m+1}} \text{ *)}.$$

Setzt man $a=b=1$, so wird $a,\ a_m = 1+m+\frac{m-2.m-1}{1.2}$ etc. Diese Summe drückt aber auch die Zahl der in $a,\ a_m$ enthaltenen Glieder aus, folglich ist diese $= \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{3}\right)^{m+2}}{\sqrt{5}}$ **).

---

*) Für den Fall, wenn $b_1 = 1$ ist, hat schon Herr Clausen die entsprechende Formel gegeben, Journ. für die reine und angew. Math. Bd. 3. S. 88. und früher Dan. Bernoulli in den *Nov. com. ac. petr. T.* 20. in einer Abhandlung *de fract. cont. pag.* 10.

**) Die Vergleichung der zwei gleichen Ausdrücke

$$a^{m+1}+m.b_1.a^{m-1}\ldots. = \frac{[\frac{1}{2}a+\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}]^{m+2}-[\frac{1}{2}a-\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}]^{m+2}}{2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}}$$

führt zu mehreren merkwürdigen, auch sonst bekannten, und auf andere Weise bewiesenen Summationen von Reihen, die aus Binomialcoefficienten bestehen. Man setze $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)} = x$, und nenne den $r$ten Binomialcoefficienten der $m+2$ten Potenz, ${}^{r}\overset{m+2}{\mathfrak{B}}$, so findet man durch die gewöhnlichen Regeln des Potenziirens

$$\frac{[\frac{1}{2}a+\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}]^{m+2}-[\frac{1}{2}a-\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}]^{m+2}}{2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+b)}}$$

$$= {}^{1}\overset{m+2}{\mathfrak{B}}\left(\frac{a}{2}\right)^{m+1} + {}^{3}\overset{m+2}{\mathfrak{B}}\left(\frac{a}{2}\right)^{m-1}x^2 + {}^{5}\overset{m+2}{\mathfrak{B}}\left(\frac{a}{2}\right)^{m-3}x^4 + \ldots. \quad (a).$$

Nun ist $x^2 = \frac{1}{4}a^2+b$, $x^4 = \frac{a^4}{2^4}+2.\frac{a^2}{2^2}.b+b^2$ etc. Substituirt man diese Werthe statt x^2, x^4 etc. in die Reihe (a), so ist

$$\left.\begin{array}{l} {}^{1}\overset{m+2}{\mathfrak{B}} \\ +{}^{3}\overset{m+2}{\mathfrak{B}} \\ +{}^{5}\overset{m+2}{\mathfrak{B}} \\ + \\ \vdots \end{array}\right| \left(\frac{a}{2}\right)^{m+1} + \left.\begin{array}{l} {}^{3}\overset{m+2}{\mathfrak{B}} \\ +2\,{}^{5}\overset{m+2}{\mathfrak{B}} \\ + \\ \vdots \end{array}\right| b.\left(\frac{a}{2}\right)^{m-1} + \ldots. \qquad (a') \text{ und } (a') = (a).$$

Man findet leicht bei einiger Aufmerksamkeit, dafs das $r$te Glied der Reihe (a'),

$= \left({}^{2r-1}\overset{m+2}{\mathfrak{B}} + .\,{}^{1}\overset{r}{\mathfrak{B}}.\,{}^{2r+1}\overset{m+2}{\mathfrak{B}} + {}^{2}\overset{r+1}{\mathfrak{B}}.\,{}^{2r+3}\overset{m+2}{\mathfrak{B}} + \ldots.\right) \times \left(\frac{a}{2}\right).^{m+3-2r}b^{r-1}$. Das $r$te Glied der Reihe $a^{m+1}+m.b.a^{m-1}\ldots.$ ist ${}^{r-1}\overset{m-r+2}{\mathfrak{B}}.a^{m+3-2r}b^{r-1}$, hieraus folgt

$${}^{2r-1}\overset{m+2}{\mathfrak{B}} + {}^{1}\overset{r}{\mathfrak{B}}.\,{}^{2r+1}\overset{m+2}{\mathfrak{B}} + {}^{2}\overset{r+1}{\mathfrak{B}}.\,{}^{2r+3}\overset{m+2}{\mathfrak{B}} + \ldots. = {}^{r-1}\overset{m-r+2}{\mathfrak{B}}.\,2^{m+3-2r}.$$

Durch ähnliche Betrachtungen findet man andere ähnliche Reihen, die ich jedoch an dieser Stelle nicht weiter verfolgen will.

6.

Setzt man nach der früher angenommenen Bezeichnung, den Bruch $a_m + \frac{b_m}{a_{m-1}} + \vdots + \frac{b_1}{a} = F(a_m, a)$, den Zähler des reducirten Bruches $F(a_m, a) = a_m, a$, den Nenner $= a_{m-1}, a$, und allgemein den Bruch $a_m + \frac{b_m}{a_{m-1}} + \vdots + \frac{b_l}{a_{l-1}} = F(a_m, a_{l-1})$, dessen Zähler a_m, a_{l-1} und Nenner a_m, a_l, so findet man (nach Form. *A.*), $a_m, a = a_m . a_{m-1}, a + b_m . a_{m-2}, a$. Nun ist $a_m, a = a, a_m$; $a_{m-1}, a = a, a_{m-1}$; $a_{m-2}, a = a, a_{m-2}$, folglich $a, a_m = a_m . a, a_{m-1} + b_m . a, a_{m-2}$, und auf dieselbe Weise kann man zeigen, dafs überhaupt

$$C. \quad a_l, a_m = a_m . a_l, a_{m-1} + b_m . a_l, a_{m-2}.$$

Hierdurch ist eine Recursionsformel gegeben, die dem ersten in (1.) gegebenen recurrirenden Verfahren entspricht. Kennt man nemlich den reducirten Bruch $F(a_l, a_{m-2})$ und $F(a_l, a_{m-1})$, also deren Zähler a_l, a_{m-2}; a_l, a_{m-1}, so zeigt die Formel (*C.*), wie man aus diesen den Zähler des Bruches a_l, a_m ableitet.

7.

Es ist $F(a, a_{m+n}) = a + \frac{b_1}{a_1} + \vdots + \frac{b_m}{F(a_m, a_{m+n})}$, folglich (nach Form. *C.*)

$$F(a_m, a_{m+n}) = \frac{F(a_m, a_{m+n}) . a, a_{m-1} + b_m . a, a_{m-2}}{F(a_m, a_{m+n}) . a_1, a_{m-1} + b_m . a_1, a_{m-2}} = \frac{a, a_{m+n}}{a_1, a_{m+n}};$$

nun ist $F(a_m, a_{m+n}) = \frac{a_m, a_{m+n}}{a_{m+1}, a_{m+n}}$, substituirt man diesen Werth, so findet man nach gehöriger Reduction:

$$a, a_{m+n} = a_m, a_{m+n} . a, a_{m-1} + b_m . a_{m+1}, a_{m+n} . a, a_{m-2},$$

und überhaupt, wenn $l < m - 1$ ist:

$$D. \quad a_l, a_{m+n} = a_l, a_{m-1} . a_m, a_{m+n} + b_m . a_l, a_{m-2} . a_{m+1}, a_{m+n}.$$

Diese Formeln zeigen, wie man den reducirten Kettenbruch $F(a, a_{m+n})$ finden kann, wenn die reducirten Kettenbrüche $F(a_m, a_{m+n}) = \frac{a_m, a_{m+n}}{a_{m+1}, a_{m+n}}$, $F(a, a_{m-1}) = \frac{a, a_{m-1}}{a_1, a_{m-1}}$, $F(a, a_{m-2}) = \frac{a, a_{m-2}}{a_1, a_{m-2}}$ gegeben sind.

8.

Aus $a, a_m = a . a_1, a_m + b_1 . a_2, a_m$ und $a_1, a_m = a . a_1, a_{m-1} + b_1 . a_2, a_{m-1}$ folgt $a, a_m . a_1, a_{m-1} - a_1, a_m . a, a_{m-1} = -b_1(a_1, a_m . a_2, a_{m-1} - a_2, a_m . a_1, a_{m-1})$; auf dieselbe Weise findet man

$a_1, a_m . a_2, a_{m-1} - a_2, a_m . a_1, a_{m-1} = -b_2(a_2, a_m . a_3, a_{m-1} - a_3, a_m . a_2, a_{m-1})$;

führt man so fort, so findet man, daſs überhaupt

$$a, a_m . a_1, a_{m-1} - a_1, a_m . a, a_{m-1} = \pm b_1 . b_2 . . . . b_m$$

ist, wo das obere oder untere Zeichen genommen werden muſs, je nachdem die Anzahl der Theilzähler ungrade oder gerade ist, weil

$$a_{m-1}, a_m + b_m - a_{m-1} . a_m = + b_m$$

ist, dieses aber der letzte in den Klammern enthaltene Ausdruck sein wird, da dieser im Allgemeinen der Zähler des Ausdrucks

$$[F(a_l, a_m) - F(a_l, a_{m-1})]$$

ist, der letzte also $a_{m-1}, a_m - a_{m-1} . a_m$ sein wird.

Auf dieselbe Weise kann man zeigen, daſs überhaupt

E. $a_l, a_m . a_{l+1}, a_{m-1} - a_{l+1}, a_m . a_l, a_{m-1} = \pm b_{l+1} . . . . b_m$ ist.

Hat man also zwei Brüche $F(a_l, a_m)$, $F(a_l, a_{m-1})$, und zieht diese von einander ab, so ist der Zähler des Resultats dem Producte aller im Bruche $F(a_l, a_m)$ enthaltenen Theilzähler, ohne Rücksicht auf das Zeichen, gleich. Hieraus folgt zugleich, daſs Zähler und Nenner eines reducirten Kettenbruchs keinen gröſseren gemeinschaftlichen Factor haben können, als das Product der in dem Bruche enthaltenen Theilzähler, denn hätten z. B. a, a_m und a_1, a_m einen solchen, so wäre das erste Glied der Gleichung $a, a_m . a_1, a_{m-1} - a_1, a_m . a, a_{m-1} = b_1 . . . . b_m$ durch diesen theilbar und das zweite nicht, was unmöglich ist *).

9.

Aus der Formel (*D.*) folgt auf dieselbe Weise:

$$a, a_{m+n} . a_1, a_{m-1} - a_1, a_{m+n} . a, a_{m-1} =$$
$$b_m (a_{m+1}, a_{m+n}) \times (a, a_{m-2} . a_1, a_{m-1} - a, a_{1-m} . a_1, a_{m-2}),$$

nun ist (nach Form. *E.*)

$$a, a_{m-1} . a_1, a_{m-2} - a, a_{m-2} . a_1, a_{m-1} = \pm b_1 . . . . b_{m-1},$$

folglich

$$[F(a, a_{n+m}) - F(a, a_{m-1})] \times (a_1, a_{n+m} . a_1, a_{m-1}) =$$
$$a, a_{n+m} . a_1, a_{m-1} - a_1, a_{n+m} . a, a_{m-1} = \mp a_{m+1}, a_{m+n} (b_1 . . . . b_m),$$

*) Sind die Theilzähler eines Bruches alle $= \pm 1$, so hat also Zähler und Nenner des reducirten Bruches gar keinen gemeinschaftlichen Factor, oder Zähler und Nenner sind alsdann Primzahlen zu einander.

und allgemein, wenn $l < m - 1$ ist,

$$F. \quad a_l, a_{m+n} \cdot a_{l+1}, a_{m-1} - a_{l+1}, a_{m+n} \cdot a_l, a_{m-1} = \pm a_{m+1}, a_{m+n} (b_{l+1} \ldots . b_m).$$

Es sei $p < m + n$ und $> m$, so giebt die Formel (*D.*)

$$a_l, a_p = a_l, a_{m-1} \cdot a_m, a_p + b_m \cdot a_l, a_{m-2} \cdot a_{m+1}, a_p;$$

verbindet man diese Formel mit der Formel (*D.*), so findet man

$$a_l, a_{m+n} \cdot a_m, a_p - a_l, a_p \cdot a_m, a_{m+n} =$$
$$b_m \cdot a_l, a_{m-2} (a_{m+1}, a_{m+n} \cdot a_m, a_p - a_{m+1}, a_p \cdot a_m, a_{m+n}),$$

oder (nach Form. *F.*)

$$G. \quad = \mp b_m \cdot a_l, a_{m-2} \cdot (b_{m+1} \ldots . b_{p+1})\ *).$$

10.

Es wurde im Vorhergehenden immer vorausgesetzt, daſs während und nach der Verwandlung des Kettenbruchs in einen gewöhnlichen Bruch, kein gemeinschaftlicher Factor des Zählers und Nenners der erhaltenen Brüche ausgelassen worden sei (§. 3.); es frägt sich nun, unter welchen Umständen ein solcher Factor möglich ist.

Die Formel (*A.*) giebt: $\frac{a_l, a_m}{a_{l+1}, a_m} = a_l + \frac{b_{l+1} \cdot a_{l+2}, a_m}{a_{l+1}, a_m}$; haben also Zähler und Nenner des reducirten Bruches $F(a_{l+1}, a_m)$, und b_{l+1} und der Zähler dieses Bruches keinen gemeinschaftlichen Factor, so haben auch Zähler und Nenner des reducirten Bruches $F(a_l, a_m)$ keinen solchen. Der reducirte Kettenbruch $F(a_l, a_m)$ wird also immer auf seine kleinste Benennung gebracht sein, wenn alle Theilzähler $= \pm 1$ sind, da Zähler und Nenner des Bruches $F(a_{m-1}, a_m)$, die bezüglich $a_{m-1} \cdot a_m + 1$ und a_m sind, keinen gemeinschaftlichen Factor haben (vergl. §. 8. Anmerk.). Haben Zähler und Nenner des Bruches $F(a_l, a_m)$ d. h. $a_l \cdot a_{l+1}, a_m + b_{l+1} \cdot a_{l+2}, a_m$ und a_{l+1}, a_m keinen gemeinschaftlichen Factor, so haben auch $a_{l+1} a_m$ und a_{l+2}, a_m d. h. Zähler und Nenner des Kettenbruchs $F(a_{l+1}, a_m)$ keinen solchen, also überhaupt auch nicht Zähler und Nenner des Bruches $F(a_{l+r}, a_m)$. Ist dagegen der reducirte Kettenbruch $F(a_{l+1}, a_m)$ nicht auf seine kleinste Benennung gebracht, so wird dies auch bei dem Kettenbruche $F(a_l, a_m)$ der Fall sein, und überhaupt werden alsdann Zähler und Nenner des Kettenbruchs $F(a_l, a_m)$ denselben gemeinschaftlichen Factor

*) Die Formeln (*F.*) und (*G.*) enthalten als einzelne Fälle alle Formeln, die Euler (*Nov. comm. petr. T. IX. pag.* 53. *seq.*) und Kramp (*Elem. d'Arithm. univ. l.* 8.) gegeben haben. Aus (*B.*) und (*E.*) folgen auch die Formeln, die Gauſs (*Disq. arithm. pag.* 17. *not.*) gegeben hat.

enthalten, wie $F(a_l, a_m)$. Haben die Gröfsen b_{m+1}, a_{m+1}, b_{m+2}, einen gemeinschaftlichen Factor, so werden auch Zähler und Nenner des Bruches $F(a, a_{m+n})$ einen solchen und zwar denselben haben, denn es sei $b_{m+n} = Ap$, $a_{m+1} = Aq$, $b_{m+2} = Ar$, $a_{m+2}, a_{m+n} = s$, $a_{m+3}, a_{m+n} = t$, so ist

$$F(a_m, a_{m+n}) = a_m + \cfrac{Ap}{Aq + \cfrac{Ar}{s:t}} = \frac{a_m \cdot A(qs + r \cdot t) + Aps}{A(qs + rt)},$$

da also Zähler und Nenner des Bruches $F(a_m, a_{m+n})$ den gemeinschaftlichen Factor A haben, so müssen auch, wie eben gezeigt wurde, Zähler und Nenner des reducirten Kettenbruches $F(a, a_{m+n})$ denselben gemeinschaftlichen Factor haben. Hieraus folgt, dafs man in jedem Kettenbruche, seines Werthes unbeschadet, die drei auf einander folgenden Gröfsen b_l, a_l, b_{l+1} mit einer beliebigen Gröfse multipliciren oder dividiren kann.

Sind a_{m+1}, b_m, a_m ungrade Zahlen, b_{m+1} eine gerade Zahl, so hat der reducirte Bruch (a, a_m) in Zähler und Nenner den Factor 2. Denn es ist $a_{m-2}, a_m = a_{m-2} \cdot (a_{m-1} \cdot a_m + b_m) + a_m \cdot b_{m-1}$; $a_{m-1}, a_m = a_{m-1} \cdot a_m + b_m$, also haben Zähler und Nenner des Bruches $F(a_{m-2}, a_m)$, folglich auch die des Bruches $a. a_m$ den gemeinschaftlichen Factor 2.

Ist $b_m = r \cdot a_{m-1}$, $a_m = b_{m-1} - r$, so haben Zähler und Nenner des reducirten Bruches $F(a_{m-2}, a_m)$ und daher auch Zähler und Nenner des reducirten Bruches $F(a, a_m)$ den gemeinschaftlichen Factor b_{m-1}. Denn es ist

$$F(a_{m-2}, a_m) = a_{m-2} + \cfrac{b_{m-1}}{a_{m-1} + \cfrac{r \cdot a_{m-1}}{b_{m-1} - r}} = \frac{a_{m-2} \cdot b_{m-1} \cdot a_{m-1} + b_{m-1} \cdot (b_{m-1} - r)}{b_{m-1} \cdot a_{m-1}}.$$

Von den Kettenbrüchen, deren Theilzähler und Theilnenner alle ganze positive Zahlen sind.

11.

Unter den besonderen Fällen, welche die oben gegebene Theorie umfafst, ist besonders der wichtig, wenn alle Theilzähler und Theilnenner ganze positive Zahlen, und die einzelnen Theilbrüche mit dem + Zeichen verbunden sind, da später gezeigt werden soll, dafs sich auf solche Brüche alle andern zurückführen lassen, deren Theilzähler oder Theilnenner alle oder theilweise gebrochene rationale Zahlen, und deren Theilbrüche alle oder theilweise mit dem — Zeichen verbunden sind. Die Formel (A.) zeigt, dafs bei solchen Brüchen, Zähler und Nenner eines jedes folgenden reducirten Bruches in der Reihe $F(a, a_m)$, $F(a_1, a_m)$, $F(a_2, a_m)$ .... klei-

ner werden, als die der vorhergehenden, daſs überhaupt $a_{l+1}, a_m < a_l, a_m$ ist; eben so folgt aus Formel (*B.*), daſs $a, a_m > a, a_{m-1}$ ist. Hiernach findet man durch Formel (*F.*), daſs die Brüche

$$F(a, a) = \frac{a}{1},\ F(a, a_1),\ F(a, a_2) \ldots .$$

sich dem Werthe des Bruches $F(a, a_{m+n})$ immer mehr nähern, und abwechselnd kleiner oder gröſser als derselbe werden. Denn nimmt man zwei in der Reihe auf einander folgende Brüche $F(a, a_l)$, $F(a, a_{l+1})$, so hat man

$$1.\quad F(a, a_{m+n}) - F(a, a_l) = \pm \frac{a_{l+2}, a_{m+n}(b_2 \ldots b_{l+1})}{a_2, a_{m+n} . a_2, a_l},$$

$$2.\quad F(a, a_{m+n}) - F(a, a_{l+1}) = \pm \frac{a_{l+3}, a_{m+n} . b_2 \ldots b_{l+2}}{a_2, a_{m+n} . a_2, a_{l+1}}.$$

Da nun $a_{l+3}, a_{m+n} < a_{l+2}, a_{m+n}$; $a_1, a_l < a_1, a_{l+1}$ ist, so ist ohne Rücksicht auf das Zeichen (2.) $<$ (1.), also $F(a, a_{l+1})$ dem Werthe von $F(a, a_{m+n})$ näher als $F(a, a_l)$, und da (1.) und (2.) entgegengesetzte Zeichen haben, so ist $F(a, a_{l+1}) \gtrless F(a, a_{m+n})$, je nachdem $F(a, a_l) \lesseqgtr F(a, a_{m+n})$ ist. Man nennt deswegen die Brüche $F(a, a)$, $F(a, a_1)$ etc. **Näherungsbrüche** von $F(a, a_{m+n})$. Nennt man $F(a, a) = a$ den ersten Näherungsbruch, $F(a, a_1)$ den zweiten, etc., so kann man sagen: alle Näherungsbrüche, deren Stelle gerade ist, sind gröſser, alle, deren Stelle ungrade ist, kleiner als der ganze Kettenbruch.

Es ist leicht, die Grenzen zu bestimmen, zwischen welchen

$$\frac{a_{l+2}, a_{m+n} . b_2 \ldots b_{l+1}}{a_m, a_{m+n} . a_2, a_l},$$

oder der Fehler, den man begeht, wenn man $F(a, a_l)$ statt $F(a, a_{m+n})$ nimmt, enthalten ist. Aus Formel (*D.*) folgt:

$$a_2, a_{m+1} = a_1, a_{l+1} . a_{l+2}, a_{m+n} + b_{l+2} . a_1, a_l . a_{l+3}, a_{m+n};$$

da nun $a_{l+2}, a_{m+n} > a_{l+3}, a_{m+n}$ ist, so ist

$$\frac{a_2, a_{m+n}}{a_{l+2}, a_{m+n}} < a_1, a_{l+1} + b_{l+2} . a_1, a_l \text{ und } > a_1, a_{l+1},$$

also

$$\frac{a_{l+2}, a_{m+n} . b_1 \ldots b_{l+1}}{a_2, a_{m+n} . a_2, a_l} = \frac{b_2, \ldots b_{l+1}}{\frac{a_2, a_{m+n}}{a_{l+2}, a_{m+n}} a_2, a_l} > \frac{b_2 \ldots b_{l+1}}{a_2, a_l (a_2, a_{l+1} + b_{l+2} . a_2, a_l)}$$

$$\text{und} < \frac{b_2 \ldots b_{l+1}}{a_2, a_l . a_2, a_{l+1}}.$$

Eine andere Gränzenbestimmung giebt folgende Betrachtung. Man setze

$\frac{a_{l+2},\, a_{m+n}.b_1 \ldots b_{l+1}}{a_1,\, a_{m+n}.a_1,\, a_l} = \pm q$, also $F(a, a_{m+n}) - F(a, a_l) = \pm q$, so wird, da $F(a, a_l)$ weniger von $F(a, a_{m+n})$ verschieden ist als $F(a, a_{l-1})$,

$$F(a, a_{m+n}) - F(a, a_{l-1}) = \mp (q + t)$$

sein, wo t eine positive Gröfse bedeutet, also

$$F(a, a_l) - F(a, a_{l-1}) = \pm (2q + t).$$

Gilt das obere Zeichen, so ist daher

$$q < \frac{F(a, a_l) - F(a, a_{l-1})}{2} \text{ oder } q < \frac{b_1 \ldots b_l}{2.a_1,\, a_l.a_1,\, a_{l-1}},$$

gilt dagegen das untere, so hat man $2q + t = F(a, a_{l-1}) - F(a, a_l)$ oder $q < \frac{-b_1 \ldots b_l}{2.a_1,\, a_l.a_1,\, a_{l-1}}$ (nach Formel E.). $F(a, a_{l+1})$ nähert sich $F(a, a_{m+n})$ mehr als $F(a, a_l)$ und $F(a, a_{l-1})$, man kann also

$$F(a, a_{m+n}) - F(a, a_{l+1}) = \mp (q - d)$$

setzen, wo d positiv und $> t$ sein mufs, also ist

$$F(a, a_{l+1}) - F(a, a_l) = \pm (2q + d),$$

also

$$2q > \pm [F(a, a_{l+1}) - F(a, a_l)] \text{ oder } q > \pm \frac{b_1 \ldots b_{l+1}}{2.a_1,\, a_{l+1}.a_1,\, a_l}.$$

Es sei z. B. der Kettenbruch $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} = \frac{925}{597}$ gegeben. Die Näherungsbrüche sind $\frac{1}{1}, \frac{5}{3}, \frac{23}{15}, \frac{135}{87}$. Es ist

$$\frac{925}{597} = 1{,}5494137353344, \quad \frac{135}{87} = 1{,}5517241379310,$$

also der Unterschied dieser beiden Brüche 0,00231040287. Man setze ihn $= q$; hier ist $a_1, a_{l-1} = 15$; $a_1, a_l = 87$; $a_1, a_{l+1} = 597$; $a_{l+1} = 6$; also nach der ersten Gränzenbestimmung $q < \frac{2.3.4.5}{87.597}$ oder $< 0{,}0023104025876$ (also bis auf die zuletzt entwickelte Stelle dem wahren Werthe gleich),

$$q > \frac{120}{87(597+87)}, \text{ d. h. } \geq 0{,}0002\ldots.$$

Nach der zweiten Gränzenbestimmung ist

$$q < \frac{24}{2.15.87}, \text{ d. h. } < 0{,}009\ldots. \text{ und } q > \frac{120}{2.597.87}, \text{ d. h. } > 0{,}001.$$

12.

Es kann keinen Bruch $\frac{m}{n}$ geben, der näher oder eben so nahe zu $F(a, a_m)$ wäre als irgend ein Näherungsbruch $F(a, a_l)$, wenn $n < \frac{a_1,\, a_l}{b_1.b_2.b_{l+1}}$

ist. Ist $F(a, a_l)$ grölser oder kleiner wie $F(a, a_m)$, so ist $F(a, a_{l+1})$ kleiner oder gröfser als derselbe Bruch, und ihm zugleich näher, $\frac{m}{n}$ mufs also entweder zwischen $F(a, a_l)$ und $F(a, a_{l+1})$ fallen, und, der Voraussetzung gemäfs, letzterem näher als ersterem sein, oder $\frac{m}{n}$ mufs kleiner oder gröfser als $F(a, a_{l+1})$ sein, je nachdem $F(a, a_l)$ gröfser oder kleiner als $F(a, a_{l+1})$ ist. In jedem Falle wird der Unterschied zwischen $\frac{m}{n}$ und $F(a, a_{l+1})$ weniger betragen müssen, als der Unterschied zwischen $F(a, a_{l+1})$ und $F(a, a_l)$ (ohne Rücksicht auf das Vorzeichen). Dies ist aber unmöglich. Denn es ist

$$F(a, a_{l+1}) - F(a, a_l) = \frac{b_1 \ldots b_{l+1}}{a_1, a_l . a_1, a_{l+1}} = \frac{1}{\frac{a_1, a_l}{b_1 \ldots b_{l+1}} . a_1, a_{l+1}},$$

$$\frac{m}{n} - F(a, a_{l+1}) = \frac{(m . a_1, a_{l+1} - n . a, a_{l+1})}{n . a_1, a_{l+1}}.$$

Nun ist $n < \frac{a_1, a_l}{b_1 \ldots b_{l+1}}$, $m . a_1, a_{l+1} - n . a, a_{l+1} \overline{\overline{>}} 1$ (ohne Rücksicht auf das Vorzeichen), also nothwendig

$$\left[\frac{m}{n} - F(a, a_{l+1})\right] > F(a, a_{l+1}) - F(a, a_l).$$

Hieraus folgt zugleich, dafs zwischen zwei Näherungsbrüche $F(a, a_l)$ und $F(a, a_{l+1})$ kein Bruch $\frac{m}{n}$ fallen kann, dessen Nenner $\overline{\overline{<}} \frac{a_1, a_{l+1}}{b_1 \ldots b_{l+1}}$ wäre, weil sonst $\frac{a, a_l . n - a_1, a_l m}{a_1, a_l . n} < \frac{b_1 \ldots b_{l+1}}{a_1, a_{l+1} . a_1, a_l}$ oder $< \frac{1}{a_1, a_l . \frac{a_1, a_{l+1}}{b_1 \ldots b_{l+1}}}$ sein müfste, was unmöglich ist.

13.

Es wurde früher gezeigt, dafs $a, a_m . a_1, a_{m-1} - a_1, a_m . a, a_{m-1} = \pm b_1 . b_2 \ldots b_m$ ist. Man darf aber nicht umgekehrt behaupten, dafs, wenn $m . a_1, a_{m-1} - n . a, a_{m-1} = \pm b \ldots b_m$ ist, auch nothwendig $\frac{m}{n} = \frac{a, a_m}{a_1, a_m}$ sei. Denn man setze

$$m = (a_m \pm r) . a, a_{m-1} + b_m . a, a_{m-2}; \quad n = (a_m \pm r) a_1, a_{m-1} + b_m . a_1, a_{m-2},$$

wo r eine beliebige Zahl bedeuten mag; m und n sind also bezüglich nicht $= a, a_m$ und a_1, a_m; aber dennoch ist

$$m . a_1, a_{m-1} - n . a, a_{m-1} = b_m (a, a_{m-2} . a_1, a_{m-1} - a_1, a_{m-2} . a, a_{m-1}) = \pm b_1 \ldots b_m.$$

Der Bruch $\frac{m}{n} = \frac{(a_m - r) . a, a_{m-1} + b_m . a, a_{m-2}}{(a_m - r) . a_1, a_{m-1} + b_m . a_1, a_{m-2}}$ wird immer zwischen den

Brüchen $F(a, a_{m-1})$, $F(a, a_m)$ enthalten, und daher selbst ein Näherungsbruch sein, wenn r eine positive Zahl und $< a_m$ ist. Es sei $F(a, a_{m-2})$ gröſser, also $F(a, a_{m-1})$ kleiner als $F(a, a_m)$, so ist

$$\frac{m}{n} - F(a, a_{m-2}) = \frac{(a_m - r)[a, a_{m-1}.a_1, a_{m-2} - a, a_{m-2}.a_1, a_{m-1}]}{n.a_1, a_{m-2}}.$$

Der Zähler dieses letzten Bruches ist eine negative Gröſse, da $F(a, a_{m-1}) < F(a, a_{m-2})$ ist, daher $\frac{m}{n} < F(a, a_{m-2})$. Ferner ist $\frac{m}{n} - F(a, a_m) =$

$$\frac{(a_m - r)[a, a_{m-1}.a_1, a_m - a_1.a_{m-1}.a, a_m] + b_m[a, a_{m-2}.a_1, a_m - a, a_{m-2}.a_1, a_m]}{n.a_1, a_m} =$$

$$\frac{r(a, a_m.a_1, a_{m-1} - a_1, a_m.a, a_{m-1})}{n.a_1, a_m} = \frac{r.b_1 \ldots b_m}{n.a_1, a_m}.$$

Der Zähler dieses Bruches ist positiv, da $F(a, a_m) > F(a, a_{m-1})$ ist, und daher $\frac{m}{n} > F(a, a_m)$. Wäre $F(a, a_{m-2})$ kleiner, also $F(a, a_{m-1})$, so würde man eben so beweisen, daſs $\frac{m}{n} > F(a, a_{m-2})$ und $< F(a, a_m)$ ist. Zwischen jede zwei Näherungsbrüche $F(a, a_m)$ und $F(a, a_{m-2})$, sind also $a - 1$ Brüche enthalten, die sich gleichfalls dem wahren Bruche nähern, und man erhält sie, indem in dem oben gegebenen Werthe von $\frac{m}{n}$ für r allmälig alle Zahlen von 1 bis $a_m - 1$ substituirt werden. Man nennt diese Brüche **eingeschaltete**.

Zieht man zwei auf einander folgende eingeschaltete Brüche von einander ab, z. B.

$$\frac{(a_m - r)a, a_{m-1} + b_m.a, a_{m-2}}{(a_m - r)a_1, a_{m-1} + b_m.a_1, a_{m-2}} \text{ und } \frac{(a_m - r + 1)a, a_{m-1} + b_m.a, a_{m-2}}{(a_m - r + 1)a_1, a_{m-1} + b_m.a_1, a_{m-2}},$$

so ist der Zähler des Unterschieds, vorausgesetzt, daſs man den kleineren vom gröſseren abzieht, $= b_m(a, a_{m-1}.a_1, a_{m-2} - a, a_{m-2}.a_1, a_{m-1})$. Ist $F(a, a_{m-1}) < F(a, a_{m-2})$, so ist dieser Zähler $= -b_m \ldots b_1$. Jeder folgende eingeschaltete Bruch wird also dann kleiner als der vorhergehende, und nähert sich daher $F(a, a_m)$ mehr; ist dagegen $F(a, a_{m-1}) > F(a, a_{m-2})$, so ist der Zähler $= b_m \ldots b_1$, also jeder folgende eingeschaltete Bruch gröſser als der vorhergehende, und daher $F(a, a_m)$ näher. Hieraus folgt, daſs zwischen zwei solchen auf einander folgenden eingeschalteten Brüchen kein Bruch, dessen Nenner gleich oder kleiner als

$$\frac{(a_m - r + 1)a, a_{m-1} + b_m.a, a_{m-2}}{b_1 \ldots b_m}$$

ist, liegen kann. Der Beweis ist wie in 12.

Eine andere Art von eingeschalteten Brüchen erhält man, wenn man $m = a_m . a, a_{m-1} + (b_m - r) . a, a_{m-2}$, $n = a_m . a_1, a_{m-1} + (b_m - r) a_1, a_{m-2}$ setzt, wo r eine positive Zahl $< b_m$ bedeutet. Es seien wieder $F(a, a_{m-2})$, $F(a, a_{m-1})$, $F(a, a_m)$ drei Näherungsbrüche, und $F(a, a_{m-2})$, $F(a, a_m)$ größer, $F(a, a_{m-1})$ kleiner als der ganze Bruch, oder $F(a, a_m)$ demselben gleich, so ist

$$\frac{m}{n} - \frac{a, a_m}{a_1, a_m}$$

$$= \frac{a_m(a, a_{m-1} . a_1, a_m - a_1, a_{m-1} . a, a_m) + (b_m - r)(a, a_{m-2} . a_1, a_m - a_1, a_{m-2} . a, a_m)}{n . a_1, a_m}$$

$$= \frac{-r(a, a_{m-2} . a_1, a_m - a_1, a_{m-2} . a, a_m)}{n . a_1, a_m}.$$

Nun ist $F(a, a_{m-2}) > F(a, a_m)$, also der Zähler des Bruches negativ, d. h. $\frac{m}{n} < F(a, a_m)$, ferner ist

$$\frac{m}{n} - \frac{a, a_{m-1}}{a_1, a_{m-1}} = \frac{(b_m - r)[a, a_{m-2} . a_1, a_{m-1} - a, a_{m-1} . a_1, a_{m-2}]}{n . a_1, a_{m-1}}.$$

Der Zähler dieses Bruches ist positiv, weil $F(a, a_{m-2})$ größer wie $F(a, a_{m-1})$ ist, daher $\frac{m}{n} > F(a, a_{m-1})$. Dieser Bruch $\frac{m}{n}$ nähert sich dem wahren Werthe immer mehr, als $F(a, a_{m-1})$, weil er zwischen $F(a, a_{m-1})$ und $F(a, a_m)$, (welches letztere dem wahren Werthe näher ist wie $F(a, a_{m-1})$), liegt, kann sich aber demselben bald mehr bald weniger wie a, a_m nähern. Wäre $F(a, a_m)$ kleiner, $F(a, a_{m-1})$ größer als der wahre Werth des Bruches, so würde aus den eben bewiesenen Formeln folgen, daſs $\frac{m}{n} > F(a, a_m)$ und $< F(a, a_{m-1})$ ist.

14.

Es seien $F(a, a_m) = a + b\frac{b_1}{a_1 + \frac{l_2}{a_2 \text{ etc.}}}$, $F(\alpha, \alpha_m) = \alpha + \frac{b_1}{\alpha_1 + \frac{b_2}{\alpha_2}}$ zwei Kettenbrüche von der in §. 11. beschriebenen Art, deren Theilzähler alle gleich, und deren Theilnenner den darüber stehenden Theilzählern entweder gleich, oder gröſser als dieselben sind, d. h. im Allgemeinen $a_l \overline{\overline{>}} b_l$, $\alpha_l \overline{\overline{>}} b_l$, so können diese Brüche nicht gleich sein, wenn nicht $a = \alpha$, $a = \alpha_1$ und überhaupt $a_l = \alpha_l$ ist. Denn es sei $\frac{b_2}{a_2 + \text{etc.}} = M$, $\frac{b_2}{\alpha_2 + \text{etc.}} = N$, also M und N positive Gröſsen, so sind die Brüche $\frac{b_1}{a_1 + M}$, $\frac{b_1}{\alpha_1 + N}$ beide kleiner wie 1; sollen also $F(a, a_m)$, $F(\alpha, \alpha_m)$ gleich sein, so muſs auch

$a = \alpha$ sein, folglich auch $a_1 + M = \alpha_1 + N$. Nun sind M und N beide kleiner wie 1, also $a_1 = \alpha_1$. Fährt man auf diese Weise fort, so findet man, dafs überhaupt $a_m = \alpha_m$ sein mufs. Man bemerke, dafs es bei diesem Beweise nicht darauf ankommt, ob die Anzahl der Theilnenner begränzt ist; der Satz gilt also auch für unendliche Kettenbrüche, sofern alle Theilzähler und Theilnenner positive ganze Zahlen und die Theilbrüche mit dem $+$ Zeichen verbunden sind.

15.

Besonders wichtig sind die in §. 11. bezeichneten Brüche, wenn alle Theilzähler $= 1$ sind. Man nennt sie dann **gewöhnliche** oder **gemeine** Kettenbrüche. Es sollen hier ihre besonderen Eigenschaften, sofern sie aus dem Frühern folgen, zusammengestellt werden.

a) Es ist

$$a, a_m = a \,.\, a_1, a_m + a_2, a_m \quad \text{(nach Formel } A.\text{)},$$
$$a, a_m = a_m \,.\, a, a_{m-1} + a, a_{m-2} \quad \text{(nach Formel } C.\text{)}.$$

b) Die Brüche $F(a, a)$, $F(a, a_1)$ u. s. w. sind Näherungsbrüche des ganzen Kettenbruchs, und zwar ist ihm jeder in der Reihe folgende näher als ein vorhergender. Diese Näherungsbrüche sind abwechselnd gröfser oder kleiner wie der ganze Bruch. Die Gränzen, innerhalb welcher der Unterschied zwischen dem ganzen Bruche $F(a, a_m)$ und einem Näherungsbruche $F(a, a_l)$ eingeschlossen sind, werden hier

$$\varphi < \frac{1}{a_1, a_l \,.\, a_1, a_{l+1}}, \quad \varphi > \frac{1}{a_1, a_l(a_1, a_l + a_1, a_{l+1})}, \text{ und}$$
$$\varphi < \frac{1}{2 \,.\, a_1, a_l \,.\, a_1, a_{l-1}}, \quad \varphi > \frac{1}{2 \,.\, a_1, a_l \,.\, a_1, a_{l+1}}, \text{ (nach §. 11.).}$$

c) Jeder Näherungsbruch ist dem wahren Werthe näher als jeder andere Bruch mit kleinerem Nenner, und zwischen zwei Näherungsbrüchen kann kein Bruch mit gleichem oder kleinerem Nenner, als der gröfsere Nenner der beiden Brüche ist, fallen (nach §. 12.).

d) Zieht man den ersten von zwei auf einander folgenden Näherungsbrüchen vom zweiten ab, so ist der Zähler des Bruches der ihren Unterschied angiebt, $= \pm 1$, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die Anzahl der Theilzähler gerade oder ungerade ist. Jeder Näherungsbruch, so wie der ganze reducirte Bruch, ist daher auf seine kleinste Benennung gebracht (nach §. 8.).

e) Zwei gewöhnliche Kettenbrüche können nicht gleich sein, wenn sie nicht identisch sind (nach §. 14.).

f) Wenn $a_m > 1$ ist, so lassen sich zwischen $F(a, a_{m-1})$ und $F(a, a_m)$, noch $a_m - 1$ Brüche einschalten, die dem wahren Werthe näher als $F(a, a_{m-1})$ und weniger nahe als $F(a, a_m)$ sind. Der Unterschied zweier auf einander folgender eingeschalteter Brüche hat immer ± 1 zum Zähler, wo das obere oder untere Zeichen genommen werden muſs, je nachdem die beiden Näherungsbrüche, zwischen welchen sie enthalten sind, beide weniger als der wahre Werth betragen, oder nicht, vorausgesetzt, daſs man den kleineren Näherungsbruch vom gröſseren abzieht *). Zwischen zwei eingegeschalteten Brüchen kann kein dritter liegen, dessen Nenner kleiner wäre als der des gröſsten, oder ihm gleich (nach §. 13.).

Die zweite Art von eingeschalteten Brüchen fällt hier natürlich weg.

g) Es seien $\frac{a}{b}$, $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_{,,}}{b_{,,}}$ drei aufeinander folgende Näherungsbrüche, so ist $a b_1 - a_1 b = \pm 1$ $a_1 b_{,,} - a_{,,} b_1 = \mp 1$, also $(a_{,,} - a) b_1 = (b_{,,} - b) a_1$, oder $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_{,,} - a}{b_{,,} - b}$, das heiſst, wenn man drei auf einander folgende Näherungsbrüche hat, und den Zähler des ersten vom Zähler des dritten, eben so den Nenner des ersten vom Nenner des dritten abzieht, so wird die erste Differenz, durch die zweite dividirt, dem zweiten Näherungsbruche gleich sein; aber man wird dadurch nicht immer diesen Bruch in der kleinsten Benennung erhalten: denn ist a_m der letzte in $a_{,,}$ enthaltene Theilnenner, so ist

$$a_{,,} = a_m . a_1 + a, \quad b_{,,} = a_m . b_1 + b,$$

also

$$a_{,,} - a = a_m . a_1, \quad b_{,,} - b = a_m . b_1;$$

sind dagegen $\frac{a}{b}$, $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_{,,}}{b_{,,}}$ drei auf einander folgende eingeschaltete Brüche, so ist $a b_1 - a_1 b = \pm 1$, $a_1 b_{,,} - a_{,,} b_1 = \pm 1$, also $(a + a_{,,}) b_1 = (b + b_{,,}) a_1$, oder $\frac{a + a_{,,}}{b + b_{,,}} = \frac{a_1}{b_1}$, welches Resultat sich leicht in Worten ausdrücken läſst. Auch hier erhält man nicht immer den Bruch in der kleinsten Benennung.

*) Die eingeschalteten Brüche sind also immer auf ihre kleinste Benennung gebracht.

16.

Mehrere der früher erwähnten Sätze können unverändert auch auf unendliche Kettenbrüche ausgedehnt werden. Denkt man sich nemlich einen solchen Kettenbruch in zwei Theile getheilt, wovon der erste die Glieder bis zu einem gewissen Theilnenner a_{m-1}, der andere die Glieder von dem folgenden Theilnenner an und weiter enthält, so kann man den zweiten Theil als summirt betrachten, und diese Summe $= a_m$ setzen. Man hat alsdann auch in diesem Falle

$$a_l, a_m = a_l . a_{l+1}, a_m + b_{l+1} . a_{l+2}, a_m \quad (\S. 3.),$$

$$a_l, a_m = a_m . a_l, a_{m-1} + b_m . a_l, a_{m-2} \quad (\S. 6.),$$

und wenn man den summirten Theil a_{m+n} nennt:

$$a, a_{m+n} = a_m, a_{m+n} . a, a_{m-1} + b_m . a_{m+1}, a_{m+n} . a, a_{m-2} \quad (\S. 7.).$$

(Die Fortsetzung folgt.)

2.

Motus corporum coelestium in medio resistente.

(Auct. Dr. *Sohncke*, Regiom.)

Perturbationes elementorum orbitae corporis coelestis determinare ad difficillima astronomiae analyticae problemata adhuc pertinet. Omnia enim huc pertinentia aut parva excentricitate posita, ita ut ejus potestates primis majores negligendae sint, aut magna excentricitate quadraturis mechanicis, quae dicuntur, hucusque sunt soluta. Specialem quaestionem huius generis, in qua excentricitatis magnitudo finibus omnino non circumscribitur, quantum fieri potest, accuratius solvere nobis proposuimus. Hoc est problema:

„Determinare variationes elementorum orbitae corporis coelestis in „medio resistente moti."

§. 1.

Medium solem circumdans, in quo nonnulli corpora coelestia moveri ponunt, pro fluido est habendum, cuius densitas in ratione inversa est cum quadrato distantiae a sole, igitur $=\frac{m}{r^2}$, si r radium vectorem significat et m factorem constantem. Cum vero medium resistens inclinationem plani orbitae ad fixum quoddam planum atque angulum inter lineam nodorum et lineam absidarum comprehensum mutare non posse pateat, de plano tantum loqui iam sufficit, ita ut tertia linea coordinata prorsus omittatur. Sit igitur ∂s sive $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$ elementum viae, quod a corpore in momento ∂t percurritur, resistentia, qua directio viae mutatur, ipsi $\frac{m}{r^2}\cdot\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2$ erit aequalis, dummodo, ut plerumque, inter resistentiam et quadratum celeritatis corporis moti rationem directam esse statuamus. Haec resistentia secundum directiones linearum coordinatarum rectum angulum formantium x et y decomposita praebet:

$$\text{𝔄.}\quad A = \frac{m}{r^2}\cdot\frac{\partial x.\partial s}{\partial t^2};\quad B = \frac{m}{r^2}\cdot\frac{\partial y.\partial s}{\partial t^2},$$

si resistentiam in directione axis x per A, et in directione axis y per B notamus.

In sequentibus significabit:

r: radium vectorem,

a: semiaxem majorem,

e: rationem excentricitatis ad semiaxem majorem,

$hh = p$: semiparametrum,

w: angulum inter axem majorem orbitae et axem coordinatarum x,

v: angulum inter axem coordinatarum x et radium vectorem, ita ut $(v-w)$ veram anomaliam exprimat,

T: tempus perihelii.

Si corpus coeleste circum solem movetur, nulla alia vi sollicitatum nisi attractiva solis, aequationes omnibus notae exstant hae:

$$\mathfrak{B}. \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{x}{r^3} = 0; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{y}{r^3} = 0$$

ubi x et y coordinatae sunt, quarum initium in sole.

Ex his constat deduci posse sequentes:

$$\mathfrak{C}. \begin{cases} 1. \quad \dfrac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial t^2} = \dfrac{2}{r} - \dfrac{1}{a}, \\ 2. \quad \dfrac{x\partial y - y\partial x}{\partial t} = \sqrt{p}, \\ 3. \quad e\cos w = -\dfrac{x}{r} - y.\dfrac{\partial y.\partial x}{\partial t^2} + x.\dfrac{\partial y^2}{\partial t^2}, \\ 4. \quad e\sin w = -\dfrac{y}{r} - x.\dfrac{\partial x.\partial y}{\partial t^2} + y.\dfrac{\partial x^2}{\partial t^2}, \end{cases}$$

atque si ponitur;

$$x = r\cos v; \quad y = r\sin v:$$

$$\mathfrak{E}. \begin{cases} 5. \quad r = \dfrac{a(1-ee)}{1+e\cos(v-w)} = \dfrac{p}{1+e\cos(v-w)}, \\ 6. \quad t+T = a^{\frac{3}{2}}\operatorname{arc}\left\{\cos = \dfrac{e+\cos(v-w)}{1+e\cos(v-w)}\right\} - a^{\frac{3}{2}}.e\sqrt{(1-ee)}.\dfrac{\sin(v-w)}{1+e\cos(v-w)}, \\ 7. \quad \dfrac{\partial r}{\partial t} = \dfrac{e}{\sqrt{p}}.\sin(v-w), \\ 8. \quad \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\sqrt{p}}{rr}. \end{cases}$$

Si vero alia vis praeter vim solis corpus sollicitat, in utraque aequatione ($\mathfrak{B}$.) est terminus addendus, qui ab illa secundum coordinatas decomposita vi pendet, ita ut habeamus:

$$\mathfrak{D}. \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{x}{r^3} + A = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{y}{r^3} + B = 0,$$

ubi A et B valores in ($\mathfrak{A}$.) memoratos habent.

Ut hae integrentur, praeclara illa theoria variationis quantitatum constantium adhibenda est, ex qua aequationes integrales (𝔈.) ita differentiari debent, ut constantes et $\frac{\partial x}{\partial t}$ et $\frac{\partial y}{\partial t}$ tanquam variabiles existimentur, x, y, t vero tanquam constantes, tum pro $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ illi modo termini ex aequationibus (𝔇.) ponantur, qui a viribus perturbantibus pendent, ita ut fit:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -A; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -B,$$

quo pacto eruuntur:

$$\mathfrak{E}\begin{cases} \partial\left(\frac{1}{a}\right) = 2A.\partial x + 2B.\partial y \dots\dots\dots\dots & \text{e } (\mathfrak{E}.\ 1.), \\ \partial(\sqrt{p}) = y.A.\partial t - x.A.\partial t \dots\dots\dots\dots & \text{e } (\mathfrak{E}.\ 2.), \\ \partial(e\cos w) = [yA - xB]\partial y + [y\partial x - x\partial y]B \dots\dots & \text{e } (\mathfrak{E}.\ 3.), \\ \partial(e\sin w) = [xB - yA]\partial x + [x\partial y - y\partial x]A \dots\dots & \text{e } (\mathfrak{E}.\ 4.), \end{cases}$$

hinc prodeunt valores variationum ∂e et ∂w ope formularum:

$$\partial e = \cos w.\partial(e\cos w) + \sin w\,\partial(e\sin w),$$

$$\partial w = \frac{1}{e}\cos w.\partial(e\sin w) - \frac{1}{e}\sin w\,\partial(e\cos w).$$

Porro fit:

$$\mathfrak{E}.\quad \partial T = -\tfrac{3}{2}a^{\frac{5}{2}}\partial\left(\frac{1}{a}\right).\left[\text{arc}\left(\cos = \frac{e+\cos(v-w)}{1+e\cos(v-w)}\right) - \frac{e\sqrt{(1-ee)}.\sin(v-w)}{1+e\cos(v-w)}\right]$$

$$-a^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1-ee)}.\left[\frac{(1-ee)\partial w}{[1+e\cos(v-w)]^2} + \frac{[2+e\cos(v-w)]\sin(v-w)\partial e}{[1+e\cos(v-w)]^2}\right] \dots \text{ e } (\mathfrak{E}.\ 6.)$$

Ut hi valores formam ad computandum aptissimam induant et tempus t et anomaliam veram $(v-w)$ anomalia excentrica u exprimi convenit, quod ope formulae:

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(v-w) = \sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}u$$

fieri potest, unde oriuntur:

$$\sin(v-w) = \sqrt{(1-ee)}\frac{\sin u}{1-e\cos u}; \quad \cos(v-w) = \frac{\cos e - u}{1-e\cos u};$$

$$r = a(1-e\cos a); \quad t+T = a^{\frac{3}{2}}[u - e\sin u];$$

$$\partial t = a^{\frac{3}{2}}[1-e\cos u]\partial u; \quad \partial r = ae.\sin u.\partial u; \quad \partial v = \sqrt{(1-ee)}.\frac{\partial u}{1-e\cos u};$$

$$x = a.[(e+\cos u).\cos w - \sqrt{(1-ee)}.\sin u.\sin w],$$

$$y = a.[(e+\cos u).\sin w + \sqrt{(1-ee)}.\sin u.\cos w],$$

$$\partial x = -a.[\sqrt{(1-ee)}.\cos u.\sin w + \sin u.\cos w].\partial u,$$

$$\partial y = a.[\sqrt{(1-ee)}.\cos u.\cos w - \sin u.\sin w].\partial u,$$

$$\partial s = a.\sqrt{(1-ee\cos u^2)}.\partial u,$$

$$A = -\frac{m}{a^3}\cdot\frac{[\sqrt{(1-ee)}\cos u\,.\,\sin w + \sin u\,.\,\cos w]\,.\,[1+e\cos u]}{[1-e\cos u]^3\sqrt{(1-ee\cos u^2)}},$$

$$B = \frac{m}{a^3}\cdot\frac{[\sqrt{(1-ee)}\cos u\,.\,\cos w - \sin u\,.\,\sin w]\,.\,[1+e\cos u]}{[1-e\cos u]^3\sqrt{(1-ee\cos u^2)}}.$$

Unde aequationes (F.) commutantur in has:

$$\mathfrak{F}.\begin{cases} \text{I.} & \partial\left(\frac{1}{a}\right) = 2m.\frac{(1-ee)^2}{pp}.\left[\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}\right]^3\frac{\partial u}{\sqrt{(1-ee\cos u^2)}}, \\ \text{II.} & \partial(\sqrt{p}) = -m.\frac{1-ee}{\sqrt{p}}.\left[\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}\right]\frac{\partial u}{\sqrt{(1-ee\cos u^2)}}, \\ \text{III.} & \partial w = -2m.\frac{(1-ee)^{\frac{3}{2}}}{pe}.\frac{[1+e\cos u]\,.\,\sin u}{[1-e\cos u]^2}.\frac{\partial u}{\sqrt{(1-ee\cos u^2)}}, \\ \text{IV.} & \partial T = m.\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{(1-ee)}}.\left[\frac{2(1+ee)}{e}+\frac{1}{e}(1+e\cos u)\right].\frac{[1+e\cos u]\,.\,\sin u\,.\,\partial u}{[1-e\cos u]^2\sqrt{(1-ee\cos u^2)}} \\ & \qquad -3m.\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{(1-ee)}}.\left[\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}\right]^2.\frac{u\,\partial u}{\sqrt{(1-ee\cos u^2)}}. \end{cases}$$

Variatio ∂e hic non est nominata, quia ex aequatione

$$p = a(1-ee)$$

statim sequitur:

$$\partial e = -\frac{p}{2e}.\partial\left(\frac{1}{a}\right) - \frac{1-ee}{e\sqrt{p}}.\partial(\sqrt{p}).$$

§. 2.

Tertia tantum aequatio integratione algebraica gaudet. Posito enim:

$$e.\cos u = \psi,$$

formula:

$$w = -2m.\frac{(1-ee)^{\frac{3}{2}}}{pe}.\int_0^u\frac{[1+e\cos u]\,.\,\sin u}{[1-e\cos u]^2}.\frac{\partial u}{\sqrt{(1-ee\cos u^2)}}$$

transit in sequentem:

$$w = -2m.\frac{(1-ee)^{\frac{3}{2}}}{pee}.\int\frac{\operatorname{cotang}^2\frac{1}{2}\psi\,\partial\frac{1}{2}\psi}{\sin^2\frac{1}{2}\psi}\begin{Bmatrix}\text{a:} & \psi = \text{arc}(\cos = e) \\ \text{ad:} & \psi = \psi \text{ usque.}\end{Bmatrix},$$

igitur fit:

$$w = \tfrac{2}{3}m.\frac{(1-ee)^{\frac{3}{2}}}{pee}\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}\psi^3 - \tfrac{2}{3}m.\frac{(1+e)^3}{pee},$$

$$w = \tfrac{2}{3}m.\frac{(1+e)^3}{pee}.\left\{\left[\sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}.\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}\psi\right]^3 - 1\right\},$$

sive:

$$(\text{III}^*.)\quad w = \tfrac{2}{3}m.\frac{(1-e)^3}{pee}.\left\{\left[\sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}\sqrt{\left(\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}\right)}\right]^3 - 1\right\}.$$

§. 3.

Prioris ambae aequationes I. et II. simili modo sunt tractandae, qua de causa hic non separatim de iis agamus. Constituamus *):

$$\frac{(1+e)(1-\cos u)}{2(1-e\cos u)}=\sin\varphi^2;\quad \frac{2\sqrt{e}}{1+1}=\lambda;\quad \frac{1-e}{1+e}=\sqrt{(1-\lambda\lambda)}=\lambda';$$
$$\sqrt{(1-\lambda\lambda\sin^2\varphi)}=\Delta\varphi,$$

unde accipimus:

$$\cos u=-\frac{1+\lambda'}{1-\lambda'}\cdot\frac{\lambda'-\Delta^2\varphi}{\lambda'+\Delta^2\varphi};\quad \sin u=2(1+\lambda')\sqrt{\lambda'}\cdot\frac{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{\lambda'+\Delta^2\varphi};$$
$$1+e\cos u=\frac{2\cdot\Delta^2\varphi}{\lambda'+\Delta^2\varphi};\quad 1-e\cos u=\frac{2\lambda'}{\lambda'+\Delta^2\varphi};\quad \sqrt{(1-ee\cos u^2)}=\frac{2\sqrt{(\lambda')}\cdot\Delta\varphi}{\lambda'+\Delta^2\varphi};$$
$$\partial u=2(1+\lambda')\sqrt{\lambda'}\cdot\frac{\partial\varphi}{\lambda'+\Delta^2\varphi};\quad \frac{\partial u}{\sqrt{(1-ee\cos u^2)}}=(1+\lambda')\cdot\frac{\partial\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Hi valores in aequationibus prius citatis (I. et II.) positi, eas commutant in sequentes:

$$\partial\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{32.m}{pp(1+\lambda')^2}\cdot\Delta^3\varphi.\partial\varphi;\quad \partial(\sqrt{p})=-\frac{4m}{\sqrt{p}(1+\lambda')}\cdot\Delta\varphi.\partial\varphi.$$

Est vero:

$$\int_0^\varphi\Delta\varphi.\partial\varphi=\mathrm{E}(\varphi).$$

atque

$$\int_0^\varphi\Delta^3\varphi.\partial\varphi=\tfrac{1}{3}\lambda\lambda.\sin\varphi.\cos\varphi.\Delta\varphi+\tfrac{2}{3}(1+\lambda'\lambda')\mathrm{E}(\varphi)-\tfrac{1}{3}\lambda'\lambda'.\mathrm{F}(\varphi).$$

Itaque aequationibus I. et II. integratis obtinemus:

$$\text{I}^*.\quad \frac{1}{a}=\frac{32.m}{3pp(1+\lambda')^2}\cdot[\lambda\lambda.\sin\varphi.\cos\varphi.\Delta\varphi+2(1+\lambda'\lambda')\mathrm{E}(\varphi)-\lambda'\lambda'\mathrm{F}(\varphi)],$$
$$\text{II}^*.\quad \sqrt{p}=-\frac{3m}{\sqrt{p}(1+\lambda')}\cdot\mathrm{E}(\varphi).$$

§. 4.

Ex aequationibus (𝔉.) in prima sectione accitis una tantum integrando restat et ea quidem, cuius integratione variationem temporis perihelii adipiscimur. Illic enim habuimus:

$$\text{IV.}\quad \partial T=\frac{m.\sqrt{p}}{\sqrt{(1-ee)}}\cdot\left[\frac{2(1+ee)}{e}+e(1+e.\cos u)\right]\cdot\frac{[1+e\cos u].\sin u.\partial u}{[1-e\cos u]^2\sqrt{(1-ee\cos u^2)}}$$
$$-3m.\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{(1-ee)}}\cdot\left[\frac{1+e.\cos u}{1-e.\cos u}\right]^2\frac{u}{\sqrt{(1-ee\cos u^2)}},$$

ex quo sequitur:

$$\mathfrak{G}.\quad T=\frac{m\sqrt{p}}{\sqrt{(1-ee)}}\cdot[P-3Q],$$

---

*) Hic et in iis, quae sequuntur, significandi genere utar, quod Cl. Legendre et Jacobi in scriptis de functionibus, quae dicuntur ellipticae transcendentes, in usum vocarunt.

ubi valet:

$$P \text{ idem ac: } \int_0^u \left[\frac{2(1+ee)}{e} + e(1+e.\cos u)\right] \frac{[1+e\cos u].\sin u.\partial u}{[1-e\cos u]^2 \sqrt{(1-ee\cos u^2)}} \text{ et}$$

$$Q \text{ idem ac: } \int_0^u \left[\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}\right]^2 \frac{u\,\partial u}{\sqrt{(1-ee\cos u^2)}}.$$

Tantum ipsum P quantitatibus finitis determinari potest. Si enim eadem substitutione ac in sectione antecedente utimur, obtinemus:

$$P = \int_0^\varphi \frac{2\lambda\lambda}{\sqrt{\lambda'}} \cdot \left[\frac{3-2\lambda'+3\lambda'\lambda'}{\lambda'(1-\lambda')^2} - \frac{1}{\lambda'+\Delta^2\varphi}\right] \sin\varphi.\cos\varphi.\Delta\varphi.\partial\varphi,$$

sive:

$$\mathfrak{H}.\quad P = \frac{2}{\lambda'\sqrt{\lambda'}}\left[1-\lambda'+\tfrac{4}{3}\frac{\lambda'}{(1-\lambda')^2}\right] - \frac{2}{\lambda'\sqrt{\lambda'}}\left[1+\tfrac{4}{3}\frac{\lambda'}{(1-\lambda')^2}\right]\Delta^3\varphi$$
$$+ \frac{2}{\sqrt{\lambda'}}\Delta\varphi + 2.\text{arc}\left[\tang = \frac{\sqrt{\lambda'}(1-\Delta\varphi)}{\lambda'+\Delta\varphi}\right].$$

Quod ad alteram partem integralis quaesiti attinet, eadem integrandi facilitate non fruimur. Primum integratio per partes, quae dicitur, instituatur, quo facto eruimus:

$$\mathfrak{J}.\quad Q = u.R - \int_0^u R\,\partial u,$$

si:

$$\int_0^u \left[\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}\right]^2 \frac{\partial u}{\sqrt{(1-ee\cos u^2)}}$$

per R reddimus.

Ipsum R jam determinatum est, cum variationem semiaxsis majoris evolvebamus (§. 3.), ubi prodiit:

$$\mathfrak{K}.\quad R = \frac{1+\lambda'}{3\lambda'\lambda'}[\lambda\lambda.\sin\varphi.\cos\varphi.\Delta\varphi + 2(1+\lambda'\lambda')E(\varphi) - \lambda'\lambda' F(\varphi)].$$

Ut $\int_0^u R.\partial u$ facillime obtineamus, R in quatuor partes dividere libet, quippe aequatis,

$$U = \int \frac{[1+ee\cos u^2].\cos u.\partial u}{[1-ee\cos u^2]\,2\sqrt{(1-\cos u^2)}},\quad V = \int \frac{\partial u}{\sqrt{(1-ee\cos u^2)}},$$

$$V_1 = \int \frac{\partial u}{[1-ee\cos u^2]\sqrt{(1-ee\cos u^2)}},\quad V_2 = \int \frac{\partial u}{[1-ee\cos u^2\sqrt{(1-ee\cos u^2)}}$$

fit:

$$\int_0^u R.\partial u = 4e\int_0^u U.\partial u + \int_0^u V.\partial u - 8\int_0^u V_1.\partial u + 8\int_0^u V_2.\partial u.$$

Ad primum terminum determinandum ponamus:

$$\frac{\sin u}{\sqrt{(1-ee\cos u^2}} = \sin\xi;\quad \sqrt{(1-ee\sin\xi^2)} = \Delta\xi,$$

unde fluunt:

$$\sin u = \sqrt{(1-ee)}.\frac{\sin\xi}{\Delta\xi};\ \cos u = \frac{\cos\xi}{\Delta\xi};\ \partial u = \sqrt{(1-ee)}.\frac{\partial\xi}{\Delta^2\xi};\ \sqrt{(1-ee)} = e',$$

quo pacto fit:

$$U = \frac{1}{e'^4}.[1 + ee - \tfrac{2}{3}ee\sin\xi^2].\sin\xi$$

atque:

$$\int_0^u U\partial u = \frac{4}{3.e'^3}.\sin\tfrac{1}{2}\xi^2 + \frac{1+3ee}{3e.e'^4}\text{arc}\left[\tang = \frac{2ee'\sin\frac{1}{2}\xi^2}{e'e' + ee\cos\xi}\right].$$

§. 5.

Hucusque omnia aut quantitatibus finitis aut functionibus ellipticis primae et secundae speciei determinari potuerunt, ad reliqua vero integralia V, V_1, V_2 definienda, illae praeclarae functionum ellipticarum evolutiones, quas primus Cl. Jacobi dedit, advocentur necesse est.

Hunc in finem ponere convenit:

$$u = \frac{\pi}{2} - w,$$

atque

$$w = \text{coam}\frac{2Kx}{\pi} \quad (\text{mod. } e),$$

ita ut fit:

$$\int_0^w \frac{\partial w}{\sqrt{(1 - ee\sin w^2)}} = K - \frac{2Kx}{\pi},$$

atque $\text{am}\frac{2Kx}{\pi}$ idem ac ξ in sectione antecedente.

Si praeterea redditur:

$$\sqrt{\left(1 - ee\sin^2\text{am}\frac{2Kx}{\pi}\right)} \text{ per } \Delta\,\text{am}\frac{2Kx}{\pi} \text{ et}$$

$$\int_0^x \Delta^2\text{am}\,.\,\partial x \qquad \text{per } \text{E}\,\text{am}\frac{2Kx}{\pi}\,^{*)},$$

obtinemus:

$$V = \frac{2Kx}{\pi},$$

$$V_1 = \frac{1}{e'e'}.\frac{2K}{\pi}.\int_0^x \Delta^2\text{am}\frac{2Kx}{\pi}\partial x = \frac{1}{e'e'}\text{E}\,\text{am}\frac{2Kx}{\pi},$$

$$V_2 = \frac{1}{e'^4}.\frac{2K}{\pi}.\int_0^x \Delta^4\text{am}\frac{2Kx}{\pi}\partial x$$

$$= \frac{ee}{3e'^4}\sin\xi.\cos\xi.\Delta\xi + \frac{2(2-ee)}{3.e'^4}\text{E}\,\text{am}\frac{2Kx}{\pi} - \frac{1}{3.e'e'}.\frac{2Kx}{\pi}.$$

Horum V, V^1, V^2, unumquodque ipso

$$\partial u = -\partial.\text{coam}\frac{2Kx}{\pi} = e'\frac{\partial\xi}{\Delta^2\xi}$$

---

*) Vid. Crelle Journal für die reine und angew. Mathem. Tom. IV pag. 373.

multiplicandum et postea integrandum est, qua occasione duo integralia obviam fiunt, quae separatim tractentur oportet. Haec sunt:

$$\frac{2K}{\pi}\int_0^x x.\partial.\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi};\quad \int_0^x \operatorname{E am}\frac{2Kx}{\pi}\,\partial.\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}.$$

§. 6.

In formula priori, integratione per partes adhibita, eruitur

$$\frac{2K}{\pi}\int_0^x \partial.\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{2Kx}{\pi}.\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi} - \frac{2K}{\pi}\int_0^x \operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}\,\partial x.$$

In expressione vero pro amplitudine exstante *):

$$\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = x + \frac{2q\sin 2x}{1+q^2} + \frac{2q^2\sin 4x}{2(1+q^4)} + \frac{2q^3\sin 6x}{3(1+q^6)} + \ldots.$$

$\frac{\pi}{2} - x$ loco x ponamus, unde accipiemus aequationem:

$$\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{\pi}{2} - x + \frac{2q\sin 2x}{1+q^2} - \frac{2q^2\sin 4x}{2(1+q^4)} - \frac{2q^3\sin 6x}{3(1+q^6)} - \ldots.$$

e qua ipso $\frac{2K}{\pi}.\partial x$ multiplicata et postea integrata provenit:

$$\frac{2K}{\pi}\int_0^x \operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}\,\partial x$$

$$= \frac{2K}{\pi}\left[\tfrac{1}{2}\pi x - \tfrac{1}{2}xx - \frac{q\cos 2x}{1+q^2} + \frac{q^2\cos 4x}{4(1+q^4)} - \frac{q^3\cos 6x}{9(1+q^6)} + \ldots\right]$$

$$+ \frac{2K}{\pi}\left[\frac{q}{1+q^2} - \frac{1}{4}\,\frac{q^2}{1+q^4} + \frac{1}{9}\,\frac{q^3}{1+q^6} - \ldots\right]$$

$$= \frac{Kx}{\pi}[\pi - x] + \frac{4K}{\pi}\left[\frac{q\sin x^2}{1+q^2} - \frac{q^2\sin 2x}{4(1+q^4)} + \frac{q^3\sin 3x^2}{9(1+q^6)} - \ldots\right]$$

$$= \frac{Kx}{\pi}[\pi - x] - \frac{4K}{\pi}\Sigma\frac{(-q)^n\sin n x^2}{n.m(1+q^{2n})},$$

ubi numero n tribuantur valores: 1, 2, 3, ... ∞, itaque:

$$\mathfrak{L}.\quad \frac{2K}{\pi}\int_0^x x.\partial.\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi} = -\frac{Kx}{\pi}[2u - x] + \frac{4K}{\pi}\Sigma\frac{(-q)^n\sin n x^2}{nn.(1+q^{2n})}.$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots \infty$$

§. 7.

Secundum integrale, quod nobis occurrit, est:

$$\int_0^x \operatorname{E am}\frac{2Kx}{\pi}.\partial.\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}.$$

Cum vero sit:

$$\operatorname{E am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{2K}{\pi}\int_0^x \Delta^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\,\partial x = \frac{2Kx}{\pi} - \frac{2K}{\pi}\,ee\int_0^x \sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\,\partial x$$

erit e notatione Cl. Jacobi:

---

*) Vid. Jacobi *Fundamenta nova theor. funct. ellipt.* §. 39. Nro. 24. pag. 102.

$$\frac{2K}{\pi}\,\mathrm{E\,am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{2K}{\pi}\left[\frac{2E'x}{\pi} + \mathrm{Z}\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)\right],$$

igitur:

$$\frac{2K}{\pi}\int_0^x \mathrm{E\,am}\frac{2Kx}{\pi}.\,\partial.\,\mathrm{coam}\frac{2Kx}{\pi}$$

$$= \frac{2K}{\pi}.\frac{2E'}{\pi}\int_0^x x.\,\partial.\,\mathrm{coam}\frac{2Kx}{\pi} + \frac{2K}{\pi}\int_0^x \mathrm{Z}\left(\frac{2Kx}{\pi}\right).\,\partial.\,\mathrm{coam}\frac{2Kx}{\pi}.$$

Priorem partem hujus integralis in sectione sexta illustravimus, qua re tantum altera pars restat enucleando. Hunc in finem seriem pro coamplitudine antea datam ratione x differentiemus, deinde in seriem pro $\frac{2K}{\pi}\mathrm{Z}\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$ *) ducamus, denique integremus.

Formula vero pro coamplitudine:

$$\mathrm{coam}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{\pi}{2} - x + \frac{2q\sin 2x}{1+q^2} - \frac{2q^2\sin 4x}{2(1+q^4)} + \frac{2q^3\sin 6x}{3(1+q^6)} - \dots$$

secundum x differentiata praebet:

$$\partial.\,\mathrm{coam}\frac{2Kx}{\pi} = -\left[1 - \frac{4q\cos 2x}{1+q^2} + \frac{4q^2\cos 4x}{1+q^4} - \frac{4q^3\cos 6x}{1+q^6} + \dots\right].\,\partial x$$

$$= -\left[1 + 4\sum_{n=1,2,3,\dots\infty}\frac{(-q)^n\cos 2nx}{1+q^{2n}}\right].\,\partial x,$$

haec est ducenda in:

$$\frac{2K}{\pi}\mathrm{Z}\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 4.\left[\frac{q\sin 2x}{1-q^2} + \frac{q^2\sin 4x}{1-q^4} + \frac{q^3\sin 6x}{1-q^6} + \dots\right]$$

$$= 4.\sum_{n=1,2,3,\dots\infty}\frac{q^n\sin 2nx}{1-q^{2n}},$$

qua si multiplicatione revera utimur, accita formula trigonometrica:

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta),$$

factorem ipsius $(-4\sin 4nx)$ adipiscimur =

$$\frac{q^{2n}}{1-q^{4n}} - \frac{2q^{2n}}{(1-q^{4n-2})(1+q^2)} + \frac{2q^{2n}}{(1-q^{4n-4})(1+q^4)} - \dots - \frac{2q^{2n}}{(1-q^2)(1+q^{4n-2})}$$

$$- \frac{2q^{2n+2}}{(1-q^{4n+2})(1+q^2)} + \frac{2q^{2n+4}}{(1-q^{4n+4})(1+q^4)} - \frac{2q^{2n+6}}{(1-q^{4n+6})(1+q^6)} + \dots \text{ ad infin. usque}$$

$$+ \frac{2q^{2n+2}}{(1-q^2)(1+q^{4n+2})} - \frac{2q^{2n+4}}{(1-q^4)(1-q^{4n+4})} + \frac{2q^{2n+6}}{(1-q^3)(1+q^{4n+6})} - \dots \text{ ad infin. usque}$$

$$\sum_{m=0,1,2,3,\dots(2n-1)}(-1)^m\frac{2q^{2n}}{(1-q^{4n-2m})(1+q^{2m})} + \sum_{p=1,2,3,\dots\infty}(-1)^p\frac{2q^{2n+2p}}{(1-q^{4n+2p})(1+q^{2p})} - \sum_{p=1,2,3,\dots\infty}(-1)^p\frac{2q^{2n+2p}}{(1-q^{2p})(1+q^{4n+2p})}.$$

---

*) l. c. §. 47. pag. 133.

Quia tamen omnes fractiones hic obviae in fractiones partiales discerpi possunt per formulas:

$$\frac{2q^{2n}}{(1-q^{4n-2m})(1+q^{2m})} = \frac{2q^{2n}}{1+q^{4n}}\cdot\left[1+\frac{q^{4n-2m}}{1-q^{4n-2m}}-\frac{q^{2m}}{1+q^{2m}}\right],$$

$$\frac{2q^{2n+2p}}{(1-q^{4n+2p})(1+q^{2p})} = \frac{2q^{2n}}{1+q^{4n}}\cdot\left[\frac{q^{4n+2p}}{1-q^{4n+2p}}+\frac{q^{2p}}{1+q^{2p}}\right],$$

$$\frac{2q^{2n+2p}}{(1-q^{2p})(1+q^{4n+2p})} = \frac{2q^{2n}}{1+q^{4n}}\cdot\left[\frac{q^{2p}}{1-q^{2p}}+\frac{q^{4n+2p}}{1+q^{4n+2p}}\right]$$

obtinemus coefficientem termini, qui $(-4\sin 4nx)$ continet:

$$= \frac{2q^{2n}}{1+q^{4n}}\cdot\left[\Sigma(-1)^m+\Sigma(-1)^m\cdot\frac{q^{4n-2m}}{1-q^{4n-2m}}-\Sigma(-1)^m\cdot\frac{q^{2m}}{1+q^{2m}}\right]$$

$$+\Sigma(-1)^p\frac{q^{4n+2p}}{1-q^{4n+2p}}+\Sigma(-1)^p\frac{q^{2p}}{1+q^{2p}}-\Sigma(-1)^p\frac{q^{2p}}{1-q^{2p}}-\Sigma(-1)^p\frac{q^{4n+2p}}{1+q^{4n+2p}}$$

siquidem in summis brevitatis causa signo Σ praefixo notatis, literae m omnes valores $0, 1, 2, 3, \ldots (2n-1)$, literae p vero omnes valores ab unitate ad infinitum usque tribuuntur.

Cum vero sit:

$$\sum_{m=0,1,2,\ldots(2n-1)}(-1)^m = 0$$

$$\sum_{m=0,1,2,\ldots(2n-1)}(-1)^m\frac{q^{4n-2m}}{1-q^{4n-2m}}+\Sigma(-1)^p\frac{q^{4n+2p}}{1-q^{4n+2p}}-\sum_{p=1,2,3,\ldots\infty}(-1)^p\frac{q^{2p}}{1-q^{2p}} = 0$$

$$-\sum_{m=0,1,2,\ldots(2n-1)}(-1)^m\frac{q^{2m}}{1+q^{2m}}-\Sigma(-1)^p\frac{q^{4n+2p}}{1+q^{4n+2p}}+\sum_{p=1,2,3,\ldots\infty}(-1)^p\frac{q^{2p}}{1+q^{2p}} = -\tfrac{1}{2}+\frac{q^{4n}}{1+q^{4n}},$$

nanciscimur:

$$\frac{2q^{2n}}{1+q^{4n}}\left[-\tfrac{1}{2}+\frac{q^{4n}}{1+q^{4n}}\right] \quad \text{sive:} \quad -\frac{q^{2n}(1+q^{4n})}{(1+q^{4n})^2},$$

unde terminus quaesitus fit:

$$= \frac{4q^{2n}(1-q^{4n})}{(1+q^{4n})^2}\sin 4nx.$$

Eodem modo subsequens terminus eruitur:

$$= -\frac{4q^{2n+1}(1-q^{4n+2})}{(1+q^{4n+2})^2}\sin(4n+2)x,$$

quare totum productum aequale fit:

$$= 4\sum_{n=1,2,3,\ldots\infty}\frac{(-q)^n(1-q^{2n})}{(1+q^{2n})^2}\sin 2nx.$$

Hoc per ∂x multiplicatum atque deinde inter limites 0 et x integratum abit in:

$$-2\Sigma\frac{(-q)^n(1-q^{2n})}{n(1+q^{2n})^2}\cos 2nx + 2\Sigma\frac{(-q)^n(1-q^{2n})}{n(1+q^{2n})^2}$$
$$= 4\Sigma\frac{(-q)^n(1-q^{2n})}{n(1+q^{2n})^2}\sin nx^2.$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots \infty$$

His collectis habebimus:

$$\mathfrak{M}. \quad \int_0^x \mathrm{E}\,\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}.\partial.\mathrm{coam}\frac{2Kx}{\pi} = -\frac{\mathrm{E}'x}{\pi}.[2u-x] + \frac{4\mathrm{E}'}{\pi}\Sigma\frac{(-q)^n\sin nx}{nn(1+q^{2n})}$$
$$+\frac{2\pi}{K}\Sigma\frac{(-q)^n(1-q^{2n})\sin nx^2}{n(1+q^{2n})^2},$$

ubi pro n omnes deinceps numeri integri ab unitate ad infinitum usque ponendi sunt.

§. 8.

Idem integrale:

$$\int_0^x \mathrm{E}\,\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}.\partial\,\mathrm{coam}\frac{2Kx}{\pi},$$

elegantiori methodo assequi possumus. Est enim in §. 5. positum:

$$\int_0^w \frac{\partial w}{\sqrt{(1-ee\sin w^2)}} = K - \frac{2Kx}{\pi} \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\,\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{\sqrt{\left(1-ee\sin^2\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}\right)}} = K,$$

e quibus ratione q differentiatis (ubi x tanquam constans, e, K et w vero tanquam variabiles considerari debent) profluunt:

$$a. \quad e\frac{\partial e}{\partial q}.\int_0^w \frac{\sin^2 w\,\partial w}{[1-ee\sin^2 w]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\partial w}{\partial q}.\frac{1}{\sqrt{(1-ee\sin^2 w)}} = \left[1-\frac{2x}{\pi}\right].\frac{\partial K}{\partial q}.$$

$$b. \quad \frac{\partial K}{\partial q} = \left[\frac{1}{1-ee}\mathrm{E}'-K\right]\frac{1}{e}.\frac{\partial e}{\partial q}.$$

Ut valorem ipsius $\frac{\partial e}{\partial q}$ obtineamus, advocemus formulam *);

$$\partial\frac{K'}{K} = -\frac{\frac{1}{2}\pi.\partial e}{e(1-ee)KK}.$$

Est vero **): $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$ quod differentiatum exhibet

$$\partial.\frac{K'}{K} = -\frac{\partial q}{\pi q}.$$

His comparatis impetramus:

$$\frac{\partial e}{\partial q} = \frac{e(1-ee)}{2q}.\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2,$$

---

*) l. c. §. 32. pag 74. posito $a = b' = 1$, $a' = b = 0$ in formula:

$$\partial.\frac{Q'}{Q} = -\tfrac{1}{2}\pi\frac{a.b'-a'.b}{e(1-ee)QQ}.\partial e.$$

**) l. c. pag. 85.

quo valore in formula (*b.*) posito nanciscimur:

$$c.\quad \frac{\partial K}{\partial q} = \frac{1-ee}{2q}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\left[\frac{1}{1-ee}E' - K\right]$$

unde denique aequatio (*a.*) transit in sequentem:

$$\partial.\frac{ee(1-ee)}{2q}.\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2.\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{\sin^2 \text{coam}\frac{2Kx}{\pi}.\partial.\text{coam}\frac{2Kx}{\pi}}{\Delta^3 \text{coam}\frac{2Kx}{\pi}} + \frac{\partial.\text{coam}\frac{2Kx}{\pi}}{\Delta\, \text{coam}\frac{2Kx}{\pi}.\partial q}$$

$$= \frac{1}{2q}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2[E'-(1-ee)K].\left[1-\frac{2x}{\pi}\right],$$

sive, cum sit:

$$ee(1-ee)\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{\sin^2 \text{coam}\frac{2Kx}{\pi}.\partial.\text{coam}\frac{2Kx}{\pi}}{\Delta^3 \text{coam}\frac{2Kx}{\pi}} = -ee\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cos^2 \text{am}\frac{2Kx}{\pi}.\partial.\frac{2Kx}{\pi}$$

$$= (1-ee)\frac{2K}{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) - E\,\text{am}\frac{2Kx}{\pi} + E',$$

in hanc:

$$-\frac{2K}{\pi}.E\,\text{am}\frac{2Kx}{\pi}\,\Delta\,\text{coam}\frac{2Kx}{\pi}$$

$$= -\frac{2K}{\pi}.\frac{2E'}{\pi}.x\,\Delta\,\text{coam}\frac{2Kx}{\pi} - \frac{q\pi}{K}.\frac{\partial.\text{coam}\frac{2Kx}{\pi}}{\partial q},$$

quae ipso ∂x multiplicata, deinde inter limites 0 et x integrata, hanc formam induit:

$$e.\quad \int_0^x E\,\text{am}\frac{2Kx}{\pi}.\partial.\text{coam}\frac{2Kx}{\pi}$$

$$= \frac{2E'}{\pi}\int_0^x x.\partial.\text{coam}\frac{2Kx}{\pi} - \frac{q\pi}{K}\int_0^x \frac{\partial.\text{coam}\frac{2Kx}{\pi}}{\partial q}.\partial x,$$

quorum alterum terminum in §. 6. computatione consecuti sumus:

$$f.\quad \int_0^x x.\partial.\text{coam}\frac{2Kx}{\pi} = -\frac{x}{2}[2u-x] + 2\Sigma\frac{(-q)^n \sin^2 nx}{nn(1+q^{2n})},$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots \infty$$

alterum vero inveniemus, si expressionem pro coamplitudine propositam

$$\text{coam}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{\pi}{2} - x + \frac{2q\sin 2x}{1+q^2} - \frac{2q^2\sin 4x}{2(1+q^4)} + \frac{2q^3\sin 6x}{3(1+q^6)} - \ldots$$

$$= \frac{u}{2} - x - 2\Sigma\frac{(-q)^n.\sin 2nx}{n(1+q^{2n})}$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots \infty$$

ratione q differentiaverimus, quo pacto fit:

$$\frac{\partial.\text{coam}\frac{2Kx}{\pi}}{\partial q} = 2\Sigma\frac{(-q)^{n-1}(1-q^{2n}).\sin 2nx}{(1+q^{2n})^2},$$

quod ipso $\frac{\pi q}{K}.\partial x$ multiplicatum et inter limites 0 et x integratum, praebet:

$$f.\quad \frac{\pi q}{K}\int_0^x \frac{\partial.\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}}{\partial q}.\partial x = -\frac{2\pi}{K}\Sigma\frac{(-q)^n(1-q^{2n})\sin^2 nx}{n(1+q^{2n})^2}.$$

Hinc illa aequatio (*e.*) sic enucleata apparebit:

$$\int_0^x \mathrm{E}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}.\partial.\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}$$

$$= -\frac{\mathrm{E}'x}{\pi}[2u-x]+\frac{4\mathrm{E}'}{\pi}\Sigma\frac{(-q)^n\sin^2 nx}{nn(1+q^{2n})}+\frac{2\pi}{K}\Sigma\frac{(-q)^n(1-q^{2n})\sin^2 nx}{n(1+q^{2n})^2},$$

quae eadem est atque aequatio (𝔐.) in §. 7.

§. 9.

In sectione quarta fuit:

$$\int_0^u R.\partial u = 4e\int_0^u U.\partial u+\int_0^u V.\partial u-8\int_0^u V_1.\partial u+8\int_0^u V_2.\partial u.$$

Si valores pro U, V, V_1, V_2, ibidem et in sectionibus sequentibus accuratius constitutos hic substituimus, facillima reductione adhibita sequitur:

$$\int_0^u R.\partial u = \frac{8}{3e'^4}.[1+2e\sin^2.\tfrac{1}{2}\xi-\Delta\xi]+\frac{4(1+3ee)}{3e'^4}.\operatorname{arc}.\left[\operatorname{tang}=\frac{2ee'\sin^2\frac{1}{2}\xi}{e'e'+ee\cos\xi}\right]$$

$$-\frac{(5+3ee)e'e'.K-8(1+ee)\mathrm{E}'}{3e'^4.\pi}.\left[2x.u-xx-4\Sigma\frac{(-q)^n.\sin^2 nx}{nn.(1+q^{2n})}\right]$$

$$-\frac{16(1+ee)}{3e'^4}.\frac{\pi}{K}.\Sigma\frac{(-q)^n(1-q^{2n})\sin^2 nx}{n(1+q^{2n})^2}.$$

Hinc cum esset:

$$T = \frac{m.h}{\sqrt{(1-ee)}}.[P-3Q] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathfrak{G}.)$$

$$P = \frac{2}{\lambda'\sqrt{\lambda'}}\left[1-\lambda'+\tfrac{4}{3}\frac{\lambda'}{(1-\lambda')^2}\right]-\frac{2}{\lambda'\sqrt{\lambda'}}\left[1+\tfrac{4}{3}\frac{\lambda'}{(1-\lambda')^2}\right]\Delta^3\varphi+\frac{2}{\sqrt{\lambda'}}\Delta\varphi$$

$$+2.\operatorname{arc}\left[\operatorname{tang}=\frac{\sqrt{(\lambda'(1-\Delta\varphi))}}{\lambda'+\Delta\varphi}\right] \quad \ldots\ldots \quad (\mathfrak{H}.)$$

$$Q = u.R-\int_0^x R\,\partial u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathfrak{J}.)$$

$$R = \frac{1+\lambda'}{3\lambda'\lambda'}.[\lambda\lambda\sin\varphi.\cos\varphi.\Delta\varphi+2(1+\lambda'\lambda')\mathrm{E}(\varphi)-\lambda'\lambda'\mathrm{F}(\varphi)] \quad . \quad (\mathfrak{K}.)$$

evadit:

$$T = -m.h\frac{(1+\lambda')}{\lambda'\lambda'}.\left[1+\lambda'+\lambda'\lambda'+\frac{(1-\frac{8}{3}\lambda'+\lambda'\lambda')\Delta^2\varphi}{(1-\lambda')^2}\right].\Delta\varphi$$

$$+\frac{m.h.(1+\lambda')}{\lambda'\lambda'(1-\lambda')^2}.[2-\tfrac{8}{3}\lambda'+\lambda'\lambda'-\lambda'^3+\lambda'^4]$$

$$+m.h\frac{(1-\lambda'^3)(1+\lambda')}{\lambda'\lambda'\sqrt{\lambda'}(1-\lambda')}\operatorname{arc}\left[\operatorname{tang}=\frac{\sqrt{\lambda'(1-\Delta\varphi)}}{\lambda'+\Delta\varphi}\right]$$

$$-\frac{mh.u(1+\lambda')^2}{2\lambda'\lambda'\sqrt{\lambda'}}.[\lambda\lambda\sin\varphi.\cos\varphi.\Delta\varphi+2(1+\lambda'\lambda')\mathrm{E}(\varphi)-\lambda'\lambda'\mathrm{F}(\varphi)]$$

$$-\frac{mh.[(5+3ee)e'e'K-8(1+ee)E']}{e'^5\pi}\left[2x.u-xx+\frac{4q.\sin^2.x}{1+q^2}-\frac{4q^2\sin^2.2x}{4(1+q^4)}+\frac{4q^3\sin^2 3x}{9(1+q^6)}-\ldots\right]$$
$$+\frac{16mh.(1+ee)}{e'^5}\cdot\frac{\pi}{K}\cdot\left[\frac{q(1-q^2)\sin^2 x}{(1+q^2)^2}-\frac{q^2(1-q^4)\sin^2 2x}{2(1+q^4)^2}+\frac{q^3(1-q^6)\sin^2 3x}{3(1+q^6)^2}-\ldots\right].$$

§. 10.

Hic valor ipsius T calculando minus aptus est, quoties excentricitas e unitati proxime accedit, pro valore enim $e=1$ fit $T=\frac{0}{0}$; verumtamen huic casui transformatio serierum favet.

Ponatur enim in formula nona l. c. §. 39. pag. 99.

$$\log\sqrt{\left(\frac{1+\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1-\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}\right)}=\log\sqrt{\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)}+\frac{4q\sin x}{1-q}-\frac{4q^3\sin 3x}{3(1-q^3)}+\frac{4q^5\sin 5x}{5(1-q^5)}-\ldots$$

ix loco x, quo facto, adhibita aequatione nota:

$$\sin\operatorname{am} iu = i\operatorname{tang}\operatorname{am}(u,k'),$$

expressio:

$$\log\sqrt{\left(\frac{1+\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1-\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}\right)}$$

convertitur in:

$$-i\operatorname{am}\left(\frac{2Kx}{\pi},k'\right).$$

Praeterea si facimus: $\sin ix = i\operatorname{tang}y$, quod idem valet ae

$$e^x=\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}y),$$

ubi e basin logarithmorum naturalium significat, prodit:

$$\log\sqrt{\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)}=-iy,$$

unde formula citata transformatur in:

$$\operatorname{am}\left(\frac{2Kx}{\pi},k'\right)=$$
$$2.\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=e^x)-\tfrac{1}{2}\pi-\frac{2q(e^x-e^{-x})}{1-q}+\frac{2q^3(e^{3x}-e^{-3x})}{3(1-q^3)}-\frac{2q^5(e^{5x}-e^{-5x})}{5(1-q^5)}+\ldots$$

Si vero k pro k' scribimus, quo

$$K \text{ in } K',$$
$$K' \text{ in } K,$$
$$q=e^{-\frac{\pi K'}{K}} \text{ in } q'=e^{-\frac{\pi K}{K'}}$$

abeunt, eruimus:

$$\operatorname{am}\left(\frac{2K'x}{\pi},k\right)=2\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=e^x)-\tfrac{1}{2}\pi-\frac{2q'(e^x-e^{-x})}{1-q'}+\frac{2q'(e^{3x}-e^{-3x})}{3(1-q'^3)}-\ldots$$

Posito etiam $\frac{Kx}{K'}$ pro x, fit terminus generalis:

$$= \frac{2(-1)^n q'^n.\left[e^{\frac{nKx}{K'}} - e^{-\frac{nKx}{K'}}\right]}{n(1-q'^n)},$$

sive pro q' valore ejus $= e^{-\frac{\pi K}{K'}}$ scripto:

$$= \frac{2(-1)^n.e^{-\frac{nK\pi}{K'}}.\left[e^{\frac{nKx}{K'}} - e^{-\frac{nKx}{K'}}\right]}{n.\left[1-e^{-\frac{nK\pi}{K'}}\right]}$$

$$= \frac{2(-1)^n.\left[e^{\frac{nKx}{K'}} - e^{-\frac{nKx}{K'}}\right]}{n.\left[e^{\frac{nK\pi}{K'}} - 1\right]};$$

itaque:

$$g.\quad \operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = 2.\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = e^{\frac{Kx}{K'}}\right) - \tfrac{1}{2}\pi - \frac{2.\left[e^{\frac{Kx}{K'}} - e^{-\frac{Kx}{K'}}\right]}{e^{\frac{K\pi}{K'}} - 1}$$

$$+ \frac{2.\left[e^{\frac{3Kx}{K'}} - e^{-\frac{3Kx}{K'}}\right]}{3.\left[e^{\frac{3K\pi}{K'}} - 1\right]} - \dots,$$

quam seriem vel maxime convergentem esse, si excentricitas unitati appropinquat, neminem fugit.

Hujus formulae ope series illas in expressione ipsius T exstantes, quae magna excentricitate posita non satis convergunt, calculando aptiores facere possumus;

altera enim est:

$$= \int_0^x \operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}.\partial x,$$

altera vero:

$$= \int_0^x \frac{\partial.\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}}{\partial q}.\partial x.$$

Si igitur aequationem ($g.$) per ∂x multiplicamus atque deinde inter limites 0 et x integramus, postquam $\frac{\pi}{2} - x$ loco x positum est, nanciscimur valorem seriei ($\mathfrak{L}$.) §. 6.; atque si eandem aequationem ratione q differentiamus, postquam $\frac{\pi}{2} - x$ loco x positum est, deinde per ∂x multiplicamus, denique inter limites 0 et x integramus, nanciscimur valorem seriei ($f.$) §. 8.

§. 11.

Ut in universum valorem T magna excentricitate posita in seriem secundum potestates ipsius $(1-e)$ evolvamus, expressionem §. 1. $\mathfrak{F}$. IV.

rursus accipiamus: ibi fuit:

$$\partial T = \frac{m\sqrt{p}}{\sqrt{(1-ee)}}.\left[\frac{2(1+ee)}{e} + e(1+e.\cos u)\right]\frac{[1+e.\cos u].\sin u.\partial u}{[1-e.\cos u]^2\sqrt{(1-ee.\cos^2 u)}}$$
$$-\frac{3m\sqrt{p}}{\sqrt{(1-ee)}}\left[\frac{1+e.\cos u}{1-e.\cos u}\right]^2\frac{u.\partial u}{\sqrt{(1-ee\cos^2 u}}.$$

Ponamus:

$$e = 1-\delta$$
$$\text{tang}\tfrac{1}{2}u = \sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}.\text{tang}\tfrac{1}{2}(v-w) = \sqrt{\left(\frac{\delta}{2-\delta}\right)}.\tau,$$

si $\text{tang}\frac{1}{2}(v-w)$ brevitatis causa signo τ redditur.

His positis invenimus:

$$\cos u = \frac{1-\text{tang}^2\frac{1}{2}u}{1+\text{tang}^2\frac{1}{2}u} = \frac{1-\frac{1}{2}\delta(1+\tau\tau)}{1-\frac{1}{2}\delta(1-\tau\tau)},$$
$$\sin u = \frac{2\,\text{tang}\frac{1}{2}u}{1+\text{tang}^2\frac{1}{2}u} = \frac{\sqrt{(\delta(2-\delta))}.\tau}{1-\frac{1}{2}\delta(1-\tau\tau)},$$
$$1+e.\cos u = \frac{2.[(1-\frac{1}{2}\delta)^2+\frac{1}{4}\delta^2\tau\tau]}{1-\frac{1}{2}\delta(1-\tau\tau)},$$
$$1-e.\cos u = \frac{\delta(1-\frac{1}{2}\delta)(1+\tau\tau)}{1-\frac{1}{2}\delta(1-\tau\tau)},$$
$$\sqrt{(1-ee.\cos^2 u)} = \frac{\sqrt{(\delta(2-\delta))}.\sqrt{(1+\tau\tau)}.\sqrt{((1-\frac{1}{2}\delta)^2+\frac{1}{4}\delta^2\tau\tau)}}{1-\frac{1}{2}\delta(1-\tau\tau)},$$
$$\partial u = \frac{\sqrt{(\delta(2-\delta))}.\partial\tau}{1-\frac{1}{2}\delta(1-\tau\tau)},$$
$$u = 2.\text{tang}\tfrac{1}{2}u\,[1-\tfrac{1}{3}\text{tang}^2\tfrac{1}{2}u+\tfrac{1}{5}\text{tang}^4\tfrac{1}{2}u-\tfrac{1}{7}\text{tang}^6\tfrac{1}{2}u+\ldots.]$$
$$= \frac{2\sqrt{(\delta(2-\delta))}}{2-\delta}.\tau.\left[1-\tfrac{1}{3}\left(\frac{\delta}{2-\delta}\right).\tau^2+\tfrac{1}{5}\left(\frac{\delta}{2-\delta}\right)^2\tau^4-\tfrac{1}{7}\left(\frac{\delta}{2-\delta}\right)^3\tau^6+\ldots.\right].$$

Itaque habes:

$$\partial T = \frac{2mh.\sqrt{[(1-\frac{1}{2}\delta)^2+\frac{1}{4}\delta^2\tau\tau]}.\tau.\partial\tau}{\delta\delta.(1-\frac{1}{2}\delta)^2(1+\tau\tau)^2\sqrt{(1+\tau\tau)}}\left\{\frac{2}{1-\delta}+3(1-\delta)+(1-\delta)^2\frac{1-\frac{1}{2}\delta(1+\tau\tau)}{1-\frac{1}{2}\delta(1-\tau\tau)}\right.$$
$$\left.-\frac{3(2-\delta)^2}{2-\delta}\left[1+\left(\frac{\delta}{2-\delta}\right)^2\tau\tau\right].\left[1-\tfrac{1}{3}\left(\frac{\delta}{2-\delta}\right)\tau^2+\tfrac{1}{5}\left(\frac{\delta}{2-\delta}\right)^2\tau^4-\ldots.\right]\right\},$$

sive terminis et qui δ omnino non continent et qui in primam potestatem ipsius δ ducti sunt, ejectis, quia sese destruunt, in parenthesi expressio restat, quae secunda potestate ipsius δ multiplicata est, unde oritur:

$$\partial T = \frac{m.h\sqrt{[(1-\frac{1}{2}\delta)^2+\frac{1}{4}\delta^2\tau\tau]}.\tau.\partial\tau}{(1-\frac{1}{2}\delta)^2(1+\tau\tau)^2\sqrt{(1+\tau\tau)}}.\left\{\frac{(3-\delta)(2-\delta)}{1-\delta}+\tfrac{1}{2}\tau\tau\frac{(3+\tau\tau-2\delta)(2-\delta)}{1-\frac{1}{2}\delta(1-\tau\tau)}\right.$$
$$\left.-3\tau\tau.\left[(1+\tfrac{1}{5}\tau\tau)-\left(\frac{\delta}{2-\delta}\right)\tau\tau(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{7}\tau\tau)+\left(\frac{\delta}{2-\delta}\right)^2\tau^4(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{9}\tau\tau)\ldots.\right]\right\}.$$

Ut haec omnia secundum potestates ipsius δ ordinemus, advocato notationis more, e quo per P^r_m n^{tum} coefficientem binomialem evolutionis m^{tae} potestatis signamus, esse scimus:

$$\frac{(3-\delta)(2-\delta)}{1-\delta} = \Sigma.[6.P^n_{-2} + 5.P^{n-1}_{-2} + P^{n-2}_{-2}].(-\delta)^n,$$

$$\frac{\frac{1}{2}\tau\tau(3+\tau\tau-2\delta)(2-\delta)}{1-\frac{1}{2}\delta(1-\tau\tau)} = \Sigma.\Big[\tau\tau(3+\tau\tau)P^n_{-1}\frac{(1-\tau\tau)^n}{2^n} + \tau\tau(7+\tau\tau)P^{n-1}_{-1}\frac{(1-\tau\tau)^{n-1}}{2^n}$$
$$+ \tau\tau P^{n-2}_{-1}\frac{(1-\tau\tau)^{n-2}}{2^{n-2}}\Big\}.(-\delta)^n,$$

deinde terminus generalis seriei in $3\tau\tau$ multiplicatae, hic est:

$$\frac{\tau^{2m}(-\delta)^m}{2^m(1-\frac{1}{2}\delta)^m}.\Big[\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m+5}\tau\tau\Big],$$

verum ipsius $(1-\frac{1}{2}\delta)^m$ terminus generalis hic:

$$P^i_{-m}.\frac{(-\delta)^i}{2^i},$$

unde tota series fit:

$$= \Sigma P^i_{-m}\frac{\tau^{2m}}{2^{m+i}}.\Big[\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m+5}.\tau\tau\Big](-\delta)^{m+i},$$

sive ipso n pro $m+i$ scripto:

$$= \Sigma P^{n-m}_{-m}\frac{\tau^{2m}}{2^n}\Big[\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m+5}\tau\tau\Big](-\delta)^n.$$

Denique igitur habebimus:

$$\partial T = \frac{mh\sqrt{[(1-\frac{1}{2}\delta)^2+\frac{1}{4}\delta^2\tau\tau]}.\tau.\partial\tau}{(1-\frac{1}{2}\delta)^2(1+\tau\tau)^2\sqrt{(1+\tau\tau)}}.\Sigma.\Big\{6.P^n_{-1} + 5P^{n-1}_{-1} + P^{n-2}_{-1}$$
$$+\tau\tau(3+\tau\tau)P^n_{-1}\Big(\frac{1-\tau\tau}{2}\Big)^n + \tfrac{1}{2}\tau\tau(7+\tau\tau)P^{n-1}_{-1}\Big(\frac{1-\tau\tau}{2}\Big)^{n-1} + \tau\tau P^{n-2}_{-1}\Big(\frac{1-\tau\tau}{2}\Big)^{n-2}$$
$$-\frac{3\tau^{2m+2}}{2^n}\Big(\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m+5}\tau\tau\Big)P^{n-m}_{-m}\Big\}.(-\delta)^n,$$

ubi signum Σ summam omnium terminorum innuit, qui omnibus valoribus $0, 1, 2, 3 \ldots. \infty$ pro n, et omnibus valoribus $0, 1, 2, \ldots. n$ pro m positis parantur.

Cum vero valoribus ipso 2 majoribus pro n positis expressio multo magis contrahi possit, quia tum nulla coefficiens binomialis evanescit atque omnes ad potestatem -1 pertinentes $=+1$ aut $=-1$ fiunt, terminos non solum a δ non dependentes, sed etiam qui prima et secunda potestate ipsius δ sint multiplicati, a ceteris separabimus, quo facto impetratur:

$$\partial T = \frac{mh.\sqrt{[(1-\frac{1}{2}\delta)^2+\frac{1}{4}\delta^2\tau\tau]}.\tau.\partial\tau}{(1-\frac{1}{2}\delta)^2(1+\tau\tau)^2\sqrt{(1+\tau\tau)}}.\Big\{2(3+\tfrac{1}{5}\tau^6) + (1-2\tau\tau-\tau^4-\tfrac{2}{7}\tau^6)\delta$$
$$+ (2+\tfrac{1}{2}\tau^4+\tfrac{1}{3}\tfrac{6}{5}\tau^6+\tfrac{1}{8}\tau^8)\delta^2 + \Sigma\Big[2+\tau^4\Big(\frac{1-\tau\tau}{2}\Big)^{n-2}\Big(\frac{1+\tau\tau}{2}\Big)^2\Big](+\delta)^n$$
$$-3\Sigma P^{n-m}_{-m}\Big[\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m+5}\tau\tau\Big]\frac{\tau^{2m+2}}{2^n}.(-\delta)^n\Big\},$$

ubi in terminis, quibus signum Σ praefixum est, ipsi n omnes valores: $5, 4, 5, \ldots. \infty$, ipsi m omnes valores: $1, 2, 3, \ldots. n$ tribuendi sunt.

Si illi tantum termini considerantur et qui a δ non pendent et qui prima et secunda potestate ipsius δ sunt multiplicati, habemus:

$$\partial T = m.h \frac{\tau.\partial\tau}{(1+\tau\tau)^2\sqrt{(1+\tau\tau)}}.\Big[2(3+\tfrac{1}{5}\tau^4)+(7-2\tau\tau-\tfrac{3}{5}\tau^4-\tfrac{2}{7}\tau^6)\delta$$
$$+(\tfrac{15}{2}-\tfrac{5}{4}\tau\tau-\tfrac{1}{5}\tau^4+\tfrac{31}{140}\tau^6+\tfrac{1}{6}\tau^8)\delta^2,$$

igitur integratione inter limites 0 et τ instituta:

$$T = m.h.\Big[14-\frac{2(7-12\tau\tau-3\tau^4)}{(1+\tau\tau)\sqrt{(1+\tau\tau)}}+\frac{113}{105}\delta-\frac{(113-198\tau\tau+3\tau^4+10\tau^6}{105(1+\tau\tau)\sqrt{(1+\tau\tau)}}\delta$$
$$+\frac{617}{315}\delta^2-\frac{(2468-1023\tau\tau+138\tau^4+19\tau^6-42\tau^8)}{1260(1+\tau\tau)\sqrt{(1+\tau\tau)}}\delta^2.$$

Regiom. 1. Novbr. 1832.

3.

Auflösung der Aufgabe 1. S. 320. im 3ten Hefte des 8ten Bandes.

(Von Hrn. *Th. Clausen* zu München.)

„Es seien a, b, c, d die aufeinander folgenden Seiten eines Vierecks, und p, q die Diagonalen. Kann um dieses Viereck ein Kreis beschrieben werden, wenn die Bedingungsgleichung

$$pq = ac + bd$$

Statt findet?"

Es sind hier sechs Gröfsen, wovon viere, im Allgemeinen genommen, willkürlich sind; demnach können nur zwei verschiedene Gleichungen zur Bestimmung der zwei übrigen Gröfsen Statt finden. Nun giebt es aber eine Bedingungsgleichung zwischen obigen 6 Gröfsen, die in jedem Vierecke Statt finden mufs, da das Viereck durch die 5 Gröfsen völlig bestimmt ist. Es braucht also nur bewiesen zu werden, dafs die obige Bedingungsgleichung von der eben erwähnten verschieden ist. Zu dem Ende nehme ich an, dafs das Viereck unendlich wenig von einem Dreiecke verschieden, und dafs die eine Diagonale eine auf die Grundlinie gefällte Senkrechte sei; dadurch fällt die andere Diagonale mit den zwei Seiten zusammen, und es ist daher

$$q = b + c.$$

Es ist aber pq, der doppelte Inhalt des ganzen Dreiecks,

$$pq = pb + pc,$$

da nun $p \overline{\overline{<}} d$ und $\overline{\overline{<}} a$, und das Gleichheitszeichen für beide Gröfsen nicht zu gleicher Zeit Statt findet, so ist die oben angegebene Gleichung, die jedesmal, wenn dem Vierecke ein Kreis umschrieben werden kann, Statt findet, von der bei jedem Vierecke Statt findenden Gleichung verschieden. Die beiden Gleichungen sind also zur Bestimmung der zwei nicht gegebenen Gröfsen völlig hinreichend, und es können also keine andere, worin diese nicht enthalten wären, Statt finden.

4.

Mémoire sur la décomposition des fractions algebriques rationnelles.

(Suite du mémoire No. 18. tom. IX. cah. 3.)

(Par l'éditeur.)

---

§. V. Cinquième méthode. La seconde d'Euler.

14.

Les seconde, troisième et quatrième méthodes de calculer les numérateurs des fractions partielles auxquelles la fraction donnée $\frac{{}^mU}{{}^ry^\varrho \,.\, {}^sN}$ peut être égalée, exigent le calcul des racines de l'équation ${}^ry = 0$. Cela ne rend pas seulement le calcul des numérateurs pénible, mais c'est aussi une véritable imperfection. Car la possibilité du calcul des numérateurs semble être par là *dépendante* de celle de la résolution de l'équation $y = 0$. C'est ce qu'elle n'est pas; car, comme la *première* méthode des coefficiens indéterminés le fait voir, le calcul des numérateurs des fractions partielles peut être *toujours* effectué *indépendamment* de la résolution des équations de degrés supérieurs au premier, et la difficulté du calcul n'augmente pas dans *la même proportion* que celle de la résolution des équations. Cela indique qu'en appelant au secours la résolution de l'équation $y = 0$, on fait quelque chose qui est *étranger* à la question.

Il y a donc à désirer une autre méthode plus expéditive que la *première*, mais, comme elle, *indépendante* de la *résolution des équations supérieures*.

Euler a donné le premier une telle méthode dans le mémoire cité plus haut. Voici en quoi elle consiste.

15.

1. Suivant le (§. 6.) on peut supposer

$$122. \quad \frac{{}^mU}{{}^ry^\varrho \,.\, {}^sN} = \frac{{}^{r-1}w}{{}^ry^\varrho} + \frac{{}^{n-r-1}Z}{{}^ry^{\varrho-1}\, {}^sN},$$

ou bien aussi, si l'on veut réunir en un seul terme les ϱ premiers termes à droite dans (53.),

$$123. \quad \frac{{}^{m}U}{{}^{r}y^{\varrho}\,.\,{}^{s}N} = \frac{{}^{r\varrho-1}W}{{}^{r}y^{\varrho}} + \frac{{}^{s-1}Z}{{}^{s}N}.$$

Multipliant (122. et 123.) par ${}^{r}y^{\varrho}\,.\,{}^{s}N$, elles donnent

$$124. \quad {}^{m}U = {}^{r-1}w\,.\,{}^{s}N + {}^{n-r-1}Z\,.\,{}^{r}y \text{ et}$$

$$125. \quad {}^{m}U = {}^{r\varrho-1}W\,.\,{}^{s}N + {}^{s-1}Z\,.\,{}^{r}y^{\varrho},$$

et de là on tire

$$126. \quad {}^{r-1}w = \frac{{}^{m}U - {}^{n-r-1}Z\,.\,{}^{r}y}{{}^{s}N} \text{ et}$$

$$127. \quad {}^{r\varrho-1}W = \frac{{}^{m}U - {}^{s-1}Z\,.\,{}^{r}y^{\varrho}}{{}^{s}N}.$$

II. Si dans ces expressions on fait

$$128. \quad {}^{r}y = 0 \quad \text{et} \quad {}^{r}y^{\varrho} = 0,$$

elles se réduisent à

$$129. \quad {}^{r-1}w = \frac{{}^{m}U}{{}^{s}N} \text{ et}$$

$$130. \quad {}^{r\varrho-1}W = \frac{{}^{m}U}{{}^{s}N}.$$

III. En donnant à x les $r-1$ valeurs différentes exprimées par la première des équations (128.), on tombe dans le calcul des méthodes précédentes et dans toutes leurs difficultés. Pour les éviter **Euler** se sert des équations (128.), non pour chasser *tous* les x des quantités U et N dans (129. et 130.) *mais seulement pour en éliminer les puissances de x supérieures respectivement à la $r-1^{me}$ et à la $r\varrho-1^{me}$.*

IV. Il fait cela en tirant des équations

$$131. \quad {}^{r}y = x^{r} + \tau_1 x^{r-1} + \tau_2 x^{r-2} \ldots\ldots + \tau_r = 0,$$

$$132. \quad {}^{r}y^{\varrho} = x^{r\varrho} + \eta_1 x^{r\varrho-1} + \eta_2 x^{r\varrho-2} \ldots\ldots + \eta_{r\varrho} = 0,$$

les *plus hautes* puissances de x. Ces équations donnent

$$133. \quad x^{r} = -(\tau_1 x^{r-1} + \tau_2 x^{r-2} \ldots\ldots + \tau_r)$$

$$134. \quad x^{r\varrho} = -(\eta_1 x^{r\varrho-1} + \eta_2 x^{r\varrho-2} \ldots\ldots + \eta_{r\varrho}),$$

et l'on voit aisément qu'à l'aide de ces formules, on peut exprimer *toutes* les puissances de x supérieures à la $r-1^{me}$ et à la $r\varrho-1^{me}$, par les puissances inférieures de cette quantité. Par exemple l'équation (133.) donne

$$x^{r+1} = -(\tau_1 x^{r} + \tau_2 x^{r-1} \ldots\ldots + \tau_r x),$$

ou bien

$$135. \quad x^{r+1} = \begin{cases} +\tau_1^2 x^{r-1} + \tau_1\tau_2 x^{r-2} + \tau_1\tau_3 x^{r-3} \ldots\ldots + \tau_1\tau_r \\ -\tau_2 x^{r-1} - \tau_3 x^{r-3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \tau_r x, \end{cases}$$

et ainsi de suite.

V. On peut donc réduire les expressions (129. et 130.) à d'autres de la forme

$$136. \quad {}^{r-1}w = \frac{{}^{r-1}\overset{1}{U}}{{}^{r-1}\overset{1}{N}},$$

$$137. \quad {}^{r\varrho-1}W = \frac{{}^{r\varrho-1}\overset{2}{U}}{{}^{r\varrho-1}\overset{2}{N}},$$

qui ne contiennent plus des puissances de x *supérieures* à la $r-1^{\text{me}}$ ou à la $r\varrho-1^{\text{me}}$, ni dans le numérateur ni dans le dénominateur.

VI. Mais les expressions (136. et 137.) de w et W sont *fractionnaires;* cependant elles doivent être nécessairement *entières* (122. et 123.). Donc il s'agit encore de les transformer en d'autres qui, dans leurs *dénominateurs*, ne présentent que des quantités indépendentes de x. Euler donne deux méthodes différentes pour effectuer cette transformation.

VII. *La première méthode* s'exécute à l'aide de l'équation

$$138. \quad \frac{p}{q} = \frac{r}{s} = \frac{\alpha p - \beta r}{\alpha q - \beta s}.$$

Cette équation est *identique*, car elle donne en multipliant par croix

$$139. \quad \begin{cases} \alpha pq - \beta ps = \alpha pq - \beta rq, & \text{ou bien } ps = rq, \\ \alpha rq - \beta rs = \alpha ps - \beta rs, & \text{ou bien } rq = ps, \end{cases}$$

comme cela doit être.

VIII. Cela posé, multiplions par ex. dans (136.) ${}^{r-1}U$ et ${}^{r-1}N$ par x, ce qui ne changera pas la valeur de ${}^{r-1}w$, et éliminons des produits à l'aide de l'équation (133.) la puissance x^r, nous aurons une *seconde* expression de ${}^{r-1}w$ différente de celle (136.) mais semblable à elle en ce que x ne s'élève pas non plus au dessus de la puissance x^{r-1} ni dans le numérateur ni dans le dénominateur.

Traitons la *seconde* expression de ${}^{r-1}w$ précisément de la même manière que la première, et nous aurons une *troisième* expression semblable de ${}^{r-1}w$.

Continuons de cette manière en calculant $r-1$ différentes expressions de ${}^{r-1}w$ qui toutes ne contiendront quelque puissance de x supérieure à la $r-1^{\text{me}}$ ni dans le numérateur ni dans le dénominateur.

IX. Toutes ces formules, exprimant la même quantité ${}^{r-1}w$, seront des fractions de valeur *égale*, comme l'étaient ci-dessus celles $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ (138.). Donc on pourra y appliquer l'équation (138.). Multiplions donc la *première* expression de ${}^{r-1}w$, que nous représenterons par $\frac{p}{q}$, en haut et en bas par le coefficient α dont x^{r-1} dans le *dénominateur* de la *se-*

sonde expression $\frac{r}{s}$ est affecté, et réciproquement la *seconde* expression $\frac{r}{s}$ de ${}^{r-1}w$ en haut et en bas par le coefficient β de x^{r-1} dans le *dénominateur* de la *première* expression $\frac{p}{q}$, nous aurons deux expressions de ${}^{r-1}w$ dans les dénominateurs desquelles x^{r-1} aura *le même* coefficient. Maintenant les deux expressions $\frac{\alpha p}{\alpha q}$ et $\frac{\beta r}{\beta s}$ égales entre elles, seront aussi en vertu de (138.) égales à $\frac{\alpha p - \beta r}{\alpha q - \beta s}$. Mais le coefficient de x^{r-1} dans le dénominateur αq de la fraction $\frac{\alpha p}{\alpha q}$ étoit *égal* à celui de x^{r-1} dans le dénominateur βs de la fraction $\frac{\beta r}{\beta s}$, dont la puissance x^{r-1} sera *détruite* dans l'expression $\frac{\alpha p - \beta r}{\alpha q - \beta s}$ et nous aurons transformé les deux expressions $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ de ${}^{r-1}w$ en une autre $\frac{\alpha p - \beta r}{\alpha q - \beta s}$ *où x ne s'élève plus qu'à la puissance x^{r-2} dans le dénominateur.*

X. Combinons de cette manière deux à deux toutes les $r-1$ différentes expressions de ${}^{r-1}w$ trouvées (VIII.), et nous en tirerons $r-2$ différentes expressions équivalentes de ${}^{r-1}w$ qui toutes *ne contiendront dans le dénominateur aucune puissance de x supérieure à la $r-2^{me}$.*

XI. Combinons de nouveau deux à deux ces $r-2$ expressions et nous trouverons $r-3$ expressions de ${}^{r-1}w$ dans les dénominateurs desquelles *x ne s'élève qu'à la puissance $r-3$.*

XII. En continuant ce calcul, où il y a encore à observer que les facteurs communs au numérateur et au dénominateur, quand il s'en présente, *ne doivent pas être supprimés*, on voit qu'on finira par arriver à *une* expression de ${}^{r-1}w$ qui n'a aucun x dans le dénominateur, et cette expression est celle qu'on à desirée (VI.).

XIII. *La seconde méthode* part de la proposition, que si U, N et y sont trois polynomes quelconques de x, il existe toujours un polynome M de x qui, étant pris pour multiplicateur de U et N, réduit la fraction $\frac{U}{N}$ à la forme

$$140.\quad \frac{U}{N} = \frac{UM}{NM} = \frac{Py+K}{Qy+C},$$

où C ne contient plus x, de sorte qu'à l'aide du multiplicateur M on pourra transformer sur le champ les expressions de ${}^{r-1}w$ et ${}^{r,t-1}W$ en

d'autres de la forme $\frac{Py+K}{Qy+C}$ et $\frac{Py^\varrho+K}{Qy^\varrho+C}$ qui pour $y=0$ et $y^\varrho=0$ se réduisent à

$$141. \quad \frac{U}{N} = \frac{K}{C} = {}^{r-1}w \text{ ou } {}^{r\varrho-1}W,$$

expression qui a la forme demandée, puisqu'elle ne contient plus x dans le dénominateur.

XIV. Il s'agit de trouver le multiplicateur M. Pour cela Euler donne la règle suivante." Soit $N = Qy + L_0$; développez $\frac{y}{L_0}$ en *fraction continue*, en vous arrêtant aussitôt que se présente un reste indépendant de x. Calculez la valeur en x de cette fraction continue après y avoir supprimé la dernière partie fractionnaire, et le *numérateur* de la fraction que vous trouverez sera le multiplicateur cherché."

XV. Ayant trouvé par l'une ou l'autre des deux méthodes les expressions polynomes *entières* de ${}^{r-1}w$ ou ${}^{r\varrho-1}W$ (129. et 130.) les équations (124. et 125.) donneront

$$142. \quad {}^{n-r-1}Z = \frac{{}^mU - {}^{r-1}w \cdot {}^sN}{{}^ry} \text{ et}$$

$$143. \quad {}^{s-1}Z = \frac{{}^mU - {}^{r\varrho-1}W \cdot {}^sN}{{}^ry^\varrho},$$

et ayant calculé Z suivant ces équations, on peut décomposer ultérieurement les fractions $\frac{{}^{n-r-1}Z}{{}^ry^{\varrho-1}\cdot{}^sN}$ et $\frac{{}^{s-1}Z}{{}^sN}$ par le même procédé qu'on a appliqué à $\frac{{}^mU}{{}^ry^\varrho\cdot{}^sN}$. Ou bien on peut tirer directement de $\frac{{}^mU}{{}^ry^\varrho\cdot{}^sN}$ le numérateur Z de le seconde fraction partielle (122. et 123.) par la même opération qui a donné le numérateur w ou W de la première fraction partielle. C'est ce que fait Euler.

16.

Voici en quoi consiste la méthode d'Euler qui, comme on voit, évite en effet la résolution de l'équation $y=0$ et qui pour cela est déjà préférable aux méthodes décrites ci-dessus.

Les règles et préceptes que donne Euler sont parfaitement bons et exacts, mais il faut avouer que l'illustre auteur a presque entièrement supprimé les *démonstrations* de ses règles.

D'abord on ne voit pas par quel droit on puisse supposer arbitrairement $y=0$, *sans donner à tous les x qui entrent en calcul les va-*

leurs déterminées que fixe l'équation supposée (No. 15. III.). C'est autre chose dans les trois méthodes précédentes. Il est vrai qu'on y suppose également $y = 0$, mais on donne effectivement à *tous* les x les valeurs déterminées par l'équation supposée. Euler se contente de *dire* (§. 7. de son mémoire) que si l'on fait $y = 0$, les expressions (126. et 127.) se réduisent à celles (129. et 130.) et qu'il ne reste qu'à transformer ces expressions *fractionnaires* en formules *entières*. Mais il paroît que l'exactitude des résultats qu'on trouve par cette élimination *non totale* mais seulement *partielle*, de x, a besoin d'être verifiée.

En second lieu, pour faire voir l'existence du multiplicateur M (§. 15. XIII.) propre à donner à une fraction $\frac{U}{N}$ la forme $\frac{Py+K}{Qy+C}$, Euler a recours à la méthode des coefficiens indéterminés. Mais cette méthode ne paraît pas offrir de démonstration rigoureuse, parcequ'on n'est pas sûr que parmi les équations déterminantes il n'y en ait pas d'identiques.

En troisième lieu les *considérations* sur lesquelles Euler fonde sa *règle* de trouver le multiplicateur M (§. 15. XIV.) semblent être plutôt spécieuses que propres à servir de fondemens d'une démonstration rigoureuse. Voici comment il s'exprime sur ce sujet:

„§. 16. Postquam perventum fuerit ad aequalitatem $\frac{U}{N}$, (nous mettons nos signes, mais nous copions les mots d'Euler) ubi omnes ipsius x potestates jam sint minores quam in ipso denominatore y, singularis se mihi obtulit via, multiplicatorem illum supra memoratum eruendi, qui si litera M designetur, habebimus $w = \frac{U.M}{N.M}$. Jam quia requiritur ut posito $y = 0$ iste denominator evadat quantitas constans, hoc eveniet statuendo $NM = yQ + C$. Sic enim ratione habita aequationis $y = 0$, utique fiet $w = \frac{UM}{C}$; sicque ista littera per functionem integram ipsius x exprimetur, postquam scilicet ex numeratore UM altiores potestates fuerint exclusae."

„§. 17. Nunc ad istas quantitates M et Q inveniendas, evidens est, si quantitas variabilis x *ut infinita spectetur*, tum fore $NM = yQ$, ideoque $\frac{M}{Q} = \frac{y}{N}$; unde patet, fractionem $\frac{M}{Q}$ *proxime aequalem* esse debere fractioni $\frac{y}{N}$. *Hic igitur in subsidium vocare conveniet* eandem opera-

tionem, quae in numeris institui solet quando fractione quacunque proposita alia ipsi *proxime aequalis* quaeritur. Simili enim modo, quantitate y per N divisa, residuum sumatur pro divisore, praecedens vero divisor pro dividendo; hocque modo procedatur, donec ad quotos fractos perveniatur, in quorum scilicet denominatore ipsa quantitas x insit. Tum enim si more solito ex quotis repertis fractiones formentur, ea quae ultimo quoto integro respondet, nobis exhibebit ipsam fractionem $\frac{M}{Q}$, ex qua deinceps, numeratoribus et denominatoribus seorsim aequatis, numerator w facili negotio eruitur."

Certes on ne voit pas par quel droit on puisse supposer $x = \infty$ et après tirer quelques conclusions de l'expression $\frac{y}{N}$. La quantité $\frac{y}{N}$ est zéro ou infinie pour $x = \infty$, selon que le degré de x dans N est plus grand ou plus petit que celui dans y, et une quantité zero ou infinie ne peut être regardée comme *rapprochée* d'une autre. Et même si cela était, on ne voit pas, quelle ressemblance il y a entre les quantités en question et les fractions en nombres. Il est vrai que, en développant en fraction continue une fraction en nombres, la dernière fraction *convergente* est *moins différente* de la fraction proposée qu'aucune autre fraction en nombres *plus petits*. Mais ici il ne s'agit pas de la *grandeur* des quantités. Elles sont plutôt *indeterminées*, et x peut même être regardé comme variable. Il ne s'agit que de la *dépendance* ou de *l'indépendance* de x des autres quantités. Il paraît donc que la ressemblance du cas actuel avec celui des fractions continues en nombres, n'est pas telle qu'on puisse y fonder la règle énoncée. Le cas actuel paraît être un de ceux qui ne sont pas rares dans les ouvrages d'Euler, où ce grand homme, au lieu de calculer et de démontrer les résultats, les a pour ainsi dire plutôt devinés ou pressentis par une sorte d'inspiration mathématique.

Pour justifier et verifier l'excellente méthode d'Euler, il reste donc à *démontrer* rigoureusement ses règles. C'est ce qui se peut faire effectivement et que nous ferons. Je me suis déjà occupé autrefois d'une partie de ces démonstrations dans un mémoire lu à l'académie des sciences de Berlin le 24. fevrier 1831: mais je vais reprendre ici cette tâche, en essayant de perfectionner et de compléter ce qu'il y a à faire.

17.

Nous commencerons par démontrer la proposition (No. 15. XIII.) savoir que,

si ${}^mU$, ${}^sN$ et ${}^ry$ sont trois polynomes quelconques de x, il existe toujours un polynome M de x, qui étant pris pour multiplicateur de U et N, réduit la fraction $\frac{{}^mU}{{}^sN}$ à la forme $\frac{{}^mU}{{}^sN} = \frac{{}^mUM}{{}^sNM} = \frac{P.{}^ry+K}{Q.{}^ry+{}^\circ C}$, où C ne contient point x.

I. Il est clair qu'il ne s'agit que de démontrer qu'il existe toujours un multiplicateur M pour un polynome quelconque donnée ${}^sN$ qui donne

$$144. \quad M.{}^sN = Q.{}^ry + {}^\circ C,$$

où ${}^\circ C$ ne contient point x. Car en multipliant ${}^mU$ par le même polynome M, on aura

$$145. \quad M.{}^mU = P.{}^ry + K,$$

où le degré de K est entre 0 et r, et la fraction $\frac{MU}{MN}$ est identiquement égale à la fraction donnée $\frac{U}{N}$.

II. Supposons donc ${}^sN$ divisé par ${}^ry$, on pourra écrire généralement

$$146. \quad {}^sN = Q_0.{}^ry + {}^\lambda L_0.$$

Si s est $>r$, λ sera entre 0 et r, et si $s<r$, λ sera $=s$.

III. Multiplions ${}^\lambda L_0$ par une puissance x^{v_1} de x propre à introduire dans $x^v.{}^\lambda L_0$ la puissances x^r de x. Divisons ensuite le produit $x^r.{}^\lambda L_0$ par ${}^ry$, on aura

$$147. \quad x^v.{}^\lambda L_0 = q_0.y + {}^{\lambda_1}L_1.$$

Si peut-être λ^1 n'était pas $=r-1$, mais inférieur à $r-1$ (λ_1 ne peut être plus grand que $r-1$), il n'y a qu'à multiplier (142.) encore par $x^{r-1-\lambda_1}$ pour avoir

$$148. \quad x^{v_1}.{}^\lambda L_0 = \overset{1}{q}_0.{}^ry + {}^{r-1}L_1,$$

v_1 étant $= +v-1-\lambda_1$.

On peut donc toujours faire ensorte que ${}^\lambda L_0$ multiplié par une puissance convenable x^{r_1} de x ait la forme $\overset{1}{p}_0.{}^ry + {}^{r-1}L_1$, où L contient *nécessairement* la puissance x^{r-1} de x.

IV. Cela posé, multiplions (146.) par x^{v_1}, nous aurons

$$149. \quad x^{v_1}.{}^sN = Q_0x^{v_1}.{}^ry + {}^\lambda L_0x^{v_1}.$$

En y substituant (148.), on aura

$$150. \quad x^{v_1}.{}^sN = (Q_0x^{v_1} + \overset{1}{q}_0){}^ry + {}^{r-1}L_1$$

et en écrivant Q_1 au lieu de $Q_0 . x^{\nu_1} + \overset{1}{q}_0$,

$$151. \quad x^{\nu_1} . {}^sN = Q_1 . {}^ry + {}^{r-1}L_1,$$

où la partie ${}^{r-1}L_0$ non comprise sous le produit $Q_1 . y$ renfermera *nécessairement* la puissance x^{r-1} de x.

V. Multiplions de nouveau ${}^{r-1}L_1$ par x et divisons le produit $x . {}^{r-1}L_1$ par ${}^ry$, nous aurons

$$152. \quad x . {}^{r-1}L_1 = q_1 . {}^ry + {}^{\lambda_2}L_1.$$

Si λ_2 étoit inférieur à $r-1$ (il n'y peut être supérieur) il n'y a qu'à multiplier (152.) par $x^{r-1-\lambda_2}$ pour avoir

$$153. \quad x^{\mu_1} . {}^{r-1}L_1 = \overset{r}{q}_1 . {}^ry + {}^{r-1}L_2,$$

où $\mu_1 = 1 + r - 1 - \lambda_2 = r - \lambda_2$.

Multiplions maintenant (151.) par L^1 on aura un produit de la forme

$$154. \quad x^{\nu_2} . {}^sN = Q_1 . x^{\mu_1} . {}^ry + {}^{r-1}L_1 . x^{\mu_1},$$

où $v^2 = v_1 + \mu_1$, et en y subsistant (153.)

$$154.^* \quad x^{\nu_2} . {}^sN = (Q_1 . x^{\mu_1} + \overset{3}{q}_1) y + {}^{r-1}L_2.$$

Ecrivant enfin Q_2 au lieu de $Q_1 . x^{\mu_1} + \overset{3}{q}_1$, on aura

$$155. \quad x^{\nu_2} . {}^sN = Q_2 . {}^ry + {}^{r-1}L_2,$$

où ${}^{r-1}L_2$ renfermera *nécessairement* la puissance x^{r-1} de x.

VI. Voilà donc deux expressions différentes (151. et 155.) qui toutes les deux ont à gauche ${}^sN$ pour facteur, et à droite une partie affectée du facteur ${}^ry$ et une autre renfermant *nésessairement* la puissance x^{r-1} de x.

VII. En opérent de nouveau sur l'expression (155.) précisément de la même manière qu'on là fait sur l'expression (151.) on aura une *troisième* expression semblable aux deux précédentes, et en réitérant l'opération sur celle-ci, une quatrième etc.

Ayant répété $n-1$ fois l'opération indiquée on aura $r-1$ expressions différentes de la forme

$$156. \quad x^{\nu} . {}^sN = (Q) {}^ry + {}^{r-1}(L).$$

VII. Soit α_1 le coefficient de x^{r-1} dans ${}^{r-1}L_1$ (151.) et α_2 celui de x^{r-1} dans ${}^{r-1}L_2$ (155.). Multiplions (151.) par α_2 et (155.) par α_1 et soustrayons les produits, nous aurons une expression de la forme

$$157. \quad (\alpha_2 . x^{\nu_2} - \alpha_1 . x^{\nu_1}) {}^sN = {}_1Q_1 . {}^ry + {}^{r-2}_{\ 1}L_1,$$

la puissance x^{r-1} ayant été éliminée de la partie L.

IX. Combinant de cette sorte les $r-1$ expressions (156.) deux à deux, nous aurons $r-2$ expressions de la forme

$$157. \quad m_1 . {}^sN = ({}_1Q) . {}^ry + {}^{r-2}(L),$$

où m_1 est un polynome de x et où dans la partie L la quantité x ne s'élève qu'à la puissance x^{r-2}.

X. Combinons de nouveau deux à deux les $r-2$ expressions (157.) en multipliant la première des deux par le coefficient de x^{r-2} dans la partie L de la seconde et celle-ci par le coefficient de x^{r-2} dans la partie L de la première, nous aurons $r-3$ expressions de la forme

$$157.^* \quad m_2 . {}^sN = ({}_2Q){}^ry + {}^{r-3}(L).$$

XI. En continuant ces combinaisons, il est clair qu'on arrivera enfin à une expression qui, dans la partie L, ne contient plus x et qui est de la forme

$$158. \quad M . {}^sN = Q . {}^ry + {}^oC,$$

forme égale à celle (144.).

XII. Il a donc été démontré qu'il existe toujours un polynome M de x qui, multiplié par le polynome donnée ${}^sN$, produit une quantité $M . {}^sN$ de la forme $Q . {}^ry + {}^oC$.

XIII. Si donc on multiplie par ce même polynome M l'autre polynome donné ${}^mU$, ce qui donnera un produit de la forme

$$159. \quad M . {}^mU = P . {}^ry + K,$$

la fraction proposée $\frac{{}^mU}{{}^sN}$ sera réduite à la forme

$$160. \quad \frac{{}^mU}{{}^sN} = \frac{M . {}^mU}{M . {}^sN} = \frac{P . {}^ry + K}{Q . {}^ry + {}^oC},$$

où ${}^oC$ ne contient plus x_1. C'est ce qu'il s'agissait de vérifier

XIV. On verra plus bas (20. XIII.) qu'une autre démonstration de l'existence du multiplicateur M est contenue dans celle de la règle donnée par Euler pour le calcul du multiplicateur même.

18.

Maintenant nous démontrerons

qu'on trouve, par ex. dans (122.), la valeur de w en x si, suivant les règles d'Euler, on élimine d'abord de U et N, au moyen de l'équation $y = 0$, les puissances de x supérieures à la $r-1^{me}$ et si ensuite on chasse, par ex. à l'aide du procédé (§. 15. VII. — XII.), x absolument du dénominateur de la fraction qu'on a d'abord obtenue.

I. Ayant démontré (§. 17.) qu'il existe toujours un polynome M qui donne

$$161. \quad \begin{cases} M . {}^mU = Py + K \text{ et} \\ M . {}^sN = Qy + {}^oC, \end{cases}$$

où ${}^{\circ}C$ ne contient pas x, nous pourrons au lieu de l'équation

$$162. \quad \frac{{}^{m}U}{{}^{s}N} = {}^{r-1}w + \frac{{}^{n-r-1}Z.{}^{r}y}{{}^{s}N},$$

qu'on tire de (122.) en multipliant par ${}^{r}y^{\varrho}$, écrire l'expression suivante:

$$163. \quad \frac{{}^{m}U.M}{{}^{s}N.M} = \frac{Py+{}^{r-1}K}{Qy+{}^{\circ}C} = {}^{r-1}w + \frac{{}^{n-r-1}Z.{}^{r}y.M}{{}^{s}N.M}.$$

II. Multipliant cette équation par $Qy+{}^{\circ}C = M.{}^{s}N$ (161.), on aura

$$164. \quad Py+K = {}^{r-1}w(Qy+{}^{\circ}C)+ZyM,$$

et de là on tire

$$165. \quad (P-{}^{r-1}wQ-ZM)\,{}^{r}y = {}^{r-1}w.{}^{\circ}C-{}^{r-1}K.$$

III. Le terme à gauche de cette équation est *divisible* par ${}^{r}y$; il faut donc que le terme ${}^{r-1}w.{}^{\circ}C-{}^{r-1}K$ le soit également. Mais cela est impossible, à moins que ${}^{r-1}w.{}^{\circ}C-{}^{r-1}K$ ne soit zéro; car K est tout au plus du degré $r-1$, C est du degré 0 et w est du degré $r-1$ tout au plus, comme le fait voir l'équation (5.) démontrée ci-dessus. Donc le dividende ${}^{r-1}w.{}^{\circ}C-{}^{r-1}K$ est tout au plus du degré $r-1$; le diviseur ${}^{r}y$ au contraire est du degré r, et il est impossible qu'un polynome en x du degré $r-1$ soit *divisible* par un autre polynome du degré r. Il faut donc que ${}^{r-1}w.{}^{\circ}C-{}^{r-1}K$ *soit zéro* et cela donne

$$166. \quad {}^{r-1}w = \frac{{}^{r-1}K}{{}^{\circ}C}.$$

Voilà la véritable valeur de ${}^{r-1}w$. On voit que cette valeur s'exprime par les *restes* de la division de MU et MN par y seulement, qui suivant les formules (163.) ou (160.) sont K et ${}^{\circ}C$. Les *quotiens* de la division, qui sont P et Q, n'y influent pas.

IV. Cela posé, remarquons que nous somme parvenus de N à $Qy+{}^{\circ}C = MN$ (160.) en *divisant* d'abord N par y; cela nous a donné le *reste* L_0 (146.) ensuite nous avons formé d'autres expressions de la forme $(Q)y+(L)$, en multipliant par des puissances de x et en *divisant* toujours par y. Ces expressions, en les combinant par la soustraction ou addition, nous ont enfin conduit à l'expression $MN = Qy+{}^{\circ}C$, et en *divisant* MU également par y, à l'expression finale $\frac{Py+K}{Qy+{}^{\circ}C}$ de $\frac{U}{N}$. C'est donc *la division par y* des numérateurs et dénominateurs d'une expression fractionnaire identique avec $\frac{U}{N}$ qui nous a fourni l'expression finale.

V. Mais il est clair que s'il ne s'agit que du *reste* de la division d'un polynome quelconque en x, T par exemple, par un autre polynome

${}^{r}y$ de degré r, comme dans notre cas, on trouvera le même résultat si, au lieu de diviser T par y, on élimine de T, au moyen de l'équation $y=0$ *supposée arbitrairement*, les puissances de x supérieures à la $r-1^{me}$. En effet, si l'on désigne par p le *quotient* de la division de T par y et par R le reste, on peut exprimer T par

$$167. \quad T = p.{}^{r}y + {}^{r-1}R.$$

Cette expression se réduit à $T_1 = {}^{r-1}R$ si l'on fait $y=0$; donc aussi T se réduira à ${}^{r-1}R$ si on le combine avec l'équation $y=0$ en en éliminant, au moyen de cette équation, les puissances de x supérieures à la $r-1^{me}$.

VI. Donc si au lieu des *divisions* à faire dans les opérations ci-dessus, pour trouver $Py+K=MU$ et $Qy+{}^{r}C=MN$, et dont le resumé a été énoncé (IV.) on se sert autant de fois de *l'élimination* des puissances de x supérieures à la $r-1^{me}$ au moyen de l'équation ${}^{r}y=0$, en conservant d'ailleurs tous les autres calculs, on aura encore les *mémes restes* pour résultats. Ayant donc chassé tous les x du dénominateur de l'expression identique de $\frac{U}{N}$, on aura pour résultats finals les *mêmes restes* ${}^{r-1}K$ et ${}^{s}C$ qu'on a trouvés par les procédés ci-dessus. Et puisque ces restes, comme il a été demontré plus haut, donnent la véritable valeur $\frac{K}{C}$ de w (166.), on trouvera aussi cette véritable valeur en se servant de l'élimination partielle de x au lieu de la division, comme le fait Euler. Donc le procédé d'Euler est justifie par là.

19.

On peut encore justifier directement ce procédé d'Euler par la réflexion suivante.

I. L'équation

$$168. \quad \frac{{}^{m}U}{{}^{s}N} = {}^{r-s}w + \frac{{}^{n-r-1}Z.{}^{r}y}{{}^{s}N} \quad (162.)$$

est supposée avoir lieu pour une valeur *quelconque* de x, et de sorte que les *coefficiens* des différents polynomes U, N, w, Z, y de x qui s'y présentent, comme étant regardées *indépendants* de x, doivent conserver les *mêmes* valeurs pendant que la valeur de x varie.

II. On peut donc donner à x toute valeur qu'on voudra, sans que celles des *coefficiens* changent; et les valeurs des coefficients *indéterminés* de w et Z qu'on trouve avoir lieu pour quelque valeur *déterminée* de x, auront lieu également pour *toute autre* valeur de x.

III. Par exemple on peut supposer $x = 0$. Cela donnera une équation entre les coefficiens de x^0 dans les différents polynomes. Et les valeurs de ces coefficients, qu'on pourroit tirer de cette équation, auraient lieu également pour une valeur quelconque de x. Elles seraient les valeurs que les coefficiens de x^0 ont effectivement dans l'équation (168.).

IV. Maintenant tout le problème se réduit à celui de trouver les *coefficiens indéterminés ou inconnus* des deux polynomes w et Z, car, ces coefficiens étant déterminés, la décomposition demandée de la fraction proposée $\frac{U}{N}$ est consommée. Il ne s'agit donc que d'assigner à x quelque valeur qui puisse conduire à ce but.

V. La valeur 0 de x, prise pour exemple en (III.), n'est pas généralement propre à cela, car si w et Z contiennent la puissance x^0 de x tous les deux, on n'aura qu'une seule équation entre les deux coefficiens inconnus de x^0 dans w et Z. Et d'ailleurs cette valeur de x ne donne pas en même tems quelque relation entre les coefficiens des autres puissances de x.

Dans les méthodes de décomposition des fractions ci-dessus (No. 2. 3. 4.) on donne à x les r différentes valeurs déterminées, que prescrit l'équation $y = 0$ supposée arbitrairement. On en tire effectivement les valeurs de tous les coefficiens indéterminés, parcequ'on a autant d'équations déterminantes qu'il y a de coefficiens inconnus *dans* ${}^{r-1}w$, l'autre terme $\frac{Zy}{N}$ à gauche dans (171.) étant zéro à cause de $y = 0$. Mais ce moyen à l'inconvient de necessiter la résolution de l'équation $y = 0$, pour avoir les valeurs de x déterminées qu'elle prescrit, et après le calcul des imaginaires qui peuvent se présenter.

VII. Au lieu de cela on vient directement au but en supposant encore arbitrairement ${}^{r}y = 0$, ce qui réduit d'abord l'équation (168.) à

$$169. \quad \frac{{}^{m}U}{{}^{s}N} = {}^{r-1}w,$$

mais en éliminant ensuite des polynomes U, N, w *seulement les puissances de x supérieurs a la* $r-1^{me}$, au lieu d'en chasseur *tous* les x. L'expression de $\frac{U}{N}$ qu'on aura trouvé en chassant de U et N les puissances de x supérieures à la $r-1^{me}$ au moyen de l'équation ${}^{r}y = 0$ se présentera d'abord sous une forme *fractionnaire*; mais aussitôt qu'on sera parvenu à la transformer en une autre *entière* du degré $r-1$, encore au

moyen de l'équation $y = 0$, ce qui se fait par le procédé (§. 14. VII. XII.), cette expression, dont tous les coefficiens sont connus, sera celle de ${}^{r-1}\omega$ même, qui est également du degré $r-1$. Donc on aura trouvé d'un seul coup tous le coefficiens de ${}^{r-1}\omega$ qui étaient inconnus et qu'on cherchait. Il est vrai que dans l'expression finale, ainsi que déjà dans celle (172.), x ne peut avoir que les valeurs *déterminées* qui conviennent à l'équation $y = 0$, et non une valeur quelconque. Mais cela ne diminue en rien l'exactitude du résultat, puisque les mêmes valeurs des coefficients des polynomes dans (168.) qui conviennent à quelques valeurs *déterminées* de x, conviennent également, comme nous l'avons remarqué (I.) à toute autre valeur.

VIII. Le procède d'Euler se trouve comme on voit également, justifié par les reflexions précédentes, et ce sont peut être elles qu'Euler a eues en vue sans les énoncer. Mais d'ailleurs la démonstration actuelle de sa méthode, quoique beaucoup plus succincte, semble être moins élémentaire que celle (§. 17. et 18.).

20.

Nous venons à la démonstration de la règle du calcul du multiplicateur M propre à transformer une fraction donnée $\frac{{}^mU}{{}^nN}$ en $\frac{M.{}^mU}{M.{}^nU} = \frac{Py+K}{Qy+{}^0C}$, où C ne contient plus x, règle donnée par Euler et énoncée (§. 15. XIV.)

I. Divisons d'abord ${}^mU$ et ${}^nN$ par ${}^ry$ et supposons

$$170. \quad {}^mU = P_0 . {}^ry + {}^{\varkappa}K_0,$$

$$171. \quad {}^nN = Q_0 . {}^ry + {}^{\lambda}L_0.$$

Il est clair que les degrés $\varkappa$ et λ des *restes* K_0 et L_0 seront toujours moindres que les degré r du diviseur y, au moins d'une unité. Donc on peut supposer

$$172. \quad y = {}_mL_0 + R_0,$$

où m et R_0 seront des polynomes en x.

II. Mais le degré du reste R_0 est de nouveau nécessairement inférieur à celui de L_0, au moins d'une unité; donc on peut supposer

$$173. \quad L_0 = rR_0 + R_1$$

Ici le degrè de R_1 est inférieur à celui de R_0, au moins d'une unité, et on aura

$$174. \quad R_0 = r_1 . R + R_2.$$

En continuant on pourra supposer

$$175. \quad \begin{cases} R_1 = r_2 . R_2 + R_3 \\ R_2 = r_3 . R_3 + R_4 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

et généralement

$$176. \quad R^{n-1} = r_n . R_n + R_{n+1}.$$

III. Les dégrés des restes R_0, R_1, R_2.... diminuant toujours au moins d'une unité, il faut nécessairement qu'on arrive enfin à un reste *dont le degré soit zéro*, c'est-à-dire *indépendant de x*. Nous supposons que R_{n+1} soit ce reste.

IV. Cela posé les expressions (172. et 173.) donnent

$$177. \quad \frac{y}{L_0} = \frac{m(rR_0 + R_1) + R_0}{rR_0 + R_1} = \frac{(mr+1)R_0 + R_1}{rR_0 + R_1}.$$

V. En substituant dans cette expression celle de R_0 (174.), on voit qu'on aura une fraction qui a R_1 et R_2 également dans son numérateur et dans son dénominateur, mais point des termes ni dans l'un ni dans l'autre qui ne soient affectés de R_1 ou de R_2. En substituant dans cette fraction la valeur de R_1 (175.) on aura une autre fraction semblable contenant R_2 et R_3 tant dans le numérateur que dans le dénominateur, et ainsi de suite. Généralement on pourra donc écrire

$$178. \quad \frac{y}{L_0} = \frac{p_{n-1} R_{n-1} + \varkappa_{n-1} R_n}{q_{n-1} R_{n-1} + \lambda_{n-1} R_n},$$

où p_{n-1}, $\varkappa_{n-1}$, q_{n-1}, λ_{n-1} sont les coefficiens inconnus de R_{n-1} et R_n.

VI. Substituant maintenant dans l'expression générale (178.) celle de R_{n-1} (176.), on aura

$$179. \quad \frac{y}{L_0} = \frac{p_{n-1}(r_n R_n + R_{n+1}) + \varkappa_{n-1} R_n}{q_{n-1}(r_n R_n + R_{n+1}) + \lambda_{n-1} R_n} = \frac{(p_{n-1} r_n + \varkappa_{n-1}) R_n + p_{n-1} R_{n+1}}{(q_{n-1} r_n + \lambda_{n-1}) R_n + q_{n-1} R_{n+1}}.$$

Mais en vertu de l'expression générale (178.), on a aussi

$$180. \quad \frac{y}{L_0} = \frac{p_n R_n + \varkappa_n R_{n+1}}{q_n R_n + \lambda_n R_{n+1}}.$$

On a donc, en comparant les expressions (179. 180.),

$$181. \quad \begin{cases} p_n = p_{n-1} r_n + \varkappa_{n-1}, \\ q_n = q_{n-1} r_n + \lambda_{n-1}, \\ \varkappa_n = p_{n-1}, \\ \lambda_n = q_{n-1}. \end{cases}$$

VII. Ces équations donnent

$$p_n \lambda_n - q_n \varkappa_n = p_{n-1} q_{n-1} r_n + \varkappa_{n-1} q_{n-1} - p_{n-1} q_{n-1} r_n - p_{n-1} \lambda_{n-1},$$

ou bien

$$182. \quad p_n \lambda_n - q_n \varkappa_n = -(p_{n-1} \lambda_{n-1} - q_{n-1} \varkappa_{n-1}).$$

En mettant dans cette équation à plusieurs reprises $n-1$ à la place de n on aura

$$183. \quad p_n\lambda_n - q_n\varkappa_n = -(p_{n-1}\lambda_{n-1} - q_{n-1}\varkappa_{n-1}) = +(p_{n-2}\lambda_{n-2} - q_{n-2}\varkappa_{n-2}) = -(p_{n-3}\lambda_{n-3} - q_{n-3}\varkappa_{n-3})$$

et enfin

$$184. \quad p_n\lambda_n - q_n\varkappa_n = \pm(p_0\lambda_0 - q_0\varkappa_0)$$

VIII. Mais, en fesant $n=1$ dans l'expression générale (178.), elle donne

$$185. \quad \frac{y}{L_0} = \frac{p_0 R_0 + \varkappa_0 R_1}{q_0 R_0 + \lambda_0 R_1}.$$

En comparant cette équation avec celle (177.) on voit que

$$186. \quad p_0 = mr+1; \quad q_0 = r; \quad \varkappa_0 = m; \quad \lambda_0 = 1.$$

En substituant ces valeurs de p_0, q_0, $\varkappa_0$ et λ_0 dans (184.) on trouve

$$187. \quad p_n\lambda_n - q_n\varkappa_n = \pm((mr+1)1 - rm) = \pm 1.$$

IX. Cela posé, l'expression (172.) donne d'abord $\frac{y}{L_0} = m + \frac{R_0}{L_0}$. En y substituant la valeur de L_0 (173.) on a

$$\frac{y}{L_0} = m + \frac{R_0}{rR_0 + R_0} = m + \cfrac{1}{r + \cfrac{R_1}{R_0}}.$$

En substituant ici la valeur de R_0 (174.) on trouve

$$\frac{y}{L_0} = m + \cfrac{1}{r + \cfrac{R_1}{r_1 R_1 + R_2}} = m + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{R_2}{R_1}}}$$

En continuant ces substitutions et égalant enfin l'expression trouvée à celle (180.) on aura l'équation

$$188. \quad \frac{y}{L_0} = m + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{r_2 + \dots + \cfrac{1}{r_n + \cfrac{R_{n+1}}{R_n}}}}} = \frac{p_n R_n + \varkappa_n R_{n+1}}{q_n R_n + \lambda_n R_{n+1}}.$$

X. Désignons par $\left(\frac{y}{L_0}\right)$ la fraction qu'on obtient en négligeant celle $\frac{R_n}{R^{n+1}}$ dans (188.), c'est-à-dire supposons

$$189. \quad \left(\frac{y}{L^0}\right) = m + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{r_2 \dots + \cfrac{1}{r_n}}}},$$

on voit qu'on tirera $\left(\frac{y}{L_0}\right)$ de $\frac{y}{L_0}$ en fesant $R_{n+1}=0$ dans l'expression de cette dernière fraction. Donc on a en vertu de l'équation (188.)

$$190.\quad \left(\frac{y}{L_0}\right) = \frac{p_n R_n}{q_n R_n} = \frac{p_n}{q_n}.$$

XI. Retranchons (190.) de (188.) nous aurons

$$\frac{y}{L_0}-\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n R_n + \varkappa_n R_{n+1}}{q_n R_n + \lambda_n R_{r+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n q_n R_n + \varkappa_n q_n R_{n+1} - p_n q_n R_n - p_n \lambda_n R_{n+1}}{q_n(q_n R_n + \lambda_n R_{n+1})},$$

ou bien

$$\frac{y}{L_0}-\frac{p_n}{q_n} = -\frac{(p_n\lambda_n - q_n\varkappa_n)R_{n+1}}{q_n(q_n R_n + \lambda_n R_{n+1})},$$

et $p_n\lambda_n - q_n\varkappa_n$ étant $=\pm 1$ (187.) et $q_r R_n + \lambda_n R_{n+1} = L_0$ (180.):

$$191.\quad \frac{y}{L_0}-\frac{p_n}{q_n} = \mp\frac{R_{n+1}}{q_n L_0}\ (180.).$$

XII. Mais nous avons supposé (III.) que le reste R_{n+1} est indépendant de x. La quantité $\frac{y}{L_0}-\frac{p_n}{q_n}$ sera donc une fraction dont le numérateur ne contient pas x.

XIII. Multipliant (191.) par $L_0 q_n$, on a

$$y q_n - L_0 p_n = \mp R_{n+1},$$

ou bien

$$192.\quad L_0 p_n = q_n y \pm R_{n+1}.$$

XIV. Multiplions maintenant $\frac{{}^mU}{{}^sN} = \frac{{}^mU}{Q_0 y + L_0}$ (170., 171.) en haut et en bas par p_n, nous aurons

$$193.\quad \frac{{}^mU}{{}^sN} = \frac{{}^mU p_n}{Q_0 p_n y + L_0 p_n},$$

et en y substituant (192.) et supposant

$$194.\quad {}^mU p_n = Py + K,$$

$$194.^*\quad \frac{{}^mU}{{}^sN} = \frac{Py+K}{(Q_0 p_n + q_n)y \pm R_{n+1}} = \frac{{}^mU p_n}{{}^sN p_n}.$$

XV. Faisons enfin

$$195.\quad \begin{cases} p_n = M, \\ Q_0 p_n + q_n = Q, \\ \pm R_{n+1} = {}^0C, \end{cases}$$

nous aurons

$$196.\quad \frac{{}^mU}{{}^sN} = \frac{M.{}^mU}{M.{}^sN} = \frac{Py+K}{Qy+{}^0C}.$$

XVI. Cela fait voir d'abord qu'il *existe* toujours un multiplicateur $M=p$ propre à réduire la fraction donnée $\frac{{}^mU}{{}^sN}$ à la forme $\frac{Py+K}{Qy+{}^0C}$. Donc

le calcul précédent de ce multiplicateur offre en même tems une démonstration de son *existence*, la *seconde*, annoncée (§. 17. XIV.).

XVII. Ensuite les résultats (195. et 196.) font voir qu'on trouve ce multiplicateur $M = p_n$ (196.) comme suit. Développez la fraction $\frac{y}{L_0}$ en fraction continue (188.) en arrêtant le développement aussitôt que se présente un reste R_{n+1} indépendant de x. Calculez la valeur en x de cette fraction continue, après y avoir supprimé la dernière partie fractionnaire $\frac{R_{n+1}}{R_n}$ (188.), c'est-à-dire, calculez la valeur de la fraction $\left(\frac{y}{L_0}\right)$ (189.): le numérateur p_n (190.) de cette fraction sera le multiplicateur M demandé (195.)

C'est précisement la règle d'Euler (§. 15. XIV.). Donc cette règle a été démontrée dans ce qui précède.

XVIII. Il y a encore à remarquer que les résultats du calcul précédent offrent en même tems les valeurs de Q et $^{\circ}C$ dans $M.{}^{\prime}N = Qy + {}^{\circ}C$ (196.) comme le font voir les équations (195.). Donc on trouve sur le champ, et sans effectuer la multiplication de $^{\prime}N$ par le facteur calculé M, le *dénominateur* $^{\circ}C$ de la quantité ^{r-1}w (169.) cherchée dans la formule (162.). Il ne reste qu'à multiplier ^{m}U par $M = p_n$ et à diviser $^{m}U.M$ par ^{r}y. Le *reste K* de cette division donnera le *numérateur* de ^{r-1}w (169.) et par là la quantité ^{r-1}w sera calculée complètement.

XIX. Ayant effectué le développement de $\frac{y}{L_0}$ en fraction continue et trouvé par là $m, r, r_1, r_2, \ldots. r_n$ (188.), les formules (181.) donnent le facteur $M = p_n$ comme suit. D'abord on tire de la première et de la troisième formule (181.)

$$197. \quad p_n = p_{n-1} r_n + p_{n-2}.$$

Ensuite (186.) donne

$$198. \quad p_0 = mr + 1 \quad \text{et} \quad \varkappa_0 = m,$$

et de là on tire par la première formule (181.), en y supposant $n = 1$,

$$199. \quad p_1 = (mr + 1) r_1 + m.$$

Puis la formule (197.), en y supposant $n = 2$, donne

$$200. \quad p_2 = p_1 r_2 + p_0,$$

et dès ici on peut continuer le calcul des p suivants jusqu'à p_n en mettant dans la formule générale (197.) successivement $n = 3, 4, \ldots.,$ jusqu'à n.

XX. D'ailleurs la méthode précédente d'Euler, de calculer le multiplicateur M, propre á réduire une fraction donnée

$$201. \quad \frac{{}^mU}{{}^\circ N} = \frac{P_0 y + K_0}{Q_0 y + L_0},$$

à la forme

$$202. \quad \frac{{}^mU}{{}^\circ N} = \frac{M.{}^mU}{M.{}^\circ N} = \frac{M(P_0 y + K_0)}{M(Q_0 y + L_0)} = \frac{Py + K}{Qy + {}^\circ C},$$

où ${}^\circ C$ ne contient plus x, n'est pas la seule qui mène à ce but.

En voici encore deux autres.

21.

Seconde méthode de calculer M. (202.)

I. Il est clair q'uil ne s'agit que de trouver un polynome M propre à donner

$$203. \quad M.{}^\circ N = Qy + {}^\circ C,$$

où ${}^\circ C$ ne contient points des x. Ce polynome sera la multiplicateur cherché.

II. Nous avons démontré (§. 17.) *l'existance* de ce polynome. Mais cette démonstration renferme en même tems le mode même de calcul du polynome M. En effet il n'y a qu'à faire les calculs indiqués (§. 17. III. — XI.) pour arriver à l'équation (158.) qui coïncide avec (203.) et offre non seulement M, mais les trois quantités cherchées M, Q et ${}^\circ C$.

III. Il y a encore à remarquer, que le *même* multiplicateur M qui donne

$$204. \quad M.L_0 = Q_1 y + {}^\circ C,$$

donnera aussi à $M.{}^\circ N$ la forme $Qy + {}^\circ C$; car ${}^\circ N$ étant $Q_0 y + L_0$, la différence de $M.{}^\circ N$ et $M.L_0$ ne sera qu'un multiple de y que ne change pas la forme demandée. Donc on pourra encore abréger le calcul, en mettant L_0 à la place de ${}^\circ N$.

22.

Troisième méthode de calculer M. (204.)

I. Il est d'abord clair que si le coefficient de la plus haute puissance de x dans y est $=1$, comme il le sera ordinairement, celui de la plus haute puissance de x dans M peut être supposé également $=1$; car il n'y a alors qu'à égaler le coefficient de la plus haute puissance de x dans Q_1 (204.) à celui de la plus haute puissance de x dans L_0.

II. Cela posé, en transformant l'équation (204.) en

$$205. \quad \frac{M.L_0 - {}^\circ C}{{}^r y} = Q_1,$$

on voit de cette expression que $M.L_0 - {}^\circ C$ doit être *divisible* par ${}^r y$, c'est-à-dire, que si l'on *divise* $M.L_0 - {}^\circ C$ par ${}^r y$, le *reste* de la division doit être zéro.

III. Ce *reste* sera du degré $r-1$, le diviseur ${}^r y$ étant du degré r; donc ses r termes seront propres à déterminer r coefficiens inconnus. La quantité ${}^\circ C$, indépendante de x, étant regardée comme une de ces inconnues, le multiplicateur M peut en contenir les $r-1$ autres. Donc, le coefficient de son premier terme étant $=1$, il sera généralement du degré $r-1$ et on peut supposer

$$206. \quad {}^{r-1}M = x^{r-1} + \lambda_1 x^{r-2} + \lambda_2 x^{r-3} - \ldots\ldots + \lambda_{r-1}.$$

VI. Cela posé, il n'y a qu'à multiplier L_0 par ${}^{r-1}M$ (206.), ajouter $-{}_0C$ au produit, diviser la somme par ${}^r y$ et égaler à zéro les coefficiens de r différens termes du *reste* de la division, qui renfermeront les r quantités inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\ldots \lambda_{r-1}$ et ${}^\circ C$. Cela fournira r équations *du premier degré*, desquelles on pourra tirer les r inconnues.

V. Mais puisque l'inconnue ${}^\circ C$ ne se présente que dans le dernier terme sans x du dividende $M L_0 - {}^\circ C$, elle ne se présentera aussi que dans le dernier terme sans x du *reste*. Donc les $r-1$ premières équations, qu'on tire du *reste*, doivent déjà donner les r inconnues λ.

VI. Le degré du multiplicateur M ne peut être supérieur à $r-1$; car, s'il l'étoit, il se présenteroit un plus grand nombre d'inconnues qui ne peuvent être trouvées par l'évaluation des différents termes du reste.

VII. Mais il peut être *moindre* que $r-1$, car il se peut que quelques unes des $r-1$ équations, contenant les inconnues λ, soient *identiques*. Dans ce cas le premier terme x^{r-1} de M (206.), suivi peut être de quelques autres, ne pourroit pas subsister. Et puisqu'on a fixé davance la valeur du coefficient de x^{r-1}, les équations qu'on trouve ne peuvent pas indiquer cette circonstance autrement qu'en tombant *en contradiction.*

VIII. Donc si les $r-1$ équations, qui renferment les $r-1$ inconnus $\lambda_1, \lambda_2 \ldots\ldots \lambda_{r-1}$ (206.), se trouvent être *en contradiction*, ce sera un signe que le degré de M doit être *moindre* que $r-1$ et il faut essayer un autre multiplicateur d'un degré plus foible. Lorsqu'on aura introduit un tel multiplicateur, toutes les équations déterminantes qu'il y aura alors de *trop* devront être *identiques.*

23.

Appliquons à un exemple nos trois méthodes de calcul du multiplicateur M propre à transformer la fraction $\frac{{}^m U}{{}^s N}$ en $\frac{M.{}^m U}{M\,{}^s N} = \frac{Py+K}{Qy+{}^\circ C}$, où C ne contient plus x, et choisissons cet exemple parmi ceux d'Euler.

Exemple (Mémoire d'Euler §. 18.).

$$207.\quad \begin{cases} {}^{m}U = x^3 + 1; \\ {}^{s}N = x^3 + x^2 + 1 = L_0; \quad Q_0 = 0; \ (171.) \\ {}^{r}y = x^4 + 1; \end{cases}$$

I. *Première méthode* (§. 20.). Suivant cette méthode il faut développer $\frac{y}{L_0}$ en fraction continue, en s'arrêtant au premier reste indépendant de x. Cela donne

$$208.\quad \begin{array}{llllll}
x^3+x^2+1 \mid & x^4+1 \mid x & & & & \\
 & -x^4-x^3-x & & & & \\
 & \overline{-x^3-x+1} \mid & x^3+x^2+1 \mid -1 & & & \\
 & & -x^3-x+1 & & & \\
 & & \overline{x^2-x+2} \mid & -x^3-x+1 \mid -x & & \\
 & & & +x^3-x^2+2x & & \\
 & & & \overline{-x^2+x+1} \mid & x^2-x+2 \mid -1 & \\
 & & & & -x^2+x+1 & \\
 & & & & \overline{+3} &
\end{array}$$

donc on a

$$209.\quad \frac{y}{L_0} = \frac{x^4+1}{x^3+x^2+1} = x + \cfrac{1}{-1 + \cfrac{1}{-x + \cfrac{1}{-1 + \cfrac{3}{-x^2+x+1}}}}$$

et en (188.)

$$210.\quad \begin{cases} m = x, \\ r = -1, \\ r_1 = -x, \\ r_2 = -1 = r_n, \\ R_n = -x^2 + x + 1, \\ R_{n+1} = 3, \end{cases}$$

De là on tire par les formules (197 — 200.)

$$211.\quad \begin{cases} p_0 = mr+1 = -x+1, \\ p_1 = (mr+1)r_1 + m = -x(-x+1) + x = x^2, \\ p_2 = p_1 r_2 + p_0 = -x^2 + (-x+1) = -x^2 - x + 1, \end{cases}$$

donc suivant (195.)

$$212.\quad \begin{cases} M = p_2 = -x^2 - x + 1, \\ {}^{o}C = \pm R_{n+1} = +3, \ n \text{ étant pair.} \end{cases}$$

En effet le multiplicateur $M = -x^2 - x + 1$ donne

$$213.\quad \begin{cases} M.{}^{s}N = (-x^2-x+1)(x^3+x^2+1) = -x^5 - 2x^4 - x + 1 \\ \qquad = -(x+2)(x^4+1) + 3 = -(x+2)\,{}^{r}y + 3, \\ M.{}^{m}U = (-x^2-x+1)(x^3+1) = -x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - x + 1, \end{cases}$$

donc

$$214. \quad \frac{{}^mU}{{}^nN} = \frac{M.{}^mU}{M.{}^nN} = \frac{-x^5-x^4+x^3-x^2-x+1}{-(x+2).{}^ry+3} = \frac{x^5+x^4-x^3+x^2+x-1}{(x+2).{}^ry-3},$$

résultat conforme à celui d'Euler.

II. *Seconde méthode* (§. 21.). En multipliant L_0 (207.) par x, on a

$$215. \quad x L_0 = x^4 + x^3 + x$$

et en divisant par ${}^ry = x^4 + 1$,

$$216. \quad x L_0 = {}^ry + x^3 + x - 1.$$

En multipliant de nouveau par x et divisant par y on trouve

$$217. \quad x^2 L_0 = (x+1)\,{}^ry + x^2 - x - 1.$$

Combinons les trois équations

$$218. \quad \begin{cases} L_0 = x^3 + x^2 + 1 \ (207.), \\ x L_0 = {}^ry + x^3 + x - 1 \ (216.) \text{ et} \\ x^2 L_0 = (x+1).{}^ry + x^2 - x - 1, \end{cases}$$

nous aurons

$$219. \quad (x-1)\,L_0 = {}^ry - x^2 + x - 2,$$

$$220. \quad (x^2+x-1)\,L_0 = (x+2)\,{}^ry - 3,$$

ou bien

$$(-x^2-x+1)\,L_0 = -(x+2).{}^ry + 3.$$

Cela donne

$$221. \quad M = -x^2 - x + 1,$$

et s'accorde avec (213.). Le reste du calcul coïncide avec celui (I.).

III. *Troisième méthode* (§. 22.). Supposons

$$222. \quad M = x^3 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_3,$$

on a

$$M L_0 - {}^0C = (x^3 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_3)(x^3 + x^2 + 1) - {}^0C,$$

ou bien

$$223. \quad M L_0 - {}^0C = x^6 + (\lambda_1 + 1)x^5 + (\lambda_2 + \lambda_1)x^4 + (\lambda_3 + \lambda_2 + 1)x^3 + (\lambda_3 + \lambda_1)x^2 + \lambda_2 x + \lambda_3 - {}^0C.$$

Divisons par ${}^ry = x^4 + 1$, on aura

$$224. \quad M L_0 - {}^0C = {}^ry\,(x^2 + (\lambda_1 + 1)x + \lambda_2 + \lambda_1) + (\lambda_3 + \lambda_2 + 1)x^3 + (\lambda_3 + \lambda_1 - 1)x^2 + (\lambda_2 - \lambda_1 - 1)x + \lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_1 - {}^0C,$$

donc les équations qui détermineront λ_1, λ_2, λ_3 et ${}^0C$ seront

$$225. \quad \begin{cases} \lambda_3 + \lambda_2 + 1 = 0, \\ \lambda_3 + \lambda_1 - 1 = 0, \\ \lambda_2 - \lambda_1 - 1 = 0, \\ \lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_1 - {}^0C = 0. \end{cases}$$

Des deux premières équations on tire en les soustrayant l'une de l'autre

$$226. \quad \lambda_2 - \lambda_1 + 2 = 0, \quad \text{ou bien} \quad \lambda_2 - \lambda_1 = -2.$$

Mais cela est *en contradiction* avec la troisième équation qui donne $\lambda_1 - \lambda_2 = +1$. Donc le degré du multiplicateur M a été supposé trop fort (§. 22. VIII.) et il faut supposer

$$227. \quad M = x^2 + \lambda_1 x + \lambda_2.$$

Cela donne

$$ML_2 - {}^\circ C = (x^2 + \lambda_1 x + \lambda_2)(x^3 + x^2 + 1) - {}^\circ C,$$

ou bien

$$228. \quad ML_1 - {}^\circ C = x^5 + (\lambda_1 + 1)x^4 + (\lambda_2 + \lambda_1)x^3 + (\lambda_2 + 1)x^2 + \lambda_1 x + \lambda_2 - {}^\circ C.$$

Divisant par $y = x^4 + 1$, on aura

$$229. \quad ML_0 - {}^\circ C =$$

$$(y)(x + \lambda_1 + 1) + (\lambda_2 + \lambda_1)x^3 + (\lambda_2 + 1)x^2 + (\lambda_1 - 1)x + \lambda_2 - \lambda_1 - 1 - {}^\circ C.$$

Donc les équations déterminantes seront

$$230. \quad \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 + 1 = 0, \\ \lambda_1 - 1 = 0, \\ \lambda_2 - \lambda_1 - 1 - {}^\circ C = 0. \end{cases}$$

En soustrayant la second de le première on tombe dans la troisième d'où l'on voit que celle-ci est *identique* avec les deux premières (§. 22. VIII.). La troisième et la seconde équation donnent

$$131. \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = -1, \end{cases}$$

et puis la quatrième $-1 - 1 - 1 - {}^\circ C = 0$, donc

$$232. \quad {}^\circ C = -3;$$

donc on a suivant (227.)

$$233. \quad M = x^2 + x - 1,$$

et, en vertu de $ML_2 = Qy - {}^\circ C$,

$$(x^2 + x - 1)L_0 = Q_1 y + 3.$$

ou bien

$$234. \quad (-x^2 - x + 1)L_0 = Q_1 y - 3,$$

et cela s'accorde encore avec (214.), le reste du calcul étant le même que celui là.

24.

I. Les méthodes précédentes servent à trouver ${}^{r-1}u$ ou ${}^{r-1}W$ dans (122. et 123.). D'abord ayant fait dans l'expression de la fraction à dé[illegible]

$$235. \quad \begin{cases} {}^{m}U = P_0 y + K_0 \text{ et} \\ {}^{s}N = Q_0 y + L_0 \end{cases}$$

dans le première cas et

$$236. \quad \begin{cases} {}^{m}U = \overset{1}{P}_0 y^{\varrho} + \overset{1}{K}_0 \text{ et} \\ {}^{s}N = \overset{1}{Q}_0 y^{\varrho} + \overset{1}{L}_0 \end{cases}$$

dans le second, on transformera la fraction $\frac{{}^{m}U}{{}^{s}N} = \frac{P^0 y + K_0}{Q_0 y + L_0}$ ou $\frac{{}^{m}U}{{}^{s}N} = \frac{\overset{1}{P}_0 y + \overset{1}{K}_0}{\overset{1}{Q}_0 y + \overset{1}{L}_0}$ en une autre de la forme

$$237. \quad \frac{{}^{m}U}{{}^{s}N} = \frac{Py + K}{Qy + {}^{o}C} \text{ ou } \frac{{}^{m}U}{{}^{s}N} = \frac{\overset{1}{P}y + \overset{1}{K}}{\overset{1}{Q}y + {}^{o}\overset{1}{C}},$$

soit par la méthode (No. 15. III. — XII.), soit à l'aide d'un multiplicateur M. Cela étant fait on a (169.)

$$238. \quad {}^{r-1}w = \frac{K}{{}^{o}C} \text{ ou}$$

$$239. \quad {}^{r\varrho-1}W = \frac{\overset{1}{K}}{{}^{o}\overset{1}{C}}.$$

Ayant trouvé w ou W, on calculera Z (122. et 123.) suivant (No. 15. XV.).

II. Si l'exposant ϱ de ${}^{r}y$ n'est pas assez faible, il sera ordinairement préférable de calculer ${}^{r-1}w$ au lieu de ${}^{r\varrho-1}W$ et puis ${}^{n-r-1}Z$, en opérant ensuite sur Z.

Mais si l'on a calculée ${}^{r\varrho-1}W$ (123.) il y a encore à décomposer la première fraction partielle $\frac{{}^{r\varrho-1}W}{{}^{r}y^{\varrho}}$ en

$$240. \quad \frac{{}^{r\varrho-1}W}{{}^{r}y^{\varrho}} = \frac{{}^{r-1}w_1}{{}^{r}y^{\varrho}} + \frac{{}^{r-1}w_2}{{}^{r}y^{\varrho-1}} + \frac{{}^{r-1}w_3}{{}^{r}y^{\varrho-2}} \dots\dots \frac{{}^{r-1}w_{\varrho}}{{}^{r}y} \text{ (8.).}$$

Cela se fait en *divisant* ${}^{r\varrho-1}W$ par ${}^{r}y$, le *quotient* de nouveau par ${}^{r}y$, le second quotient encore par ${}^{r}y$ et ainsi de suite, jusqu'à ce que le *degré* du dernier quotient soit *inférieur* à celui r de y. Les *restes* des différentes divisions donneront sur le champ les numérateurs $w_1, w_2, w_3, \dots$ $\dots w_{\varrho}$ des fractions partielles (240.). En effet, supposons

$$241. \quad \begin{cases} {}^{r\varrho-1}W = {}^{(\varrho-1)r-1}T_1\, {}^{r}y + {}^{r-1}w_1, \\ {}^{(\varrho-1)r-1}T_1 = {}^{(\varrho-2)r-1}T_2\, {}^{r}y + {}^{r-1}w_2, \\ {}^{(\varrho-2)r-1}T_2 = {}^{(\varrho-3)r-1}T_3\, {}^{r}y + {}^{r-1}w_3, \\ \dots\dots\dots\dots \\ {}^{2r-1}T_{\varrho-2} = {}^{r-1}T_{\varrho-1}\, {}^{r}y + {}^{r-1}w_{\varrho-1}, \\ {}^{r-1}T_{\varrho-1} = {}^{r-1}w_{\varrho}, \end{cases}$$

de sorte qu'en substituant ces expressions l'une dans l'autre on a

$$242.\quad \begin{cases} {}^{r\varrho-1}W = {}^{r-1}w_1 + {}^ry({}^{r-1}w_2 + {}^{(\varrho-2)r-1}T_2\,{}^ry), \\ {}^{r\varrho-1}W = {}^{r-1}w_1 + {}^ry({}^{r-1}w_2 + {}^ry)({}^{r-1}w_3 + {}^{(\varrho-3)r-1}T_3\,{}^ry), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ {}^{r\varrho-1}W = {}^{r-1}w_1 + {}^ry\,.\,{}^{r-1}w_2 + {}^ry^2.\,{}^{r-1}w_3 + {}^ry^3.\,{}^{r-1}w_4 \ldots\ldots + {}^ry^{\varrho-1}.\,{}^{r-1}w_\varrho, \end{cases}$$

la dernière expression (242.), divisée par ${}^ry^\varrho$, donnera sur le champ celle (240.) qu'on a demandée.

25.

Dans le cas où ${}^ry$ est du *premier* degré, c'est-à-dire $r = 1$, les *restes* K_0 et L_0 de la division de ${}^mU$ et ${}^nN$ par ${}^ry$ (235.) seront du degré zéro, ou *indépendants* de x; donc L_0 a déjà dans ce cas la forme requise et la transformation de $\frac{{}^mU}{{}^nN} = \frac{P_0 y + K_0}{Q_0 y + L_0}$ en $\frac{{}^mU}{{}^nN} = \frac{Py + K}{Qy + {}^0C}$ (No. 24. I.) n'est pas nécessaire ici. Il n'y a qu'à diviser ${}^mU$ et ${}^nN$ par y; les *restes* K_0 et L_0 de ces divisions donneront sur le champ

$$243.\quad w = \frac{K_0}{L_0} = \frac{K}{{}^0C}\ (169.).$$

Mais on trouve également les restes K_0 et L_0 des divisions de ${}^mU$ et ${}^nN$ par ${}^ry$, si dans ${}^mU$ et ${}^nN$ on donne à x la valeur déterminée par l'équation

$$244.\quad {}^ry = 0,$$

puisque $y = 0$ donne en vertu de (235.) ${}^mU = K_0$ et ${}^nN = L_0$. Par là on voit que dans le cas $r = 1$ la présente cinquième méthode de décomposition des fractions algébriques, si l'on calcule par cette méthode, comme il est preférable, ${}^{r-1}w$ et non pas ${}^{r\varrho-1}W$, coïncide absolument avec la *seconde* méthode de décomposition.

Elle ne diffère donc de celle-ci que dans le cas où $y > 1$. Dans ces cas les méthode antérieures sont obligées de donner à x les différentes valeurs déterminées qui satisfont à l'équation ${}^ry = 0$; la présente méthode elude cette incommodité.

26.

Il y a donc seulement lieu aussi d'appliquer la présente méthode à notre *second* exemple (No. 7.). Son application au premier exemple ne donneroit que les calculs (No. 10.).

I. Dans ce second exemple nous avons

$$245.\quad {}^ry = x^2 - 2x + 5\ (61.)$$

et, en divisant ${}^mU$ et ${}^nN$ (60. et 62.) par ${}^ry$ pour trouver ${}^{r-1}w$, on a

$$246.\ \begin{cases} {}^{m}U = P_0 y + K_0 (235.) \\ \quad = (17x^6 - 111x^5 + 124x^4 - 161x^3 - 408x^2 - 45x + 7)(x^2 - 2x + 5) - 183x + 96, \\ {}^{s}N = Q_0 y + L_0 (235) = (x^3 + 5x^2 + 9x - 7)(x^2 - 2x + 5) - 61x + 32, \end{cases}$$

donc

$$247.\ \begin{cases} K_0 = -183x + 96, \\ L_0 = -\ \ 61x + 32. \end{cases}$$

II. Maintenant il y aurait à calculer le multiplicateur M propre à réduire $\frac{{}^{m}U}{{}^{s}N}$ à la forme $\frac{Py+K}{Qy+{}^{\circ}C}$, où C ne contient plus x. Mais ici K_0 est *divisible* par L_0 et on a $\frac{K_0}{L_0} = 3$. Donc quel que soit le multiplicateur M, on aurait encore $\frac{MK_0}{ML_0} = 3$. Donc on est dispensé du calcul du multiplicateur et on a $\frac{K}{{}^{\circ}C} = \frac{K^0}{L_0}$ et sur le champ, suivant (169.)

$$248.\quad {}^{r-1}w = 3.$$

III. Le numérateur ${}^{r-1}w$ de la première fraction partielle étant trouvé, on a suivant (142.)

$$249.\quad {}^{n-r-1}Z = \frac{{}^{m}U - {}^{r-1}w\,{}^{s}N}{{}^{r}y}$$

$$= \frac{(17x^8 - 145x^7 + 431x^6 - 964x^5 + 534x^4 - 34x^3 - 1943x^2 - 422x + 131) - 3(x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 2x - 3)}{x^2 - 2x + 5},$$

et cela donne

$$250.\quad {}^{n-r-1}Z = 17x^6 - 111x^5 + 124x^4 - 164x^3 - 423x^2 - 72x + 28.$$

Cette quantité prendra la place de ${}^{m}U$ (246.), en calculant le numérateur de la *seconde* fraction partielle.

IV. Elle donne pour ce numérateur

$$251.\ P_0 y + K_0 = (17x^4 + 77x^3 - 115x^2 - 9x + 134)(x^2 - 2x + 5) + 241x - 642,$$

donc suivant (251. et 247.)

$$252.\ \begin{cases} K_0 = +241x - 642, \\ L_0 = -\ \ 61x + \ 32. \end{cases}$$

V. Ici K_0 n'est pas divisible par L_0 comme il l'étoit (II.). Donc il faut chercher le multiplicateur M propre à réduire $\frac{U}{N}$, ou bien $\frac{K_0}{L_0}$, à la forme $\frac{Py+K}{Qy+{}^{\circ}C}$, où C ne contient pas x.

VI. Nous ferons cela suivant la *troisième* méthode (No. 22.). Supposons

$$253.\quad M = x + \lambda,$$

nous avons

$$254.\quad L_0 M - {}^{\circ}C = -61x^2 + (32 - 61\lambda)x + 32\lambda - C_0.$$

9*

Cela, étant divisé par $y = x^2 - 2x + 5$, donne

$$255. \quad L_0 M - {}^{\bullet}C = -61y - (90 + 61\lambda)x + 32\lambda - {}^{\bullet}C + 305,$$

donc

$$256. \quad \begin{cases} 90 + 61\lambda = 0 \text{ et} \\ 305 + 32\lambda - {}^{\bullet}C = 0, \end{cases}$$

et de là on tire

$$257. \quad \begin{cases} \lambda = -\frac{90}{61}, \\ {}^{\bullet}C = 305 - 32.\frac{90}{91} = \frac{15725}{61}. \end{cases}$$

171. Multipliant maintenant $K_0 = 241x - 642$ (252.) par $M = x - \frac{90}{61}$ (253. et 257.), on a

$$256. \quad K_0 M = 241x^2 - \left(642 + \frac{90.241}{61}\right)x + \frac{642.90}{61},$$

et en divisant par $y = x^2 - 2x + 5$,

$$257. \quad K_0 M = 241y - \left(160 + \frac{90.241}{61}\right)x - 1205 + \frac{642.90}{61}$$

$$= 241y - \frac{31450}{61}x - \frac{15725}{61},$$

donc

$$258. \quad K = -\frac{31450x + 15725}{61},$$

donc enfin suivant (166.)

$$259. \quad {}^{r-1}w_1 = \frac{K}{{}_{\bullet}C} = \frac{\frac{31450x + 15725}{61}}{\frac{15725}{61}} \text{ (258., 257.)} = -(2x + 1).$$

VIII. Voici le numérateur de la seconde fraction partielle. On a donc juisqu'ici

$$260. \quad \frac{{}^mU}{{}^ry^e - {}^sN} \text{ (63.)} = \frac{3}{(x^2 - 2x + 5)^2} \text{ (248.)} - \frac{2x + 1}{(x^2 - 2x + 5)^2} \text{ (259.) etc.}$$

IX. Nous ne continuerons pas plus loin ce calcul qui, comme on voit, est encore assez fatigant. Nous passerons plutôt d'abord à une autre méthode un peu plus prompte, au moins plus régulière, tirée de la présente.

§. VI. Sixième méthode

27.

I. Soit comme ci-dessus

$$261. \quad \frac{{}^mU}{{}^ry^e . {}^sN}$$

la fraction proposée à être décomposée en fractions partielles de la forme (8.).

Divisons d'abord ${}^{m}U$ et ${}^{s}N$ par ${}^{r}y$, et soient P_0 et Q_0 les quotients et K_0, L_0 les restes de ces divisions, la fraction proposée prendra la forme

$$262. \quad \frac{{}^{m}U}{{}^{r}y^{\varrho}.{}^{s}N} = \frac{P_0 y + K_0}{(Q_0 y + L_0)\,{}^{r}y^{\varrho}}.$$

II. Réduisons $\frac{P_0 y + K_0}{Q_0 y + L_0}$ à la forme $\frac{Py+K}{Qy+{}^{0}C}$, où ${}^{0}C$ ne contient plus x, soit par la méthode (No. 15. VII. — XII.) ou en calculant d'après (No. 20., 21. ou 22.) le multiplicateur M propre à donner à $M(Q_0 y + L_0)$ la forme $Qy + {}^{0}C$, et en multipliant après en haut et en bas par M.

Cela fait, la fraction proposée prendra la forme

$$263. \quad \frac{{}^{m}U}{{}^{r}y^{\varrho}.{}^{s}N} = \frac{K+Py}{(C+Qy)\,{}^{r}y^{\varrho}}.$$

III. Divisons maintenant $K+Py$ par $C+Qy$, non suivant les puissances *descendantes*, mais suivant les puissances *ascendantes* de y.

Le premier terme du quotient sera $\frac{K}{C}$ et le reste $\frac{PC-KQ}{C}y$, car on a

$$263. \quad \frac{K+Py}{C+Qy} = \frac{K}{C} + \frac{(CP-KQ)y}{C(C+Qy)}.$$

IV. Supposons

$$265. \quad \frac{CP-KQ}{C}, \quad \text{ou bien} \quad P - \frac{K}{C}Q = K_1 + P_1 y,$$

où l'on trouvera K_1 et P_1 en divisant $\frac{CP-KQ}{C}$ par y; le quotient de cette division sera P_1 et le reste K_1.

Cela fait, l'équation (264.) se reduira à

$$266. \quad \frac{K+Py}{C+Qy} = \frac{K}{C} + \frac{K_1 + P_1 y}{C+Qy}.y.$$

V. Ici la fraction $\frac{K_1+P_1 y}{C+Qy}$ est tout-à-fait semblable à celle $\frac{K+Py}{C+Qy}$ (263.); il n'y a qu'à mettre K_1 et P_1 à la place de K et P, pour réduire la seconde à la première.

On peut donc continuer la division (III.) et on aura

$$267. \quad \frac{K+Py}{C+Qy} = \frac{K}{C} + \frac{K_1}{C}.y + \frac{CP_1 - K_1 Q}{C(C+Qy)}y^2.$$

VI. En supposant de nouveau

$$268. \quad \frac{CP_1 - K_1 Q}{C}, \quad \text{ou bien} \quad P_1 - \frac{K_1}{C}Q = K_2 + P_2 y,$$

et divisant, on aura

$$269. \quad \frac{K+Py}{C+Qy} = \frac{K}{C} + \frac{K_1}{C}y + \frac{K_2}{C}y^2 + \frac{CP_2 - K_2 Q}{C(C+Qy)}y^3,$$

et ainsi de suite.

VII. Ayant continué cette opération, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à la puissance y^ϱ de y, on aura

$$270.\quad \frac{K+Py}{C+Qy} = \frac{K}{C} + \frac{K_1}{C}y + \frac{K_2}{C}y^2 + \frac{K_3}{C}y^3 \dots + \frac{K_{\varrho-1}}{C}y^{\varrho-1} + \frac{P_{\varrho-1} - \frac{K_{\varrho-1}}{C}.Q}{C+Qy}.y^\varrho,$$

donc en substituant dans (263.),

$$371.\quad \frac{{}^mU}{{}^ry^\varrho.{}^sN} = \frac{K}{C.{}^ry^\varrho} + \frac{K_1}{C.{}^ry^{\varrho-1}} + \frac{K_2}{C.{}^ry^{\varrho-2}} \dots + \frac{K_{\varrho-1}}{C.{}^ry} + \frac{P_{\varrho-1} - \frac{K_{\varrho-1}}{C}.Q}{C+Qy}.$$

VIII. Voilà le développement complet de la fraction proposée. En le comparant avec la forme générale (8.), savoir avec

$$272.\quad \frac{{}^mU}{{}^ry^\varrho.{}^sN} = \frac{{}^{r-1}w_1}{{}^ry^\varrho} + \frac{{}^{r-1}w_2}{{}^ry^{\varrho-1}} + \frac{{}^{r-1}w_3}{{}^ry^{\varrho-2}} \dots + \frac{{}^{r-1}w_\varrho}{{}^ry} + \frac{{}^{s-1}Z_\varrho}{{}^sN},$$

on voit que

$$273.\quad \begin{cases} w_1 = \frac{K}{C},\quad w_2 = \frac{K_1}{C},\quad w_3 = \frac{K_2}{C},\quad \dots\dots\quad w_\varrho = \frac{K_{\varrho-1}}{C}, \\ M.{}^sN = C+Qy, \\ M.{}^{s-1}Z_\varrho = P_{\varrho-1} - \frac{K_{\varrho-1}}{C}Q, \text{ donc } {}^{s-1}Z_\varrho = \frac{P_{\varrho-1} - \frac{K_{\varrho-1}}{C}.Q}{M}, \end{cases}$$

où l'on trouvera les différentes quantités K, K_1, ... $K_{\varrho-1}$, C, $P_{\varrho-1}$, Q par les équations suivantes:

$$274.\quad \begin{cases} M.{}^mU = K + Py, \\ M.{}^sN = C + Qy, \\ P - \frac{K}{C}.Q = K_1 + P_1 y, \\ P_1 - \frac{K_1}{C}.Q = K_2 + P_2 y, \\ P_2 - \frac{K_2}{C}.Q = K_3 + P\ y, \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

IX. Cette méthode de développement exige donc les opérations suivantes.

1. Chercher un multiplicateur M, tel, que $M.{}^sN = C+Qy$, ou bien si

$$275.\quad {}^sN = L_s + Q_s y,$$

tel, que ML_s ait la forme $C+Qy$, où C ne contient pas x.

2. Diviser $M.{}^mU$ par y; le reste étant supposé K et le quotient P, on aura $w_1 = \frac{K}{C}$. Diviser ensuite $P - \frac{K}{C}.Q$ par y; si le reste est K_1

et le quotient P_1, on aura $w_2 = \frac{K_1}{C}$. Diviser $P_1 - \frac{K_1}{C}.Q$ par y; si le reste est K_2 et le quotient P_2 on aura $w_3 = \frac{K_2}{C}$, et ainsi de suite.

3. Diviser enfin $P_{\varrho-1} - \frac{K_{\varrho-1}}{C}$ par M; le quotient sera Z.

28.

Dans le cas $r = 1$, c'est-à-dire où le facteur ${}^r y$ du dénominateur de la fraction proposée $\frac{{}^m U}{{}^r y^\varrho . {}^s N}$ est du *premier* degré, les calculs de la méthode présente se simplifient beaucoup.

I. D'abord dans

$$276. \quad \begin{cases} {}^m U = P_0 y + K_0 \text{ et} \\ {}^s N = Q_0 y + L_0, \end{cases}$$

les restes K_0 et L_0 de la division de U et N par y sont déjà deux mêmes indépendants de x. Donc le calcul du multiplicateur M, propre à donner à $M.{}^s N$ la forme $Qy + C$, *n'est pas nécessaire ici*, et L_0 prend la place de ${}^s C$,

II. Divisons de nouveau P_0 et Q_0 par y et supposons

$$277. \quad P_0 = P_1 y + K_1 \text{ et } Q_0 = Q_1 y + L_1,$$

où K_1 et L_1 seront indépendants de x, nous aurons

$$278. \quad \begin{cases} {}^m U = P_1 y^2 + K_1 y + K_0, \\ {}^s N = Q_1 y^2 + L_1 y + L_0. \end{cases}$$

Divisons encore P_1 et Q_1 par y, et soit

$$279. \quad P_1 = P_2 y + K_2 \text{ et } Q_1 = Q_2 y + L_2,$$

où K_2 et L_2 seront encore independants de x, nous aurons

$$280. \quad \begin{cases} {}^m U = P_2 y^3 + K_2 y^2 + K_1 y + K_0, \\ {}^s N = Q_2 y^3 + L_2 y^2 + L_1 y + L_0. \end{cases}$$

Continuons cette opération jusqu'à-ce qu'on soit arrivé à des quotients qui ne sont plus divisibles par y. Ces quotients seront P_{m-1} et Q_{s-1}; ils seront indépendants de x, ainsi que toutes les autres quantités K et L et on aura

$$281. \quad \begin{cases} {}^m U = P_{m-1} . y^m + K_{m-1} . y^{m-1} + K_{m-2} . y^{m-2} \ldots + K_0, \\ {}^s N = Q_{s-1} . y^s + L_{s-1} . y^{s-1} + L_{s-2} . y^{s-2} \ldots + L_0. \end{cases}$$

III. On voit que les calculs (II.) n'ont d'autre but que de transformer les deux polynomes en x, ${}^m U$ et ${}^s N$, en deux autres en y des mêmes degrés. Cela se fait effectivement par des divisions réitérées, comme il a été décrit dans (II.). Mais la transformation peut encore être effectuée par deux autres méthodes.

IV. Soit

$$282. \quad y = x + \alpha,$$

il n'y a qu'à *substituer* $y - \alpha$ au lieu de x dans ${}^mU$ et ${}^sN$. Cela donnera également les deux expressions (281.). Les calculs nécessaires seront à peu près de la même étendue que ceux dans (II.). C'est le *second* moyen de transformation. Voici le troisième.

V. Ecrivez y à la place de x dans U et N, et tirez des expressions que vous aurez, et que nous désignerons pas u et n, les *coefficiens différentiels* ∂u, $\partial^2 u, \ldots \partial^m n$ et ∂n, $\partial^2 n, \ldots \partial^s u$ respectivement jusqu'à le m^{me} et s^{me} ordre. Ces coefficiens différentiels, en mettant, comme cela doit être, $y - \alpha$ à la place de y, vous donneront, en vertu du théorème de Taylor:

$$283. \quad {}^mU = u - \alpha\partial u + \frac{\alpha^2}{2}\partial^2 u - \frac{\alpha^3}{2.3}\partial^3 u \ldots \pm \frac{\alpha^m}{2.3\ldots m}\partial^m u;$$

$$284. \quad {}^sN = n - \alpha\partial n + \frac{\alpha^2}{2}\partial^2 n - \frac{\alpha^3}{2.3}\partial^3 n \ldots \pm \frac{\alpha^m}{2.3\ldots m}\partial^s n.$$

C'est le *troisième* mode de transformation.

VI. Ayant transformé par une des trois méthodes (II. IV. V.) ${}^mU$ et ${}^sN$ en deux polynomes en y de la forme (281.), il n'y a qu'à *diviser* ${}^mU$ par ${}^sN$ suivant les puissances *ascendantes* de x, en s'arrêtant aussitôt que le quotient présente la puissance y^ϱ de y, Cela donnera une expression de la forme

$$285. \quad \frac{{}^mU}{{}^sN} = w_1 + w_2 y + w_3 y^2 \ldots + w_\varrho y^{\varrho-1} + \frac{Z.y^\varrho}{{}^sN}.$$

Pour éviter les fractions, on peut supposer

$$287. \quad y = Cz,$$

si C est le terme sans y dans ${}^sN$.

VII. En substituant enfin cette expression dans celle de la fraction proposée (261.), on aura

$$286. \quad \frac{{}^mU}{{}^sN} = \frac{w_1}{y^\varrho} + \frac{w_2}{y^{\varrho-1}} + \frac{w_3}{y^{\varrho-2}} \ldots + \frac{w_\varrho}{y} + \frac{Z}{{}^sN},$$

et c'est le développement complet de la fraction proposée en fractions partielles. Toutes les quantités w seront indépendantes de x, mais Z sera exprimé en y, donc il faut transformer encore Z en un polynome en x.

VIII. La sixième méthode de décomposition des fractions algébriques exige donc, dans le cas particulier $y = 1$, les calculs suivants.

I. Transformer ${}^mU$ et ${}^sN$ par l'une ou l'autre des trois méthodes (II. IV. V.) en deux polynomes en y.

2. Diviser le polynome transformé ${}^mU$ par celui ${}^sN$ suivant les puissances *ascendantes* de x, en s'arrêtant aussitôt que le nouveau quotient présente y^ϱ comme facteur. Les facteurs de y^0, y^1, y^2, ... y^ϱ et $y^{\varrho-1}$ des différents quotiens seront les numérateurs w_1, w_2, w_3, ... w_ϱ et Z des fractions partielles cherchées.

3. Transformer le dernier quotient Z, qui sera exprimée en y, en un autre polynome de même degré en x.

IX. On voit que dans le cas particulier $y = 0$ la sixième méthode de décomposition des fractions coïncide avec celle que Mr. Dirksen a donné dans son mémoire No. 6. tome I. cah. 1. de ce journal. Donc elle peut être regardée comme la généralisation de cette dernière méthode effectuée par les procedés qu'Euler a donnés dans les Mémoires de St. Petersbourg, tome 1. 1809. page 1 — 25.

29.

Appliquons la sixième méthode à notre premier exemple (59.).

I. Dans cet exemple on a

$$288.\quad \begin{cases} {}^mU = x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 42x^3 + 23x^2 - 21x + 35, \\ {}^sN = x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 51x^2 - 117x + 81, \\ y = x - 2, \quad \alpha = -2 \ (282.), \\ \varrho = 5. \end{cases}$$

II. Transformons suivant la troisième méthode (§. 28. V.) U et N en polynomes en y. Nous aurons

$$289.\quad \begin{cases} u = y^6 - 9y^5 + 30y^4 - 42y^3 + 23y^2 - 21y + 35, \\ \partial u = +6y^5 - 45y^4 + 120y^3 - 126y^2 + 46y - 21, \\ \partial^2 u = +30y^4 - 180y^3 + 360y^2 - 252y + 46, \\ \partial^3 u = +120y^3 - 540y^2 + 720y - 252, \\ \partial^4 u = +360y^2 - 1080y + 720, \\ \partial^5 u = +720y - 1080, \\ \partial^6 u = +720; \end{cases}$$

$$290.\quad \begin{cases} n = y^5 - 6y^4 + 2y^3 + 51y^2 - 117y + 81, \\ \partial n = +5y^4 - 24y^3 + 6y^2 + 102y - 117, \\ \partial^2 n = +20y^3 - 72y^2 + 12y + 102, \\ \partial^3 n = +60y^2 - 144y + 12, \\ \partial^4 n = +120y - 144, \\ \partial^5 n = +120; \end{cases}$$

donc suivant (283 — 4.)

$$291.\quad \begin{aligned}{}^{m}U = y^6 - 9y^5 + 30y^4 - 42y^3 + 23y^2 - 21y + 35 &= y^6 + 3y^5 - 2y^3 + 11y^2 - y + 5;\\ +12y^5 - 90y^4 + 240y^3 - 252y^2 + 92y - 42 &\\ +60y^4 - 360y^3 + 720y^2 - 504y + 92 &\\ +160y^3 - 720y^2 + 960y - 336 &\\ +240y^2 - 720y + 480 &\\ +192y - 288 &\\ +64 &\end{aligned}$$

$$292.\quad \begin{aligned}{}^{5}N = y^5 - 6y^4 + 2y^3 + 51y^2 - 117y + 81 &= y^5 + 4y^4 - 6y^3 - y^2 - y + 3;\\ +10y^4 - 48y^3 + 12y^2 + 204y - 234 &\\ +40y^3 - 144y^2 + 24y + 204 &\\ +80y^2 - 192y + 16 &\\ +80y - 96 &\\ +32 &\end{aligned}$$

III. Maintenant il y a à diviser ${}^{m}U$ par ${}^{5}N$. Mais pour éviter les fractions, supposons $y = 3z$ (287.). Cela donne

$$293.\quad \begin{cases}{}^{m}U = 5 - 3z + 99z^2 - 54z^3 + 729z^5 + 729z^6,\\ {}^{5}N = 3(1 - z - 3z^2 - 54z^3 + 108z^4 + 81z^5),\end{cases}$$

et on trouve

$$\text{Quot.} = 5 + 2z + 116z^2 + 338z^3 + 254z^4,$$

$$294.\quad \begin{array}{l|l} 1 - z - 3z^2 - 54z^3 & \\ +108z^4 + 81z^5 & 5 - 3z + 99z^2 - 54z^3 + 0z^4 + 729z^5 + 729z^6 \\ & -5 + 5z + 15z^2 + 270z^3 - 540z^4 - 405z^5 \\ \hline & +2z + 114z^2 + 216z^3 - 540z^4 + 324z^5 + 729z^6 \\ & -2z + 2z^2 + 6z^3 + 108z^4 - 216z^5 - 162z^6 \\ \hline & +116z^2 + 222z^3 - 432z^4 + 108z^5 + 567z^6 \\ & -116z^2 + 116z^3 + 348z^4 + 6264z^5 - 12528z^6 - 9396z^7 \\ \hline & 338z^3 - 84z^4 + 6372z^5 - 11961z^6 - 9396z^7 \\ & -338z^3 + 338z^4 + 1014z^5 + 18252z^6 - 36504z^7 - 27378z^8 \\ \hline & +254z^4 + 7386z^5 + 6291z^6 - 45900z^7 - 27378z^8 \\ & -254z^4 + 254z^5 + 762z^6 + 13716z^7 - 27432z^8 - 20574z^9 \\ \hline & 7640z^5 + 7053z^6 - 32184z^7 - 54810z^8 - 20574z^9 \end{array}$$

donc

$$295.\quad \frac{{}^{m}U}{{}^{5}N} = \frac{5}{3} + \frac{2z}{3} + \frac{116z^2}{3} + \frac{338z^3}{3} + \frac{254z^4}{3} + \frac{(7640 + 7053z - 32184z^2 - 54810z^3 - 20574z^4)z^5}{{}^{5}N}$$

IV. Puisque $z = \frac{y}{3}$ on a

$$296.\quad \frac{{}^{m}U}{{}^{5}N} = \frac{5}{3} + \frac{2y}{9} + \frac{116y^2}{27} + \frac{338y^3}{81} + \frac{254y^4}{243} + \frac{(7640 + 2351y - 3576y^2 - 2030y^3 - 254y^4)y}{243 \cdot {}^{5}N},$$

donc la valeur de la fraction proposée est

$$297.\quad \frac{{}^mU}{y^\rho . {}^sN} = \frac{5}{3y^5} + \frac{2}{9y^4} + \frac{116}{27y^3} + \frac{338}{81y^2} + \frac{254}{243y} + \frac{7640 + 2351y - 3576y^2 - 2030y^3 - 254y^4}{243 . {}^sN}.$$

En remettant la valeur $x-2$ de y on trouve

$$298.\quad \frac{{}^mU}{y^\rho . {}^sN} = \frac{x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 42x^3 + 23x^2 - 21x + 35}{(x-2)^5(x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 51x^2 - 117x + 81)}$$

$$= \frac{5}{3(x-2)^5} + \frac{2}{9(x-2)^4} + \frac{116}{27(x-2)^3} + \frac{338}{81(x-2)^2} + \frac{254}{243(x-2)}$$

$$+ \frac{-254x^4 + 2x^3 + 2508x^2 + 423x + 810}{243(x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 51x^2 - 117x + 81)},$$

comme il a été trouvé (85.).

V. Nous ne nous arrêterons pas à appliquer la sixième méthode à notre second exemple (63.). On voit bien que le calcul suivant cette méthode est encore assez fatigant, a cause de la recherche lu multiplicateur M, et de la transformation de U et N en polynomes en y et de Z en un polynome en x.

§. VII Septième méthode, celle de Mr. Clausen.

30.

Nous ne réproduirons pas ici l'analyse de cette méthode, parcequ'en peut la voir dans ce journal même, tome 8., cahier 2. pag. 142—145.

Cette méthode est sans doute différente de toutes les autres, et participe des avantages des deux précédentes, d'eviter le calcul des facteurs simples du dénominateur de la fraction proposée, et par conséquent celui des imaginaires qui y peuvent se présenter. Il y a seulement à remarquer qu'elle exigera encore des calculs fatigants dans la pratique. En effet, si l'on designe par ν le degré du dénominateur de la fraction proposée, on trouvera par les formules de l'auteur que la quantité indéterminée Z, qui se présente dans les résultats finals (11. pag. 144.) et qui, en vertu des équations (5. pag. 143.) n'est autre chose que celle qui y est exprimée par $\frac{P_n}{Q_n}$, sera généralement du degré $\nu-2$, Mais la résolution des equations finales (11.), c'est-à-dire le calcul des numérateurs P et P_1 cherchés des deux fractions partielles, s'exécutera en supposant *indéterminés* les coefficiens du polynome P_n, dont le nombre est $\nu-1$, et en cherchant ces $\nu-1$ coefficiens, ce qui se fera en supposant égaux à zéro un à un les coefficiens des $\nu-1$ premier termes de l'une ou de l'autre des deux équations (11.). Donc cette méthode exige d'abord les calcul au moins d'un des

deux polynomes r et r_1 suivant les formules (2. et 7.) et le calcul de la constante Q_n suivant les formules (2.) et après le calcul de $\nu - 1$ *coefficiens indéterminés*, tirés d'autant d'équations du premier degré. Elle exige donc environs autant de calculs que la méthode ordinaire des coefficiens indéterminés (§. I.). Nous nous abstiendront par cette raison de l'appliquer à nos exemples et nous passerons à une dernière méthode qui, dans la pratique, sera plus expéditive que les autres.

§. VIII. Huitième méthode.

31.

I. En multipliant par ${}^r y^e . {}^s N$ l'expression fondamentale (5.) on en tire

$$299. \quad {}^m U = {}^{r-1}w_1 . {}^s N + {}^{n-r-1}Z_1 . {}^r y,$$

et de là

$$300. \quad \frac{{}^m U - {}^{r-1}w_1 . {}^s N}{{}^r y} = {}^{n-r-1}Z.$$

II. Puisqu'il à été demontré que la décomposition de la fraction proposée suivant la formule (5.) est toujours possible, c'est-à-dire qu'il existe toujours deux polynomes entiers w et Z de degrés $r-1$ et $n-r-1$ tout au plus, qui satisfont à l'équation (5.) ou bien à celle (300.), on est en droit de conclure de l'équation (300.) que ${}^m U - {}^{r-1}w_1 . {}^s N$ sera nécessairement *divisible* par ${}^r y$, c'est-à-dire que, si l'on exécute effectivement la division de ${}^m U - {}^{r-1}w . {}^s N$ par ${}^r y$, le *reste*, qui se présente, *sera nécessairement zéro*. Donc si l'on écrit

$$301. \quad {}^m U - {}^{r-1}w_1 . {}^s N = {}^{n-r-1}Z_1 . {}^r y + {}^{r-1}R_1,$$

on aura nécessairement

$$302. \quad {}^{r-1}R_1 = 0.$$

III. Cette remarque offre immédiatement les moyens de trouver les numérateurs ${}^{r-1}w$ et ${}^{n-r-1}Z$ des fractions partielles cherchées, et de consommer ainsi la décomposition de la fraction proposée.

En effet le degré du numérateur ${}^{r-1}w$ de la première fraction partielle (5.) ne peut être plus fort que $r-1$, comme il a été démontré (Sect. I.); donc, en supposant

$$303. \quad {}^{r-1}w = \alpha_1 x^{r-1} + \alpha_2 x^{r-2} + \alpha_3 x^{r-3} \ldots . + \alpha_r$$

le nombre des coefficiens α, indépendants de x, et contenus dans ${}^{r-1}w$, ne peut être plus grand que r.

Ces coefficiens, considérés comme autant d'inconnues, se présenteront aussi bien dans le *reste* R_1 que dans les *quotient* Z de la division

de $U - wN$ par y. Mais le *reste* R, comme venant du diviseur y, qui est du degré r, ne peut être également d'un degré supérieur à $r-1$; donc il aura également r coefficiens différents. Ces r coefficiens, qui impliqueront les r inconnues α, doivent être égalés séparement à zéro, R_1 lui même devant être $= 0$. Donc l'équation $R_1 = 0$ (302.), qui aura nécessairement lieu, suffira toujours à déterminer les valeurs des r coefficiens inconnus de ${}^{r-1}w$. Et après avoir encore donné à ces coefficiens leurs valeurs, partout où ils se trouvent dans Z, on aura aussi le quotient ${}^{n-r-1}Z$.

IV. Il n'y a même pas à craindre que parmi les r équations déterminantes, que fournit l'équation ${}^{r-1}R = 0$, il s'en trouve *d'identiques*. Car si cela étoit, il seroit impossible de trouver complétement w et Z, ce qui n'est pas, la décomposition (5.) étant toujours *possible*.

V. Ayant trouvé w_1 et Z, il n'y a qu'à écrire Z à la place de U et à répéter sur Z l'opération qu'on vient de faire sur U (6.). On aura, en vertu de (301.),

$$304. \quad {}^{n-r-1}Z_1 - {}^{r-1}w_2 . {}^sN = {}^{n-2r-1}Z_2 . {}^ry + {}^{r-1}R_2$$

et

$$305. \quad {}^{r-1}R_2 = 0.$$

L'équation (305.) donnera, comme ci-dessus, les valeurs des r coefficiens inconnus de w_2, et en substituant ces valeurs des coefficiens dans Z, on aura aussi le quotient ${}^{n-2r-1}Z$.

VI. En continuant cette opération, on trouvera successivement les numérateurs $w_1, w_2, w_3, \ldots . w_\varrho$ de toutes les fractions partielles qui précédent la dernière, et enfin aussi, en même tems, le numérateur ${}^{s-1}Z$, de la *dernière* fraction partielle (8.) ce numérateur étant le *quotient* de la dernière division à faire.

VII. Puisque la *forme* des différents numérateurs w est toujours la même, savoir celle (303.), tous les produits $w_1 N, w_2 N, w_3 N, \ldots .$ auront aussi toujours la même forme, et cette remarque offre un moyen d'abréger encore le calcul. En effet, les résultats de la division de la *partie* $w_\mu N$ par y dans l'expression générale des formules (301., 304.)

$$306. \quad Z_{\mu-1} - w_\mu N = Z_\mu y + R_\mu$$

étant toujours les mêmes, il n'est pas nécessaire de diviser toujours de nouveau les quantités $Z_{\mu-1} - w_\mu N$, mais seulement la partie $Z_{\mu-1}$ de ces quantités, et une seule division de $w_\mu N$, une fois pour toutes, suffit. Les calculs seront simplifiés par là.

VIII. Supposant

$$307.\quad Z_{\mu-1} = P_{\mu-1}\,y + {}^{r-1}K_{\mu-1} \text{ et}$$

$$308.\quad w_\mu N = G\,y + {}^{r-1}H,$$

on aura

$$309.\quad Z_{\mu-1} - w_\mu N = (P_\mu - G)y + {}^{r-1}K_\mu - {}^{r-1}H.$$

L'équation

$$310.\quad {}^{r-1}K_{\mu-1} - {}^{r-1}H = 0, \text{ ou bien } {}^{r-1}K_{\mu-1} = {}^{r-1}H,$$

donnera les coefficiens inconnus de w_μ et après l'équation

$$311.\quad P_{\mu-1} - G = Z_\mu,$$

donnera Z_μ. Les parties G et H dans ces équations seront toujours les mêmes.

IX. Voici le tableau des équations à calculer. Supposant

$$312.\quad {}^{r-1}w\,{}^{s}N = {}^{s-1}G\,{}^{r}y + {}^{r-1}H, \text{ où } {}^{r-1}w = \alpha_1 x^{r-1} + \alpha_2 x^{r-2} + \alpha_3 x^{r-3}, \ldots + \alpha_r,$$

et

$$313.\quad \begin{cases} {}^{m}U = {}^{m-r}P_0 \,.\, {}^{r}y + {}^{r-1}K_0, \\ {}^{n-r-1}Z_1 = {}^{n-2r-1}P_1 \,.\, {}^{r}y + {}^{r-1}K_1, \\ {}^{n-2r-1}Z_2 = {}^{n-3r-1}P_2 \,.\, {}^{r}y + {}^{r-1}K_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ {}^{n-(\mu-1)r-1}Z_{\mu-1} = {}^{n-\mu r-1}P_{\mu-1} \,.\, {}^{r}y + {}^{r-1}K_{\mu-1}; \end{cases}$$

les équations

$$314.\quad {}^{r-1}K_0 = {}^{r-1}H, \quad {}^{r-1}K_1 = {}^{r-1}H, \quad {}^{r-1}K_2 = {}^{r-1}H, \ldots \quad {}^{r-1}K_{\varrho-1} = {}^{r-1}H,$$

donneront successivement les coefficiens inconnus de $w_1, w_2, w_3, \ldots w_\varrho$, et les équations

$$315.\quad Z_1 = {}^{m-r}P_0 - {}^{s-1}G, \quad Z_2 = {}^{n-2r-1}P_1 - {}^{s-1}G, \quad Z_3 = {}^{n-3r-1}P_2 - {}^{s-1}G, \ldots \ldots Z_\varrho = {}^{s-1}P - {}^{s-1}G,$$

donneront successivement $Z_1, Z_2, \ldots Z_\varrho$.

X. Si ${}^{r}y$ est du degré 1, c'est-à-dire si $r = 1$: toutes les quantités $w, H, K_0, K_1, K_2, \ldots, K_{\varrho-1}$ sont de degré 0, ou indépendantes de x. Donc les équations (314.) donnent immédiatement $w_1, w_2, w_3, \ldots w_\varrho$ sans aucun procédé d'élimination. Mais si $r > 1$, le calcul des coefficiens inconnus de $w_1, w_2, w_3, \ldots w_\varrho$ exige l'élimination entre r équations de premier degré. Cette élimination ne sera pas généralement trop fatigante, le degré r de y, et par suite le nombre des inconnues et des équations, n'étant pas ordinairement bien fort. D'ailleurs cette élimination, au moins dans le cas où r n'est pas un trop grand nombre, pourra s'exécuter suivant les formules générales connues.

XI. Comme la huitième méthode de décomposition des fractions algébriques rationnelles que nous venons de présenter n'exige pas des

transformations des polynomes donnés en x en d'autres en y, et réciproquement, ni le calcul du multiplicateur M propre à réduire la fraction $\frac{{}^mU}{{}^sN}$ à la forme $\frac{Py+K}{Qy+{}^\circ C}$, cette méthode sera ordinairement plus prompte et plus expéditive que les autres et par conséquent préférable. Et comme encore l'idée fondamentale réprésentée par l'équation (301.), sur laquelle elle est basée, est très simple et facile à retenir, la même méthode parait aussi être par préférence recommendable aux élémens.

32.

Appliquons la d'abord à notre *premier* exemple (59.).

I. Ici on a

$$316.\quad w = \alpha,\quad y = x-2,$$

et si l'on divise $w.{}^sN$ (58.) et ${}^mU$ (56.) par y, on trouve

$$317.\quad w.{}^sN = \alpha(x^4-4x^3-6x^2+39x-39)(x-2)+3\alpha,$$

$$318.\quad {}^mU = (x^5-7x^4+16x^3-10x^2+3x-15)(x-2)+5,$$

donc (312. et 313.)

$$319.\quad H = 3\alpha,\quad K_0 = 5$$

et suivant (314.) $s = 3\alpha$, donc

$$320.\quad \alpha = w_1 - \tfrac{5}{3}$$

et suivant (315.) en substituant la valeur trouvée de α dans (312.),

$$Z_1 = x^5-7x^4+16x^3-10x^2+3x-15-\tfrac{5}{3}(x^4-4x^3-6x^2+39x-39),$$

$$321.\quad Z_1 = \tfrac{1}{3}(3x^5-26x^4+68x^3-185x+150).$$

II. En divisant de nouveau Z_1 par y on a

$$322.\quad Z_1 = \tfrac{1}{3}((3x^4-20x^3+28x^2+56x-74)(x-2)+2),$$

donc (312., 313., 314.)

$$H = 3\alpha,\quad K_1 = \tfrac{2}{3}\ \text{et}$$

$$323.\quad \alpha = w_2 = \tfrac{2}{9}$$

et suivant (313.)

$$Z_2 = \tfrac{1}{3}(3x^4-20x^3+28x^2+56x-74)-\tfrac{2}{9}(x^4-4x^3-6x^2+39x-39),$$

$$324.\quad Z_2 = \tfrac{1}{9}(7x^4-52x^3+96x^2+90x-144).$$

III. En divisant Z_2 par y on a

$$325.\quad Z_2 = \tfrac{1}{9}((7x^3-38x^2+20x+130)(x-2)+116),$$

donc (312.—14.)

$$H = 3\alpha,\quad K_2 = \tfrac{116}{9}\ \text{et}$$

$$326.\quad \alpha = w_3 = \tfrac{116}{27}$$

et suivant (313.)

$$Z_3 = \tfrac{1}{9}(7x^3 - 38x^2 + 20x + 130) - \tfrac{116}{27}(x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 39x - 39),$$

327. $$Z_3 = +\tfrac{1}{27}(-116x^4 + 485x^3 + 582x^2 - 4464x + 4134).$$

IV. En divisant Z_3 par y on a

328. $$Z_3 = \tfrac{1}{27}((-116x^3 + 253x^2 + 1088x - 2248)(x-2) + 338),$$

donc (312.— 14.)

$$H = 3\alpha, \quad K_3 = \tfrac{338}{27} \text{ et}$$

329. $$\alpha = w_4 = \tfrac{338}{81}$$

et suivant (313.)

$$Z_4 = \tfrac{1}{27}(-116x^3 + 253x^2 + 1088x - 2288) - \tfrac{338}{81}(x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 39x - 39),$$

330. $$Z_4 = \tfrac{1}{81}(-338x^4 + 1004x^3 + 2787x^2 - 9918x + 6318).$$

V. Divisant enfin Z_4 par y on a

331. $$Z_4 = \tfrac{1}{81}((-338x + 328x^2 + 3443x - 3032)(x-2) + 254),$$

donc (312. — 14.)

$$H = 3\alpha, \quad K_4 = \tfrac{254}{81} \text{ et}$$

332. $$\alpha = w_5 = \tfrac{254}{243}$$

et suivant (313.)

$$Z_5 = \tfrac{1}{81}(-338x^3 + 328x^2 + 3443x - 3032) - \tfrac{254}{243}(x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 39x - 39),$$

333. $$Z_5 = \tfrac{1}{243}(-254x^4 + 2x^3 + 2508x^2 + 423x + 810).$$

VI. Les résultats (320., 323., 326., 329., 332. et 333.) étant substitués dans (8.), on a

334. $$\frac{x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 42x^3 + 23x^2 - 21x + 35}{(x-2)^5(x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 51x^2 - 117x + 81)}$$

$$= \frac{5}{3(x-2)^5} + \frac{2}{9(x-2)^4} + \frac{116}{27(x-2)^3} + \frac{338}{81(x-2)^2} + \frac{254}{243(x-2)}$$

$$+ \frac{-254x^4 + 2x^3 + 2508x^2 + 423x + 810}{243(x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 51x^2 - 117x + 81)},$$

comme il a été trouvé (85.).

33.

Appliquons aussi la huitième méthode de décomposition au second exemple (63.).

I. Ici on a

335. $$u = \alpha_1 x + \alpha_2, \quad y = x^2 - 2x + 5,$$

336. $$w.N = \alpha_1 x^6 + (3\alpha_1 + \alpha_2)x^5 + (4\alpha_1 + 3\alpha_2)x^4 + 4\alpha_2 x^3 - 2\alpha_1 x^2$$
$$- (3\alpha_1 + 2\alpha_2)x - 3\alpha_2$$

et si l'on divise $u.N$ (336.) et ^{m}U (60.) par $y = x^2 - 2x + 5$ on trouve (312. et 13.)

$$337.\quad \begin{cases} {}^{s-1}G = \alpha_1 x^4 + (5\alpha_1 + \alpha_2)x^3 + (9\alpha_1 + 5\alpha_2)x^2 + (9\alpha_2 - 7\alpha_1)x - (61\alpha_1 + 7\alpha_2), \\ {}^{r-1}H = -(90\alpha_1 + 41\alpha_2)x + 305\alpha_1 + 32\alpha_2, \\ {}^{m-r}P = 17x^6 - 111x^5 + 124x^4 - 161x^3 - 408x^2 - 45x + 7, \\ {}^{r-1}K_0 = -183x + 96, \end{cases}$$

donc on a en vertu du l'équation ${}^{r-1}H = {}^{r-1}K_0$ (314.),

$$338.\quad -(90\alpha_1 + 61\alpha_2)x + 305\alpha_1 + 32\alpha_2 = -183x + 96,$$

donc

$$339.\quad \begin{cases} 90\alpha_1 + 61\alpha_2 = 183, \\ 305\alpha_1 + 32\alpha_2 = 96, \end{cases}$$

et de là on tire $\alpha_2 = 3 - \frac{90}{61}\alpha_1$, $\alpha_2 = 3 - \frac{305}{32}\alpha_1$, donc

$$340.\quad \alpha_1 = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_2 = 3$$

et par suite

$$341.\quad w_1 = 3.$$

En mettant (340.) dans ${}^{s-1}G$ (337.) on trouve

$$342.\quad {}^{s-1}G = 3x^3 + 15x^2 + 27x - 21,$$

donc suivant (315., 337. et 342.)

$$343.\quad Z_1 = 17x^6 - 111x^5 + 124x^4 - 164x^3 - 423x^2 - 72x + 28.$$

II. En divisant Z_1 (343.) par $y = x^2 - 2x + 5$ on trouve (313.)

$$344.\quad \begin{cases} {}^{n-2r-1}P_1 = 17x^5 - 77x^3 - 115x^2 - 9x + 134, \\ {}^{r-1}K_1 = +241x - 642, \end{cases}$$

donc l'équation ${}^{r-1}K_1 = {}^{r-1}H$ (314.) donne en vertu de (344. et 337.)

$$345.\quad -(90\alpha_1 + 61\alpha_2)x + 305\alpha_1 + 32\alpha_2 = 241x - 642,$$

et l'équation (345.) donne

$$346.\quad \begin{cases} 90\alpha_1 + 61\alpha_2 = -241, \\ 305\alpha_1 + 32\alpha_2 = -642. \end{cases}$$

De là on tire $(90.32 - 61.305)\alpha_1 = -(32.241 - 61.642)$ c'est-à-dire $-15725\alpha_1 = 31450$, donc

$$347.\quad \alpha_1 = -2$$

et substituant dans (346.) $-180 + 61\alpha_2 = -241$, donc

$$348.\quad \alpha_2 = -1$$

et par suite

$$349.\quad w_2 = -2x - 1.$$

En mettant les valeurs de α_1 et α_2 dans ${}^{s-1}G$ (337.) on trouve

$$350.\quad {}^{s-1}G = -2x^4 - 11x^3 - 23x^2 + 5x + 129,$$

donc suivant (315., 344. et 350.)

$$351.\quad Z_2 = 19x^4 - 66x^3 - 92x^2 - 14x + 5.$$

III. En divisant Z_2 (351.) par $y = x^2 - 2x + 5$ on trouve

$$352. \quad \begin{cases} {}^{n-3r-1}P_2 = 19x^2 - 28x - 243, \\ {}^{r-1}K_2 = -360x + 1220, \end{cases}$$

donc l'équation ${}^{r-1}K_2 = {}^{r-1}H$ (314.) donne, en vertu de (337. et 352.),

$$353. \quad -(90\alpha_2 + 61\alpha_2)x + 305\alpha_1 + 32\alpha_2 = -360x + 1220$$

et l'équation (353.) donne

$$354. \quad \begin{cases} 90\alpha_1 + 61\alpha_2 = 360, \\ 305\alpha_1 + 32\alpha_2 = 1220. \end{cases}$$

De là on tire $\alpha_1 = 4 - \frac{61}{90}\alpha_2$ et $\alpha_1 = 4 - \frac{32}{305}\alpha_2$, donc

$$355. \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 = 4$$

et par suite

$$356. \quad w_3 = +4x.$$

En mettant les valeurs de α_1 et α_2 dans ${}^{r-1}G$ (337.) on trouve

$$357. \quad {}^{r-1}G = 4x^4 + 20x^3 + 36x^2 - 28x - 244,$$

donc suivant (315., 352. et 357.)

$$358. \quad Z_3 = -4x^4 - 20x^3 - 17x^2 + 1.$$

IV. Les résultats (341., 349., 356. et 358.) étant substitués dans (8.) on a

$$359. \quad \frac{1, x^8 - 145x^7 + 431x^6 - 964x^5 + 534x^4 - 34x^3 - 1943x^2 - 422x + 131}{(x^2 - 2x + 5)^3 (x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 2x - 3)}$$

$$= \frac{3}{(x^2 - 2x + 5)^3} - \frac{2x + 1}{(x^2 - 2x + 5)^2} + \frac{4x}{x^2 - 2x + 5} - \frac{4x^4 + 20x^3 + 17x^2 - 1}{x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 2x - 3}.$$

C'est le développement complet de la fraction proposée (63.) en fractions partielles.

34.

Nous terminerons iei le présent mémoire pour ne pas trop le grossir. Nous laisserons à l'avenir les nombreuses applications dans l'analyse qui pourront encore être faites des résultats de la décompositon des fractions et des calculs et transformations qui s'y présentent. La première application des *résultats* qui se présentera sera celle à l'intégration des différentielles rationnelles mais fractionnaires, où il y aura encore plusieurs choses à dire. Mais les *calculs* et les *transformations*, dont on a fait usage ici, pourront encore être utiles en d'autres parties de l'analyse, par ex. dans la théorie du plus grand commun diviseur, dans celle de l'élimination etc. Il se pourra même qu'elles soient utiles dans la théorie des nombres, en mettant des *polynomes* à la places des *nombres entiers*. La décomposition

d'un polyneme dans la somme d'un produit d'un diviseur donné et du quotient, et d'un reste qui s'est présentée dans le cours des calculs précédents a une analogie complète avec cette décomposition des nombres entiers laquelle donne naissance aux *congruences;* même l'équation (192.) par ex. qui s'est présentée ci-dessus dans la recherche du *multiplicateur* propre à transformer une fraction donnée en une autre dont le dénominateur est de la forme $Qy + {}^{*}C$, y étant un polynome donné et ${}^{*}C$ indépendant de x, est, quant à la forme, toute semblable à une *congruence de premier degré* en nombres entiers, et même la résolution de cette équation par développement en fraction continue a une analogie complète avec celles des congruences du premier degré en nombres entiers. Il se pourrait bien que plusieurs autres analogies encore se présentassent, en opérant sur les polynomes comme on le fait sur les nombres entiers. Les polynomes qui n'ont pas des diviseurs communs prendroient la place des nombres *premiers rélatifs;* les polynomes du premier degré celle des *nombres premiers absolus etc.* Nous laissons tout cela à l'avenir, en récommandant ces observations à l'attention des géomètres.

5.
Über solche Puncte, die bei Curven einer höhern Ordnung als der zweiten den Brennpuncten der Kegelschnitte entsprechen.

(Von dem Herrn Professor *Plücker* zu Berlin.)

---

1. So unbeholfen auf der einen Seite die Einführung der Brennpuncte in die Theorie der Kegelschnitte ist und immer bleiben wird, wenn man dieselben durch Gleichungen zwischen gewöhnlicher Punct-Coordinaten darstellt, so natürlich geht auf der andern Seite die Definition jener Puncte aus der Darstellung der Kegelschnitte durch Gleichungen zwischen den neuen Linien-Coordinaten hervor. Die Beantwortung der Frage „welche einfachere Formen kann die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen diesen Coordinaten durch bloſse Verlegung des Anfangspunctes annehmen," enthält die Discussion der verschiedenen Fälle, welche jene Gleichung umfaſst, und giebt zugleich die Definition und die Bestimmung der Brennpuncte *). Die Definition, welche auf diesem Wege uns entgegentritt, knüpft sich an ein paradox scheinendes analytisches Factum an, daſs nemlich, wenn

$$\operatorname{tang}\varphi = \pm\sqrt{-1},$$

man immer hat:

$$\operatorname{tang}(\varphi+\psi) = \pm\sqrt{-1},$$

welchen reellen oder imaginären Bogen ψ auch darstellen mag. Denn es ist:

$$\operatorname{tang}(\varphi+\psi) = \frac{\operatorname{tang}\psi+\operatorname{tang}\varphi}{1-\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\psi} = \frac{\operatorname{tang}\psi\pm\sqrt{-1}}{1\mp\operatorname{tang}\psi\sqrt{-1}} = \pm\sqrt{-1}.$$

Nun sind die Brennpuncte eines Kegelschnittes solche Puncte, welche die Eigenschaft haben, daſs wenn man die Richtung der beiden, durch einen solchen Punct gehenden Tangenten des Kegelschnittes bestimmt, man für die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche diese Tangenten mit der ersten Axe, und folglich mit jeder beliebigen geraden Linie, bilden $\pm\sqrt{-1}$ erhält. Auf gewisse Weise kann man also sagen, „daſs jede durch den Brennpunct gehende (imaginäre) gerade Linie eine Tangente des Kegelschnittes ist."

---

*) Anal. geom. Entwicklungen. Zweiter Band. II. §. 1.

2. Die in dem Vorstehenden aufgestellte Definition der Brennpuncte scheint mir die einzig allgemeine zu sein. Um das Imaginäre in der Aussage derselben zu vermeiden, können wir dieselbe auf mehrfache Weise geometrisch umschreiben *). Wir wollen hier dieselbe Definition auf beliebige algebraische Curven ausdehnen.

Derjenige Punct in der Ebene irgend einer gegebenen algebraischen Curve, welcher die Eigenschaft hat, dafs zwei durch denselben gehende Tangenten der Curve mit einer beliebigen geraden Linie Winkel bilden, deren beide trigometrischen Tangenten $\pm\sqrt{-1}$ sind, heifst ein Brennpunct der Curve.

3. Wir wollen irgend eine solche Curve betrachten, an welche sich, von einem gegebenen Puncte aus, im Allgemeinen, n Tangenten legen lassen. Diese Curve können wir alsdann durch die allgemeine Gleichung des n^{ten} Grades zwischen den Linien-Coordinaten w und v darstellen. (w und v beziehen sich bekanntlich auf irgend eine beliebige Tangente der Curve, $(-w)$ bedeutet das Segment, das diese Tangente von der zweiten Coordinaten-Axe abschneidet, $(-v)$ die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen sie mit der ersten Axe bildet). Diese Gleichung sei, indem wir rechtwinklige Coordinaten-Axen voraussetzen und, der Kürze wegen, das Aggregat aller Glieder, welche w enthalten, in das Symbol Ω zusammenfassen, folgende:

1. $\Omega + Av^n + Bv^{n-1} + Cv^{n-2} + Dv^{n-3} Ev^{n-4} + \ldots + Mv + N = 0.$

Um den Anfangspunct der Coordinaten in irgend einen Punct (y, x) zu verlegen, brauchen wir blofs

$$w \text{ mit } w - xv - y \text{ **)}$$

zu vertauschen. Die resultirende Gleichung hat alsdann dieselbe Form. Sie sei folgende:

2. $\Omega' + A'v^n + B'v^{n-1} + C'v^{n-2} + D'v^{n-3} + E'v^{n-4} + \ldots + M'v + N' = 0.$

Wenn wir in dieser Gleichung $w = 0$ setzen, so verschwindet blofs Ω', und zur Bestimmung der Richtung der durch den neuen Anfangspunct der Coordinaten gehenden Tangenten der gegebenen Curve erhalten wir folgende Gleichung:

3. $A'v^n + B'v^{n-1} + C'v^{n-2} + D'v^{n-3} + E'v^{n-4} + \ldots + M'v + N' = 0.$

*) Entw. 2ter Band. S. 64.
**) Entw. 2ter Band. S. 40.

Setzen wir in diese Gleichung $\pm\sqrt{-1}$ für v, so erhalten wir, wenn die Gleichung befriedigt werden soll, indem wir einerseits die imaginären, andrerseits die reellen Glieder annulliren, folgende beiden Bedingungen:

$$4.\quad A' - C' + E' - \ldots\ldots = 0,$$
$$5.\quad B' - C' + \ldots\ldots\ldots = 0.$$

Diese beiden Gleichungen müssen also, der Definition der Brennpuncte gemäfs, befriedigt werden, wenn der neue Anfangspunct ein Brennpunct sein soll. Die einzelnen Glieder in den letzten Gleichungen erhalten ihre geometrische Bedeutung aus der allgemeinen Theorie der Gleichungen. Denn bezeichnen wir die n Wurzeln der Gleichung (3.) durch

$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ \ldots\ldots v_n,$$

so ist behanntlich

$\frac{B'}{A'}$ gleich der Summe dieser Wurzeln,

$\frac{C'}{A'}$ gleich der Summe der Producte je zweier dieser Wurzeln,

$\frac{D'}{A'}$ - - - - - - - - - - dreier - - -

$\frac{E'}{A'}$ - - - - - - - - - - vier - - -

vorausgesetzt dafs wir alle Wurzeln mit entgegengesetzten Zeichen nehmen.

Für $n = 3$ reduciren sich die beiden Gleichungen (4.) und (5.) auf

$$6.\quad A' - C' = 0,$$
$$7.\quad B' - D' = 0;$$

für $n = 4$ auf;

$$8.\quad A' - C' + E' = 0,$$
$$9.\quad B' - D = 0.$$

Die Gleichungen (6.) und (7.) sind identisch mit:

$$10.\quad 1 - (v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_2 v_3) = 0,$$
$$11.\quad v_1 + v_2 + v_3 - v_1 v_2 v_3 = 0;$$

und die Gleichungen (8.) und (9.) mit

$$12.\quad 1 - (v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_1 v_4 + v_2 v_3 + v_2 v_4 + v_3 v_4) + v_1 v_2 v_3 v_4 = 0,$$
$$13.\quad v_1 + v_2 + v_3 + v_4 - (v_1 v_2 v_3 + v_1 v_2 v_4 + v_2 v_3 v_4) = 0.$$

Die vier letzten Gleichungen ändern sich nicht, wenn wir die Zeichen der verschieden markirten v alle ändern. Indem wir diese v aber negativ nehmen, bezeichnen dieselben die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die durch den neuen Anfangspunct gehenden, die gegebene Curve berührenden geraden Linien mit der ersten Coordinaten-Axe bilden.

4. Wenn aber, ganz allgemein,

$$w_1, \; w_2, \; w_3, \; w_4, \; \ldots\ldots \; w_n$$

Winkel sind, zu welchen als trigonometrische Tangenten

$$v_1, \; v_2, \; v_3, \; v_4, \; \ldots\ldots \; v_n$$

gehören, so ist

$$14. \quad \text{tang}(w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + \ldots\ldots + w_n) = \frac{B - D + F - .}{A - C + E -},$$

wenn $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, $\frac{D}{A}$, $\frac{E}{A}$, $\frac{F}{A}$ u. s. w. die obige Bedeutung haben. Dieses Resultat ergiebt sich auf dem Wege der Induction ohne alle Mühe, und ist auch schon von Joh. Bernoulli mitgetheilt worden *).

Hiernach stellen sich die in der vorigen Nummer enthaltenen geometrischen Beziehungen sehr einfach dar. Die Gleichungen (4.) und (5.) sind nemlich mit folgenden beiden gleichbedeutend:

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + \ldots\ldots + w_n = \frac{m+1}{2}\pi,$$

$$w + w + w + w + \ldots\ldots + w_n = \frac{m}{2}\pi,$$

wenn m eine ganze und gerade Zahl bedeutet. Die erste dieser beiden Gleichungen sagt allein für sich aus, dafs die Summe derjenigen Winkel, welche die n durch den neuen Anfangspunct der Coordinaten gehenden Tangenten der Curve mit der ersten Axe bilden, gleich $(m+1)$ rechten Winkeln ist, die zweite Gleichung, für sich allein genommen, dafs dieselbe Summe gleich m rechten Winkeln ist. Da wir für den Winkel, den eine gerade Linie mit der ersten Axe bildet, einen positiven und einen negativen nehmen können, deren arithmetische Summe gleich π ist, so können wir, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, in den letzten beiden Gleichungen $m = 0$ setzen, so dafs dieselben in folgende übergehen:

$$15. \quad w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + \ldots\ldots + w_n = \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$16. \quad w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + \ldots\ldots + w_n = 0.$$

5. Nun sind zuvörderst zwei Fälle zu unterscheiden, 1°. kann n eine gerade und 2°. eine ungerade Zahl sein. Im ersten Falle erhalten wir, wenn wir die n Winkel, welche jene v durch den neuen Anfangspunct gehenden Tangenten mit der zweiten Coordinaten-Axe bilden, durch

$$\vartheta_1, \; \vartheta_2, \; \vartheta_3, \; \vartheta_4, \; \ldots\ldots \; \vartheta_n$$

bezeichnen, nach einander aus den beiden vorstehenden Gleichungen

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4 + \ldots\ldots + \vartheta_n = \tfrac{1}{2}\pi - n.\tfrac{1}{2}\pi \text{ oder } = \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4 + \ldots\ldots + \vartheta_n = -n.\tfrac{1}{2}\pi \text{ oder } = 0.$$

---

*) *Opera T. II. n.* CXXVII.

Diese beiden Gleichungen sind also keine andern als die bezüglichen Gleichungen (15.) und (16.), selbst wenn wir alle Winkel statt von der ersten Axe an, von der zweiten Axe an rechnen. Zu demselben Resultate kommen wir auch auf anderm Wege. Wenn wir z. B. die beiden Gleichungen (12.) und (13.) durch das Product $v_1 v_2 v_3 v_4$ dividiren, so kommt:

$$12.\,a.\quad \frac{1}{v_1}.\frac{1}{v_2}.\frac{1}{v_3}.\frac{1}{v_4}-\left[\frac{1}{v_1}.\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_1}.\frac{1}{v_3}+\frac{1}{v_1}.\frac{1}{v_4}+\frac{1}{v_2}.\frac{1}{v_3}+\frac{1}{v_2}.\frac{1}{v_4}+\frac{1}{v_3}.\frac{1}{v_4}\right]+1=0,$$

$$13.\,a.\quad \frac{1}{v_1}.\frac{1}{v_2}.\frac{1}{v_3}+\frac{1}{v_1}.\frac{1}{v_2}.\frac{1}{v_4}+\frac{1}{v_2}.\frac{1}{v_3}.\frac{1}{v_4}-\left[\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}+\frac{1}{v_4}\right]=0.$$

Diese Gleichungen sind keine andern als die ursprünglichen, wenn wir in diesen an die Stelle der Tangenten Cotangenten setzen.

Wenn zweitens n eine ungerade Zahl ist, so verwandeln sich die Gleichungen (15.) und (16.) in folgende:

$$\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3+\vartheta_4+\ldots\ldots+\vartheta_n = 0,$$

$$\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3+\vartheta_4+\ldots\ldots+\vartheta_n = \tfrac{1}{2}\pi,$$

und man sieht, dafs diese Gleichungen wiederum keine andern sind, als die ursprünglichen, wenn wir die Ordinaten-Axe mit der Abscissen-Axe vertauschen. Aber hier stimmt die erste der neuen Gleichungen mit der zweiten der alten, und die zweite von jenen mit der ersten von diesen überein. Dasselbe finden wir bestätigt, wenn wir z. B. die beiden Gleichungen (10.) und (11.) durch $v_1\, v_2\, v_3$ dividiren, wonach

$$10.\,a.\quad \frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}-\frac{1}{v_1}.\frac{1}{v_2}.\frac{1}{v_3} = 0,$$

$$11.\,b.\quad 1-\left[\frac{1}{v_1}.\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_1}.\frac{1}{v_3}+\frac{1}{v_2}.\frac{1}{v_3}\right]=0$$

kommt.

Der neue Anfangspunct der Coordinaten ist durch die beiden Gleichungen (4.) und (5.) bestimmt. Jede dieser Gleichungen für sich stellt, wenn wir die Coordinaten desselben, y und x, als veränderlich betrachten, eine Curve dar, und jeder Durchschnitt dieser zwei Curven kann für den neuen Anfangspunct genommen werden, und ist also ein Brennpunct der ursprünglich gegebenen Curve.

Die Gleichung (5.), die wir zuerst betrachten wollen, steigt, wovon man sich leicht überzeugt, in Beziehung auf y und x, im Allgemeinen, bis zum n^{ten} Grade. Sie ist die Gleichung des geometrischen Ortes für diejenigen Puncte, durch welche solche n Tangenten der gegebenen

Curve gehen, welche mit der ersten Axe Winkel bilden, deren Summe gleich Null ist. Diese Curve geht also durch die Brennpuncte der gegebenen Curve n^{ter} Classe. Nach den beiden ersten Nummern thut dasselbe jede andere analoge Curve n^{ter} Ordnung, wenn wir die erste Axe beliebig ändern. Denn wenn der Anfangspunct einer der Brennpuncte der gegebenen Curve n^{ter} Classe ist, so ändert diese Curve die durch das Zusammenbestehen der Gleichungen (4.) und (5.) bestimmte Form ihrer Gleichung auch dann nicht, wenn man das Axen-System beliebig um den Anfangspunct der Coordinaten sich drehen läfst.

Die Gleichung (4.) stellt unter den gemachten Voraussetzungen eine solche Curve n^{ter} Ordnung dar, durch deren jeden Punct solche n Tangenten der gegebenen Curve n^{ter} Classe gehen, welche mit der ersten Axe n Winkel bilden, deren Summe gleich $\frac{1}{2}\pi$ ist. Wenn n eine ungerade Zahl ist, so können wir dieselbe Curve dadurch bestimmen, dafs wir sagen, die Summe der Winkel, welche jene n Tangenten mit der zweiten Axe bilden, sei gleich Null. Alsdann erhalten wir eine solche Curve, welche unter den früher bezeichneten Curven n^{ter} Ordnung schon vorkommt. Wenn aber n eine gerade Zahl ist, so ist diefs nicht der Fall, und wir erhalten, wenn wir nach und nach der ersten Axe alle möglichen Richtungen geben, unendlich viele neue Curven n^{ter} Ordnung, welche sich einander alle in den Brennpuncten der gegebenen Curve n^{ter} Classe schneiden.

7. Wenn wir zusammenfassen, erhalten wir also die nachstehenden Resultate.

I. **Der geometrische Ort für solche Puncte, welche die Eigenschaft haben, dafs die Summe der n Winkel, welche die durch jeden derselben an eine gegebene Curve n^{ter} Classe gelegten n Tangenten mit einer gegebenen geraden Linie bilden, gleich Null ist, ist eine Curve n^{ter} Ordnung. Wenn wir nach einander der gegebenen geraden Linie alle möglichen Richtungen geben, so erhalten wir solcher geometrischer Örter unendlich viele. Alle diese Örter schneiden sich, im Allgemeinen, in n^2 Puncten, den Brennpuncten der Curve n^{ter} Classe. Durch zwei jener Örter sind diese Brennpuncte also völlig bestimmt. Diese Bestimmung geschieht in dem Vorstehenden durch die Zusammenstellung der beiden Gleichungen (4.) und (5.) in dem Falle, wo n eine ungerade Zahl ist.**

II. Der geometrische Ort für solche Puncte, welche die Eigenschaft haben, dafs die Summe der n Winkel, welche die durch jeden derselben an eine gegebene Curve n^{ter} Classe gelegten n Tangenten mit einer gegebenen geraden Linie bilden, gleich $\frac{1}{2}\pi$ ist, ist eine Curve n^{ter} Ordnung. Wenn wir nach einander der gegebenen geraden Linie alle möglichen Richtungen geben, so erhalten wir solcher geometrischer Örter unendlich viele, die aber nur dann von den unter I. bestimmten verschieden sind, wenn n eine gerade Zahl ist. Diese neuen Örter gehen alsdann ebenfalls durch die n^2 Brennpuncte der gegebenen Curve n^{ter} Classe. Diese n^2 Brennpuncte sind durch irgend zwei jener neuen Örter vollständig bestimmt, oder auch — wie in dem Vorstehenden, in dem Falle, dafs n eine gerade Zahl ist, durch die Zusammenstellung der Gleichungen (4.) und (5.) — durch einen der neuen und einen der unter I. bestimmten Örter.

8. Eine Curve n^{ter} Classe hat, im Allgemeinen, zwar n^2 Brennpuncte. Diese Anzahl reducirt sich aber in besondern Fällen. Das Gesetz stellt sich hierbei sogleich heraus. Es kommt nemlich auf die Potenz an, in welcher n in der Gleichung der Curve zwischen den Linien-Coordinaten w und v vorkommt; oder geometrisch ausgedrückt, nach der Zahl der Tangenten, welche sich, parallel mit einer gegebenen geraden Linie an die Curve legen lassen. Giebt es solcher Tangenten, im Allgemeinen, m, so giebt es m^2 Brennpuncte. Eine Curve zweiter Classe, im Allgemeinen, hat vier Brennpuncte, eine Parabel insbesondere nur einen Brennpunct. Eine Curve dritter Classe hat neun, vier, oder nur einen Brennpunct u. s. w.

9. Ich will als Beispiel die Curven dritter Classe nehmen und für die allgemeinste Gleichung derselben:

$$\alpha w^3 + \beta v w^2 + \gamma w^2 + \delta v^2 w + \varepsilon v w + \zeta w + \eta v^3 + \vartheta v^2 + \varkappa v + \lambda = 0.$$

Wenn wir den Anfangspunct in irgend einen Punct (y, x) verlegen und demzufolge $(w - xv - y)$ für w schreiben, so kommt:

$$\begin{aligned} 0 = \Omega &- (\alpha x^3 - \beta x^2 + \delta x - \eta) v^3 \\ &+ (3\alpha x^2 y + 2\beta x y + \gamma x^2 - \delta y - \varepsilon x + \vartheta) v^2 \\ &+ (3\alpha x y^2 + 2\gamma x y + \beta y^2 - \varepsilon y - \zeta x + \varkappa) v \\ &- (\alpha y^3 - \gamma y^2 + \zeta y - \lambda), \end{aligned}$$

indem wir alle mit w behafteten Glieder durch Ω bezeichnen. Zur Bestimmung der Brennpuncte erhalten wir hiernach folgende beiden Gleichungen:

$$(6. a.) \quad \alpha x^3 + 3\alpha x y^2 + \beta y^2 - \beta x^2 + 2\gamma x y + (\delta - \zeta)x - \varepsilon y + \varkappa - \eta = 0,$$

$$(7. a.) \quad \alpha y^3 + 3\alpha x^2 y - \gamma y^2 + \gamma x^2 + 2\beta x y - \varepsilon x - (\delta - \zeta)y + \vartheta - \lambda = 0.$$

Wir erhalten also im Allgemeinen **neun** Brennpuncte. Diese Anzahl reducirt sich auf **vier**, wenn

$$\alpha = 0,$$

und auf **eins**, wenn zugleich:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0;$$

wobei die gegebene Curve immer noch von der dritten Classe bleibt.

Bonn, im März 1832.

6.

Über die Integration der Gleichung $\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = (\alpha + \beta x) y$.

(Vom Herrn Prof. *H. F. Scherk* in Halle.)

Dafs diese Gleichung durch Reihen überaus leicht zu integriren ist, weifs Jedermann. Nicht so bekannt scheint zu sein, dafs die unendlichen Reihen, auf welche man hierbei kömmt, und deren Anzahl der des Grades n der gegebenen Gleichung gleich kömmt, durch bestimmte Integrale summirt werden können, so dafs das Resultat eine Summe von n einzelnen bestimmten Integralen ist, die noch überdies in einer sehr einfachen Beziehung zu einander stehen.

Setzt man nemlich $\alpha + \beta x = \gamma v$, so hat man $\frac{\partial^n y}{\partial v^n} = \frac{\gamma^{n+1}}{\beta^n} v y$; wenn daher $\gamma^{n+1} = \beta^n$ angenommen wird, so geht die gegebene Gleichung in $\frac{\partial^n y}{\partial v^n} = v y$ über, so dafs man blofs die Gleichung

$$1. \quad \frac{\partial^n y}{\partial x^n} = x y$$

zu integriren hat. Es sei nunmehr

$$2. \quad y = A + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + A_{n+1} x^{n+1} + \text{etc.},$$

so erhält man, wenn man sich der Gaufs'schen Function Π bedient, für welche

$$\Pi_0 = 1$$

und

$$3. \quad \Pi_n = n \Pi_{(n-1)}$$

für jeden beliebigen Werth von n ist, zur Bestimmung der Coefficienten A, A_1, ... die Gleichungen

$$\begin{aligned} A_n &= 0, \\ \Pi_{(n+1)} A_{n+1} &= A, \\ \Pi_{(n+2)} A_{n+2} &= \Pi_2 . A_1, \\ &\ldots\ldots \\ \Pi_{(n+k)} A_{n+k} &= \Pi_k . A_{k-1}. \end{aligned}$$

Wird hierin k nach einander $= n+1$, $2n+2$, $3n+3$, ... gesetzt, so ergiebt sich, da $A_n = 0$ ist,

$$4. \quad A_{2n+1} = A_{3n+2} = A_{4n+3} = \ldots = 0.$$

Ferner ist, wenn $k < n$, A_k unbestimmt, und

$$5. \begin{cases} A_{n+k+1} = \frac{\Pi_{(k+1)}}{\Pi_{(n+k+1)}} A_k = \Pi_k . \frac{k+1}{\Pi_{(n+k+1)}} A_k, \\ A_{2n+k+2} = \frac{\Pi_{(n+k+2)}}{\Pi_{(2n+k+2)}} A_{n+k+1} = \Pi_k . \frac{k+1 . n+k+2}{\Pi_{(2n+k+2)}} A_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{rn+k+r} = \Pi_k . \frac{k+1 . n+k+2 . 2n+k+3 \ldots (r-1)n+k+r}{\Pi_{(rn+k+r)}} A_k. \end{cases}$$

Nun kann aber, in Folge der Gleichungen (4.), y in n einzelne Reihen

$$6. \quad y = R + R_1 + R_2 + \ldots + R_k + \ldots + R_{n-1}$$

zerlegt werden, wo

$$\begin{aligned} R &= A + A_{n+1} x^{n+1} + A_{2n+2} x^{2n+2} + \text{etc.}, \\ R_1 &= A_1 x + A_{n+2} x^{n+2} + A_{2n+3} x^{2n+3} + \text{etc.}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_k &= A_k x^k + A_{n+k+1} x^{n+k+1} + A_{2n+k+2} x^{2n+k+2} + \text{etc.}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{n-1} &= A_{n-1} x^{n-1} + A_{2n} x^{2n} + A_{3n+1} x^{3n+1} + \text{etc.} \end{aligned}$$

ist, in welchen die Coefficienten jeder einzelnen Reihe durch die Gleichungen (5.) mit einander verbunden sind. Betrachten wir zu dem Ende die allgemeine Reihe R_k, so ist diese, wenn Σ_0 anzeigt, daſs dem r alle möglichen ganzen positiven Werthe beigelegt, und die Resultate addirt werden sollen:

$$7. \quad R_k = \overset{r}{\Sigma}_0 A_{rn+k+r} x^{rn+k+r} = \overset{r}{\Sigma}_0 \Pi_k . \frac{k+1 . n+k+2 \ldots (r-1)n+k+r}{\Pi_{(rn+k+r)}} A_k x^{rn+k+r}.$$

Es ist aber

$$8. \quad k+1 . n+k+2 \ldots (r-1)n+k+r = (n+1)^r [m . m+1 . m+2 \ldots m+r-1],$$

wenn Kürze halber $\frac{k+1}{n+1} = m$ gesetzt wird. Wird nun die Function φ durch die Gleichung bestimmt

$$9. \quad m . m+1 . m+2 \ldots m+r-1 = \frac{\varphi(m+r-1)}{\varphi(m-1)},$$

so hat man auch

$$m . m+1 . m+2 \ldots m+r = \frac{\varphi(m+r)}{\varphi(m-1)},$$

folglich

$$\varphi(m+r) = (m+r)\varphi(m+r-1).$$

Die Function φ leistet also der Gleichung (2.) Genüge, so daſs

$$\varphi(n) = B\Pi_n,$$

wo B eine von n unabhängige Constante ist. Nun aber ist bekanntlich (siehe z. B. Gaufs: *Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc*, §. 28.):

$$\Pi_{(n-1)} = \int_0^\infty u^{n-1} e^{-u} \partial u,$$

wenn n eine beliebige positive Zahl ist. Da dies in unserm Falle für $m + r = \frac{k+1}{n+1} + r$ immer Statt findet, so haben wir

$$\varphi(m+r-1) = B \int_0^\infty u^{m+r-1} e^{-u} \partial u.$$

Setzt man also hierin $r = 0$, so hat diese Annahme auf die Constante keinen Einflufs, und folglich erhält man aus (9.):

$$m.m+1.m+2 \ldots . m+r-1 = \frac{\int_0^\infty u^{m+r-1} e^{-u} \partial u}{\int_0^\infty u^{m-1} e^{-u} \partial u},$$

oder, wenn für m sein Werth $\frac{k+1}{n+1}$ restituirt wird:

$$k+1.n+k+2 \ldots . (r-1)n+k+r$$

$$= (n+1)^r \frac{\int_0^\infty u^{\frac{k+1}{n+1}+r-1} e^{-u} \partial u}{\int_0^\infty u^{\frac{k+1}{n+1}-1} e^{-u} \partial u} = \frac{\int_0^\infty Z z^r \partial z}{\int_0^\infty Z \partial z},$$

wenn, Kürze halber, $(n+1)u = z$, und $z^{-\frac{(n-k)}{n+1}} e^{-\frac{z}{n+1}} = Z$ gesetzt wird.

Wird dieses Resultat in (7.) substituirt, so hat man

$$10. \quad R_k = \Sigma_0^r \frac{\Pi_k . A_k}{\Pi_{rn+k+r}} . \frac{\int_0^\infty Z z^r \partial z}{\int_0^\infty Z \partial z} x^{rn+k+r}$$

$$= \frac{\Pi_k . A_k}{\int_0^\infty Z \partial z} \int_0^\infty Z \partial z \left[\frac{x^k}{\Pi_k} + \frac{z x^{n+k+1}}{\Pi_{(n+k+1)}} + \frac{z^2 x^{2n+k+2}}{\Pi_{(2n+k+2)}} + \text{etc.} \right].$$

Für die in den Klammern stehende unendliche Reihe läfst sich aber sehr leicht ein geschlossener Ausdruck angeben. Denn nennt man sie S, so hat man

$$\frac{\partial^{n+1} S}{\partial x^{n+1}} = \frac{z x^k}{\Pi_k} + \frac{z^2 x^{n+k+1}}{\Pi_{(n+k+1)}} + \frac{z^3 x^{2n+k+2}}{\Pi_{(2n+k+2)}} + \text{etc.} = z S;$$

das Integral dieser Gleichung ist aber, wie bekannt:

$$11. \quad S = C e^{tx} + C_1 e^{\varrho t x} + C_2 e^{\varrho^2 t x} + \ldots + C_n e^{\varrho^n t x},$$

wo $t = \sqrt[k+1]{z}$, und $1, \varrho, \varrho^2, \ldots \varrho^n$ die $n+1$ Wurzeln der Einheit anzei-

gen. Zur Bestimmung der $n+1$ Constanten $C, C_1, \ldots. C_n$ bemerke man, dafs für $x = 0$:

$$S = 0,\ \frac{\partial S}{\partial x} = 0,\ \ldots.\ \frac{\partial^{k-1} S}{\partial x^{k-1}} = 0,\ \frac{\partial^k S}{\partial x^k} = 1,\ \frac{\partial^{k+1} S}{\partial x^{k+1}} = 0,\ \ldots.\ \frac{\partial^n S}{\partial x^n} = 0.$$

Differentiirt man also die Gleichung (11.) n mal nach einander, und setzt nach jeder Differentiation $x = 0$, so hat man

$$\begin{array}{l}
C + C_1 + C_2 + \ldots. + C_n = 0, \\
C + \varrho C_1 + \varrho^2 C_2 + \ldots. + \varrho^n C_n = 0, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
C + \varrho^{k-1} C_1 + \varrho^{2k-2} C_2 + \ldots. + \varrho^{kn-n} C_n = 0, \\
C + \varrho^k C_1 + \varrho^{2k} C_2 + \ldots. + \varrho^{kn} C_n = t^{-k}, \\
C + \varrho^{k+1} C_1 + \varrho^{2k+2} C_2 + \ldots. + \varrho^{kn+n} C_n = 0, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
C + \varrho^n C_1 + \varrho^{2n} C_2 + \ldots. + \varrho^{nn} C_n = 0,
\end{array}$$

Wird nun $C = D t^{-k}$; $\varrho^k C_1 = D_1 t^{-k}$; $\varrho^{2k} C_2 = D_2 t^{-k}$, ... angenommen, werden dann die $n-k$ letzten von den obigen Gleichungen zuerst geschrieben, und läfst man ihnen die $k+1$ ersten derselben folgen, so nehmen sie, da $\varrho^{n+1} = 1$ ist, folgende Gestalt an:

$$\begin{array}{l}
D + D_1 + D_2 + \ldots. + D_n = 1, \\
D + \varrho D_1 + \varrho^2 D_2 + \ldots. + \varrho^n D_n = 0, \\
D + \varrho^2 D_1 + \varrho^4 D_2 + \ldots. + \varrho^{2n} D_n = 0, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
D + \varrho^n D_1 + \varrho^{2n} D_2 + \ldots. + \varrho^{nn} D_n = 0.
\end{array}$$

Diesen Gleichungen leisten aber offenbar die Werthe

$$D = D_1 = D_2 = \ldots. = D_n = \frac{1}{n+1}$$

Genüge; demnach ist

$$C = \frac{t^{-k}}{n+1};\ C_1 = \frac{t^{-k}}{(n+1)\varrho^k};\ C_2 = \frac{t^{-k}}{(n+1)\varrho^{2k}};\ \ldots.\ C_n = \frac{t^{-k}}{(n+1)\varrho^{nk}}.$$

Wird also für die Reihe in (10.) ihr Werth S aus (11.) gesetzt, und den Constanten die so eben gefundenen Werthe beigelegt, so hat man

$$R_k = \frac{\Pi_k \cdot A_k}{(n+1)\int_0^\infty Z \partial z} \int_0^\infty Z \partial z \left[e^{tx} + \frac{e^{\varrho t x}}{\varrho^k} + \frac{e^{\varrho^2 t x}}{\varrho^{2k}} + \ldots. + \frac{e^{\varrho^n t x}}{\varrho^{nk}} \right] t^{-k}.$$

Hierbei ist $Z = z^{-\left(\frac{n-k}{n+1}\right)} e^{-\frac{z}{n+1}}$ und $t^{n+1} = z$, folglich

$$Z t^{-k} \partial z = (n+1) e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1}} \partial t,$$

und demnach, wenn die Constante

$$\frac{\Pi_k \cdot A_k}{\int_0^\infty Z \partial x} = B_{n-k-1}$$

gesetzt wird:

$$12. \quad R_k = B_{n-k-1} \int_0^\infty e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1}} \partial t \left[e^{tx} + \frac{e^{\varrho t x}}{\varrho^k} + \frac{e^{\varrho^2 t x}}{\varrho^{2k}} + \ldots + \frac{e^{\varrho^n t x}}{\varrho^{nk}} \right].$$

Hieraus folgt

$$R_{n-1} = B \int_0^\infty e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1}} \partial t \cdot \psi,$$

wo

$$13. \quad \psi = e^{tx} + \varrho^2 e^{\varrho t x} + \varrho^4 e^{\varrho^2 t x} + \ldots + \varrho^{2n} e^{\varrho^n t x},$$

folglich

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = t [e^{tx} + \varrho^3 e^{\varrho t x} + \varrho^6 e^{\varrho^2 t x} + \ldots + \varrho^{3n} e^{\varrho^n t x},$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = t^2 [e^{tx} + \varrho^4 e^{\varrho t x} + \varrho^8 e^{\varrho^2 t x} + \ldots + \varrho^{4n} e^{\varrho^n t x}$$

. . . .

$$\frac{\partial^{n-k-1} \psi}{\partial x^{n-k-1}} = t^{n-k-1} [e^{tx} + \varrho^{n-k+1} e^{\varrho t x} + \varrho^{2n-2k+2} e^{\varrho^2 t x} + \ldots + \varrho^{n^2 - nk + n} e^{\varrho^n t x}]$$

$$= t^{n-k-1} \left[e^{tx} + \frac{e^{\varrho t x}}{\varrho^k} + \frac{e^{\varrho^2 t x}}{\varrho^{2k}} + \ldots + \frac{e^{\varrho^n t x}}{\varrho^{nk}} \right],$$

und daher ist

$$14. \quad R_k = B_{n-k-1} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1}} \partial t}{t^{n-k-1}} \cdot \frac{\partial^{n-k-1} \psi}{\partial x^{n-k-1}},$$

woraus endlich

$$y = R_{n-1} + R_{n-2} + \ldots + R_2 + R_1 + R$$

$$= \int_0^\infty e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1}} \partial t \left[B \psi + B_1 \frac{\partial \psi}{t \partial x} + B_2 \frac{\partial^2 \psi}{t^2 \partial x^2} + \ldots + B_{n-1} \frac{\partial^{n-1} \psi}{t^{n-1} \partial x^{n-1}} \right]$$

folgt, in welchem Ausdrucke B, B_1, ... B_{n-1} die n willkürlichen Constanten der Integration sind. Aus ψ können natürlich die imaginären Quantitäten sehr leicht herausgeschafft werden, und man findet, wenn $\frac{2\pi}{n+1} = w$ gesetzt wird, leicht für ein ungerades n:

$$\psi = n^{tx} + e^{-tx} + 2 e^{tx \cos w} \cos(2w + tx \sin w) + 2 e^{tx \cos 2w} \cos(4w + tx \sin 2w) + \ldots$$

$$\ldots + 2 e^{tx \cos \left(\frac{n-1}{2}\right) w} \cos \left[(n-1) w + tx \sin \left(\frac{n-1}{2}\right) w \right],$$

hingegen für ein gerades n:

$$\psi = e^{tx} + 2e^{tx\cos w}\cos(2w + tx\sin w) + 2e^{tx\cos 2w}\cos(4w + tx\sin 2w) + \dots$$
$$\dots + 2e^{tx\cos\frac{nw}{2}}\cos\left(nw + tx\sin\frac{n}{2}w\right).$$

Den Fall, wo $n = 2$, hat **Lionville** in **Gergonne's** Annalen, Novbr. 1830, nach einer, mit der hier angewandten im Wesentlichen übereinstimmenden Methode behandelt. Für $n = 1$ hat man

$$\psi = e^{tx} + e^{-tx},$$
$$y = B\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\partial t(e^{tx} + e^{-tx}),$$

oder, wenn $t = u\sqrt{-1}$ gesetzt wird,

$$y = 2B\sqrt{-1}\int_0^\infty e^{\frac{1}{2}u^2}\partial u\cos xu.$$

Nun hat aber **Laplace** gezeigt (*Théorie analyt. des prob. pag.* 96. ff.), daſs $\int_0^\infty e^{-a^2u^2}\partial u\cos xu = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2}}}{2a}\sqrt{\pi}$; folglich ist, wenn $a^2 = -\frac{1}{2}$ angenommen wird, $y = B\sqrt{(2\pi)}.e^{\frac{1}{2}x^2} = C.e^{\frac{1}{2}x^2}$, wie sich durch die directe Integration der Gleichung $\frac{\partial y}{\partial x} = xy$ ergiebt. In der That hat auch **Laplace** seinen eben angeführten Satz ohne Einmischung der imaginären Quantitäten vermittelst der Gleichung $\frac{\partial y}{\partial x} = \beta xy$ bewiesen.

7.
Nachrichten von Büchern.

Dans ce qu'on va lire je vais essayer de donner un aperçu d'un ouvrage, dont j'ai conçu la première idée dans les momens de loisir dont je jouissois l'été dernier (1832). Mon intention fut d'abord de le faire paraître dans les premiers mois de 1833, mais j'ai du y renoncer, en me soumettant, pour le moment, à une nécessité impérieuse, qui ne me permet pas de donner le fini à mon travail. J'espère cependant que la publication ne sera pas retardée trop longtems.

Newton, par son Enumération des lignes du troisième ordre, a fait un pas immense dans la science des courbes, en réunissant sous un même point de vue un grand nombre de courbes, qui affectent des formes très différentes. Euler en s'occupant de la même matière dans son *Introduction* reproche à l'Enumération de Newton, que le nombre des espèces pourroit à volonté être augmenté. Aussi a-t-on ajouté aux 72 espèces de Newton quelques autres. Mais Euler en regardant exclusivement les branches infinies, élude la difficulté sans l'aborder. Les espèces de Newton se rangent naturellement dans les genres, en moins grand nombre d'Euler; le mérite de cet illustre géomètre est d'avoir exposé une théorie générale et très élégante des branches infinies. Le premier but que je me propose, et ce qu'on n'a pas tenté jusqu'ici, c'est de traiter les courbes du troisième ordre de manière que le caractère de chaque espèce particulière se présente aussi nettement, que cela a lieu par rapport aux sections coniques. Je vais indiquer la marche que je suis pour y parvenir.

A l'équation générale du troisième degré entre les deux variables y et x l'on peut donner la forme suivante:

$$1. \quad pqr + \mu s = 0,$$

en désignant par p, q, r et s des fonctions linéaires de la forme $(y + ax + b)$ et par μ un coefficient constant. Deux des trois premières de ces fonctions linéaires peuvent être imaginaires, mais leur produit est toujours réel. Il n'y a qu'un seul cas d'exception; dans ce cas il faut substituer au produit, qr par exemple, une expression de la forme: $(q^2 - \nu r)$. Je prendrai donc l'équation (1.) pour l'équation générale des courbes du troisième ordre.

Les quatre équations suivantes

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0, \quad s = 0,$$

représentent quatre lignes droites, qui évidemment ont un rapport intime avec la courbe représentée par l'équation (1.). En effet, cette équation-ci est satisfaite si l'on pose simultanément:

$$\begin{aligned} p &= 0 \quad \text{et} \quad s = 0, \\ q &= 0 \quad \text{et} \quad s = 0, \\ r &= 0 \quad \text{et} \quad s = 0, \end{aligned}$$

ce qui fait voir que les trois premières lignes droites, que je désignerai par PP, QQ et RR, ne rencontrent la courbe chacune qu'en un seul point (les deux autres points d'intersection étant situés à l'infini) qui se trouve sur la quatrième ligne droite, que je nommerai SS. Ainsi la forme de l'équation (1.) renferme le théorème connu, qu'une courbe du troisième ordre est coupée par ses trois asymptotes en trois points situés en ligne droite.

En partant de l'équation (1.) les axes des y et des x, qui étant choisis arbitrairement, apportent dans l'équation de la courbe des relations tout à fait étrangères à sa nature, sont remplacés par les quatre lignes droites PP, QQ, RR et SS. Ces droites étant données, pour déterminer complètement la courbe, il suffit de connoître le coefficient μ, ou, ce qui revient au même, un point quelconque de la courbe. Les diffé-

rentes espèces des courbes du troisième ordre dépendront ainsi, d'une part de la position réciproque des quatre droites en question et d'autre part de la position d'un point quelconque de la courbe par rapport à ces droites. Toutefois en suivant la marche ainsi indiquée, l'on rencontre des difficultés, inhérentes à la nature de la question. Pour les surmonter notre point de vue doit être la construction même de la courbe d'après les données ci-dessus; car, d'après moi, la discussion analytique n'est ni élégante ni assez facile, tant qu'elle ne peut être suivie pas à pas dans la construction. Je profite de cette occasion pour faire sentir l'esprit de notre méthode générale de démonstration, appliquée à un cas tout particulier.

A l'équation générale (1.) des courbes du troisième ordre l'on peut donner la forme suivante:

$$2.\quad p(qr+x)+(\mu s-xp)=0,$$

en désignant par x une quantité constante quelconque. Pour satisfaire à cette équation, l'on n'a qu'à poser simultanément

$$3.\quad qr+x=0,$$

$$4.\quad \mu s-xp=0.$$

La première de ces deux équations, x restant indéterminé, représente une hyperbole quelconque ayant deux asymptotes de la courbe à construire, savoir les droites QQ et RR, pour les siennes. L'équation (4.) est celle d'une ligne droite passant par le point d'intersection de la troisième asymptote PP et de la droite SS. Les deux intersections de cette ligne droite (4.) et de l'hyperbole (3.) appartiennent également à la courbe représentée par l'équation (1.). Donc l'une de ces intersections étant donnée, l'autre s'obtient immédiatement par le théorème généralement connu, que les deux intersections d'une ligne droite quelconque avec une hyperbole sont à égales distances de ses intersections avec les asymptotes de la courbe. De là résulte un tracé des courbes du troisième ordre par points, extrêmement facile et pour ainsi dire le même que celui d'une hyperbole dont un point et les asymptotes sont données. En effet, soient PP, QQ et RR les trois asymptotes de la courbe à construire, coupées par elle dans les trois points p, q et r, situés en ligne droite, et soit de plus M un point de la courbe également donné. Menons pM rencontrant QQ et RR resp. en A et B et prenons sur cette droite $M'B=AM$. M' sera alors un nouveau point de la courbe à construire. En combinant les trois asymptotes de manière différente, l'on obtiendra tant de points de la courbe que l'on voudra.

En général l'on peut déterminer trois points différens de manière que chacun d'eux occupe en même tems le milieu de trois segmens dont chacun est intercepté par un couple d'asymptotes sur la ligne droite passant par le point en question et l'intersection de la courbe avec la troisième asymptote. Dans un tel point trois cordes de la courbe à construire sont divisées en deux parties égales. Je l'ai nommé *centre* de la courbe. Une courbe du troisième ordre a donc en général trois centres. Les trois asymptotes et l'un de ses centres étant donnés l'on obtient de suite et linéairement ses intersections avec les trois asymptotes. Si la courbe a un point double (véritable point double ou point conjugé), ce point est l'un de ses trois centres; si elle a un point de rebroussement, deux de ses centres coincident avec ce point singulier.

Donc, en récapitulant, pour distinguer les différentes espèces des courbes du troisième ordre, l'on considérera d'abord la position des trois asymptotes (PP, QQ, RR) ou ce qui revient au même, la nature des branches infinies, et ensuite, soit la position de la droite SS, soit celle des trois centres. Alors il ne restera plus, que d'avoir égard à la position d'un seul point de la courbe. Ces dernières considérations indiqueront en général trois courbes, ayant chacune un point double, comme courbes limites entre des courbes de formes différentes.

De l'équation (1.) on peut déduire, en opérant de la même manière, comme je l'ai fait plus haut, d'autres constructions non moins simples. Ces diverses constructions avec des modifications, qui se présentent d'elles mêmes, sont également applicables au cas, où deux des trois asymptotes deviennent imaginaires ou s'éloignent à l'infini

Enfin l'on peut donner à l'équation générale du troisième ordre d'autres formes aussi simples que celle de l'équation (1.). J'en citerai les deux suivantes

$$5.\quad pqr + \mu s^3 = 0,$$
$$6.\quad pqr + \mu s^3 = 0.$$

De ces équations dérivent immédiatement une foule de propriétés curieuses des courbes en question, et une série de constructions générales et faciles de ces courbes, qui ne le cédent en rien, à celles q'on deduit de l'équation (1.). Je me contenterai d'énoncer les deux théorèmes suivans, qui résultent de la forme même de ces équations.

Il y a en général quatre tangentes à une courbe du troisième ordre parallèles à l'une de ses asymptotes, de manière qu'on obtient douze tangentes parallèles aux trois asymptotes. Les douze points de contact sur ces tangentes sont situés, trois à trois, sur seize droites, dont quatre passent par chaque point.

Une courbe du troisième ordre a trois points d'inflexion situés en ligne droite.

Ce dernier théorème est connu; le premier peut être généralisé, en substituant aux asymptotes des tangentes.

L'état actuel de la science exige qu'à coté de l'énumération des courbes du troisième ordre soit placée celle des courbes de la même classe. Dans cette partie de mon travail je me trouve sur un terrain tout-à-fait nouveau. J'ai adopté avec empressement la nouvelle classification des courbes d'après le nombre des tangentes issues d'un même point. En exprimant les courbes d'une classe quelconque par des équations, je leur ai donné, pour ainsi dire, une existence analytique et indépendante d'autres courbes. Leur théorie analytique est absolument la même que celle des courbes du même ordre. Mais l'interprétation géométrique des expressions analytiques ayant changée, des considérations nouvelles sont exigées. Aussi ai-je rejetté l'énumération des courbes de la troisième classe, qui d'après le principe de réciprocité (dualité) repondroit à celle que j'ai exposée plus haut. Je l'ai remplacée par une autre, relative à la position des trois points de rebroussement d'une telle courbe et du point d'intersection commune des trois tangentes en ces points; je l'ai fondée, en d'autres termes non sur une équation de la forme (1.) mais de la forme (6.).

Ce n'est qu'après avoir tiré de l'analyse, tant qu'il étoit dans mon pouvoir, tous les résultats, relatifs aux courbes du troisième ordre et de la troisième classe et remarquables par leur simplicité, quelquefois inattendue, que je m'élève à la discussion générale des courbes algébriques. Je la passe sous silence ici en me reservant de présenter dans ce Journal une série de résultats généraux.

Toutes les recherches dont il a été question jusqu'ici, rentrent, au fond, dans les méthodes exposées dans les deux volumes de mes „Développemens," quel perfectionnement d'ailleurs qu'aient obtenu ces méthodes. Mais ces mêmes recherches m'ont suggeré des idées, qui me font regarder la géométrie analytique sous une face nouvelle. Je n'en dirai rien ici, la bienveillance de l'éditeur accordera quelques pages du cahier prochain à une analyse rapide de cette partie de mon travail, à laquelle je rattache le plus d'intérêt. C'est elle, qui m'a permis de mettre à la tête de l'ouvrage à publier: „*Système de géométrie analytique.*"

Berlin au mois de Janvier 1833.

Plücker.

Druckfehler im 4. Hefte des 9. Bandes.

Seite 411. Zeile 13. statt „einer durch den Durchschnitt jener" lies „der durch die Berührungspuncte auf jenen"

— — — 25. statt „ein und denselben . . . . . verbindet" lies „den Durchschnittspunct der Tangenten in jenen beiden ersten Winkelpuncten des eingeschriebenen Sechsecks"

Die angeführten „allbekannten Sätze" sind die vom umschriebenen und eingeschriebenen Viereck, welche die obige Berichtigung sogleich mit sich bringen

8.

De transformatione et determinatione integralium duplicium commentatio tertia *).

(Auct. Dr. *C. G. J. Jacobi*, prof. mathem. Regiom.)

De substitutione.

$$\cos\eta = \frac{m\cos\varphi}{\sqrt{(mm\cos^2\varphi+nn\sin^2\varphi\cos^2\psi+pp\sin^2\psi)}},$$
$$\sin\eta\cos\vartheta = \frac{n\sin\varphi\cos\psi}{\sqrt{(mm\cos^2\varphi+nn\sin^2\varphi\cos^2\psi+pp\sin^2\varphi\sin^2\psi)}},$$
$$\sin\eta\sin\vartheta = \frac{p\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{(mm\cos^2\psi+nn\sin^2\varphi\cos^2\psi+pp\sin^2\varphi\sin^2\psi)}}.$$

1.

Expressio generalis elementi superficiei sphaericae.

Ponamus, x, y, z designare coordinatas orthogonales puncti in superficie sphaerae positi, cuius centrum initium coordinatarum et cuius radius $=1$, unde $xx+yy+zz=1$. Sit porro dS elementum superficiei sphaeriae, notum est, dS per binas e variabilibus x, y, z exprimi hunc in modum:

$$1.\quad \begin{cases} dS = \dfrac{dy\,dz}{\sqrt{(1-yy-zz)}} = \dfrac{dz\,dx}{\sqrt{(1-zz-xx)}} = \dfrac{dx\,dy}{\sqrt{(1-xx-yy)}}, \\ \text{sive:} \\ dS = \dfrac{dy\,dz}{x} = \dfrac{dz\,dx}{z} = \dfrac{dx\,dy}{z}. \end{cases}$$

Idem elementum, posito

$$x=\cos\eta,\quad y=\sin\eta\cos\vartheta,\quad z=\sin\eta\sin\vartheta,$$

notum est fieri

$$2.\quad dS = \sin\eta\,d\eta\,d\vartheta.$$

Ut expressionem generalem elementi superficiei sphaericae obtineamus, supponamus, datis variabilium φ, ψ tribus functionibus quibuslibet u, v, w, fieri coordinatas puncti in sphaera positi:

---

*) Commentationes primam et secundam videas vol. II. pag. 234, vol. VIII. pag. 253, 321.

$$x = \frac{u}{\sqrt{(uu+vv+ww)}},\quad y = \frac{v}{\sqrt{(uu+vv+ww)}},\quad z = \frac{w}{\sqrt{(uu+vv+ww)}};$$

ac quaeramus, quomodo dS per variabiles φ, ψ exprimatur.

Ac primum observo, e nota theoria transformationis integralium duplicium formulam (1.) statim suppeditare:

$$x\,dS = \left[\frac{dy}{d\varphi}\frac{dz}{d\psi} - \frac{dy}{d\psi}\frac{dz}{d\varphi}\right] d\varphi\, d\psi,$$

$$y\,dS = \left[\frac{dz}{d\varphi}\frac{dx}{d\psi} - \frac{dz}{d\psi}\frac{dx}{d\varphi}\right] d\varphi\, d\psi,$$

$$z\,dS = \left[\frac{dx}{d\varphi}\frac{dy}{d\psi} - \frac{dx}{d\psi}\frac{dy}{d\varphi}\right] d\varphi\, d\psi.$$

Tribus illis formulis resp. per x, y, z multiplicatis et additis, provenit:

$$(3.)\quad dS = \left\{x\left[\frac{dy}{d\varphi}\frac{dz}{d\psi} - \frac{dy}{d\psi}\frac{dz}{d\varphi}\right] + y\left[\frac{dz}{d\varphi}\frac{dx}{d\psi} - \frac{dz}{d\psi}\frac{dx}{d\varphi}\right] + z\left[\frac{dx}{d\varphi}\frac{dy}{d\psi} - \frac{dx}{d\psi}\frac{dy}{d\varphi}\right]\right\} d\varphi\, d\psi.$$

Substituamus in hac formula loco x, y, z fractiones

$$x = \frac{u}{t},\quad y = \frac{v}{t},\quad z = \frac{w}{t};$$

expressio ad dextram aequationis ea singulari gaudet proprietate, quod post substitutionem factam differentialia partialia denominatoris t in ea non inveniantur; sive generaliter erit:

$$(4.)\quad x\left[\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial z}{\partial\psi} - \frac{\partial y}{\partial\psi}\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right] + y\left[\frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\psi} - \frac{\partial z}{\partial\psi}\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right] + z\left[\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\psi} - \frac{\partial x}{\partial\psi}\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right] =$$

$$\frac{u\left[\frac{\partial v}{\partial\varphi}\frac{\partial w}{\partial\psi} - \frac{\partial v}{\partial\psi}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right] + v\left[\frac{\partial w}{\partial\varphi}\frac{\partial u}{\partial\psi} - \frac{\partial w}{\partial\psi}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right] + w\left[\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial v}{\partial\psi} - \frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right]}{ttt}.$$

Fit enim

$$x\frac{\partial y}{\partial\varphi} - y\frac{\partial x}{\partial\varphi} = \frac{1}{tt}\left[u\frac{\partial v}{\partial\varphi} - v\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right],$$

$$y\frac{\partial z}{\partial\varphi} - z\frac{\partial y}{\partial\varphi} = \frac{1}{tt}\left[v\frac{\partial w}{\partial\varphi} - w\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right],$$

$$z\frac{\partial x}{\partial\varphi} - x\frac{\partial z}{\partial\varphi} = \frac{1}{tt}\left[w\frac{\partial u}{\partial\varphi} - u\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right],$$

evanescentibus terminis in $\frac{\partial t}{\partial\varphi}$ ductis. Quibus aequationibus multiplicatis resp. per

$$\frac{\partial z}{\partial\psi} = \frac{1}{t}\frac{\partial w}{\partial\psi} - \frac{w}{tt}\frac{\partial t}{\partial\psi},\quad \frac{\partial x}{\partial\psi} = \frac{1}{t}\frac{\partial u}{\partial\psi} - \frac{u}{tt}\frac{\partial t}{\partial\psi},\quad \frac{\partial y}{\partial\psi} = \frac{1}{t}\frac{\partial v}{\partial\psi} - \frac{v}{tt}\frac{\partial t}{\partial\psi},$$

et additione facta, termini etiam in $\frac{\partial t}{\partial\psi}$ ducti evanescunt, unde formula (4.) provenit.

Collatis (3.), (4.), ac posito

$$tt = uu + vv + ww,$$

iam videmus, *siquidem statuamus:*

$$\cos\eta = \frac{u}{\sqrt{(uu+vv+ww)}},\quad \sin\eta\cos\vartheta = \frac{v}{\sqrt{(uu+vv+ww)}},\quad \sin\eta\cos\vartheta = \frac{w}{\sqrt{(uu+vv+ww)}},$$

designantibus u, v, w tres functiones quaslibet variabilium φ, ψ, fieri elementum superficiei sphaericae:

$$5.\quad dS = \sin\eta\, d\eta\, d\vartheta =$$

$$\frac{\left\{u\left[\frac{dv}{d\varphi}\frac{dw}{d\psi} - \frac{dv}{d\psi}\frac{dw}{d\varphi}\right] + v\left[\frac{dw}{d\varphi}\frac{du}{d\psi} - \frac{dw}{d\psi}\frac{du}{d\varphi}\right] + w\left[\frac{du}{d\varphi}\frac{dv}{d\psi} - \frac{du}{d\psi}\frac{dv}{d\varphi}\right]\right\} d\varphi\, d\psi}{[uu+vv+ww]^{\frac{3}{2}}}.$$

Quae est expressio quaesita.

De substitutione

$$\cos\eta = \frac{m\cos\varphi}{\sqrt{R}},\qquad \sin\eta\cos\vartheta = \frac{n\sin\varphi\cos\vartheta}{\sqrt{R}},\qquad \sin\eta\sin\vartheta = \frac{p\sin\varphi\sin\vartheta}{\sqrt{R}}.$$

Formulae generalis (5.) faciamus applicationem ad casum simplicissimum, quo:

$$u = m\cos\varphi,\quad v = n\sin\varphi\cos\psi,\quad w = p\sin\varphi\sin\psi,$$

sive

$$6.\quad \begin{cases} \cos\eta = \dfrac{m\cos\varphi}{\sqrt{(mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi)}}, \\ \sin\eta\cos\vartheta = \dfrac{n\sin\varphi\cos\psi}{\sqrt{(mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi)}}, \\ \sin\eta\sin\vartheta = \dfrac{p\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{(mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi)}}. \end{cases}$$

Quo casu facile patet, formulam (5.) in hanc abire:

$$7.\quad \sin\eta\, d\eta\, d\vartheta = \frac{mnp\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{[mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi]^{\frac{3}{2}}}.$$

Ad quam etiam pervenitur, adhibendo substitutiones alteram post alteram:

$$\cos\eta = \frac{m}{\sqrt{[mm + (nn\cos^2\psi + pp\sin^2\psi)\tang^2\varphi]}},\qquad \tang\vartheta = \frac{p\tang\psi}{n},$$

quae cum antecedentibus conveniunt, atque facile suppeditant:

$$8.\quad \begin{cases} \dfrac{mnp\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{[mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi]^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{np\sin\eta\, d\eta\, d\psi}{nn\cos^2\psi + pp\sin^2\psi}, \\ \dfrac{np\sin\eta\, d\eta\, d\psi}{nn\cos^2\psi + pp\sin^2\psi} = \sin\eta\, d\eta\, d\vartheta. \end{cases}$$

Quae iunctae formulam (7.) suggerunt.

Exprimamus vicissim $\cos\varphi$, $\sin\varphi\cos\psi$, $\sin\varphi\sin\psi$ per $\cos\eta$, $\sin\eta\cos\vartheta$, $\sin\eta\sin\vartheta$. Sit brevitatis causa:

$$R = mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi,$$

e formulis (6.):

$$\cos\eta = \frac{m\cos\varphi}{\sqrt{R}}, \qquad \sin\eta\cos\vartheta = \frac{n\sin\varphi\cos\psi}{\sqrt{R}}, \qquad \sin\eta\sin\vartheta = \frac{p\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{R}}.$$

Posito rursus brevitatis causa:

$$P = \frac{\cos^2\eta}{mm} + \frac{\sin^2\eta\cos^2\vartheta}{nn} + \frac{\sin^2\eta\sin^2\vartheta}{pp},$$

sequitur

$$9. \quad RP = 1,$$

unde:

$$10. \quad \cos\varphi = \frac{\cos\eta}{m\sqrt{P}}, \qquad \sin\varphi\cos\psi = \frac{\sin\eta\cos\vartheta}{n\sqrt{P}}, \qquad \sin\varphi\sin\psi = \frac{\sin\eta\sin\vartheta}{p\sqrt{P}}.$$

Formulae antecedentes integralibus per substitutionem propositam transformandis commode inserviunt.

3.

Per substitutionem propositam *integrale duplex*

$$\iint \frac{U\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\sqrt{(mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi)}},$$

in quo U est functio rationalis par quantitatum $\cos\varphi$, $\sin\varphi\cos\psi$, $\sin\varphi\sin\psi$, semper transformatur in aliud, in quo elementum forma rationali gaudet. Facile enim patet, functionem U etiam per $\cos\eta$, $\sin\eta\cos\vartheta$, $\sin\eta\sin\vartheta$ expressam fore rationalem parem; unde integrale, in quod propositum transformatur,

$$\frac{1}{mnp}\iint \frac{U\sin\eta\, d\eta\, d\vartheta}{\frac{\cos^2\eta}{mm} + \frac{\sin^2\eta\cos^2\vartheta}{nn} + \frac{\sin^2\eta\sin^2\vartheta}{pp}}$$

dictam formam habet.

Quod attinet ad limites, sequitur e formulis supra exhibitis:

$$\cos\eta = \frac{m}{\sqrt{[mm + (nn\cos^2\psi + pp\sin^2\psi)\tang^2\varphi]}}, \qquad \tang\vartheta = \frac{p\tang\psi}{n},$$

et angulos η, φ, et angulos ϑ, ψ simul crescere inde a 0 usque ad $\frac{\pi}{2}$. Quoties igitur integrale propositum extenditur ad octantem sphaerae, sive a $\varphi = 0$, $\psi = 0$ usque ad $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\psi = \frac{\pi}{2}$, etiam integrale transformatum ad octantem sphaerae extendi debet, sive a $\eta = 0$, $\vartheta = 0$ usque ad $\eta = \frac{\pi}{2}$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

Hinc sequitur, *quoties U functio rationalis integra ipsarum* $\cos^2\varphi$, $\sin^2\varphi\cos^2\psi$, $\sin^2\varphi\sin^2\psi$, *integrale duplex*

$$\iint \frac{U \sin\varphi \, d\varphi \, d\psi}{[mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi]^{\frac{2n+1}{2}}},$$

extensum a $\varphi = 0$, $\psi = 0$ *usque ad* $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\psi = \frac{\pi}{2}$, *semper aut per integralia elliptica exprimi posse, quae ad speciem primam et secundam pertinent, aut adeo algebraice.* Integrale enim propositum constat e terminis

$$\iint \frac{\cos^{2\alpha}\varphi \, . \sin^{2\beta}\varphi \cos^{2\beta}\psi \, . \sin^{2\gamma}\varphi \sin^{2\gamma}\psi \, . \sin\varphi \, d\varphi \, d\psi}{[mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi]^{\frac{2n+1}{2}}},$$

qui per substitutionem nostram in sequentes transformantur:

$$\frac{1}{m^{2\alpha+1} n^{2\beta+1} p^{2\gamma+1}} \iint \frac{\cos^{2\alpha}\eta \, . \sin^{2\beta}\eta \cos^{2\beta}\vartheta \, . \sin^{2\gamma}\eta \sin^{2\gamma}\vartheta \, . \sin\eta \, d\eta \, d\vartheta}{\left[\frac{\cos^2\eta}{mm} + \frac{\sin^2\eta\cos^2\vartheta}{nn} + \frac{\sin^2\eta\sin^2\vartheta}{pp}\right]^{\alpha+\beta+\gamma+1-n}}.$$

Quae integralia inter limites assignatos sumta, quoties $n \geqq \alpha + \beta + \gamma + 1$, algebraica fieri, facile patet; eo enim casu functio integranda integra evadit. Quoties vero $\alpha + \beta + \gamma + 1 > n$, integratione prima secundum ϑ facta, ad integralia ducimur, quae ad speciem primam et secundam integralium ellipticorum revocari posse, constat.

Ex his etiam facile sequitur, *quoties R praeter quadrata ipsarum* $\cos\varphi'$, $\sin\varphi'\cos\psi'$, $\sin\varphi'\sin\psi'$ *etiam producta binarum contineat, atque U designet functionem earum quamlibet rationalem integram, integrale duplex*

$$\iint \frac{U \sin\varphi' \, d\varphi' \, d\psi'}{R^{\frac{2n+1}{2}}},$$

ad totam sphaeram extensum, sive algebraice sive per integralia elliptica exprimi. Nam per transformationem coordinatarum integrale transformatur in aliud formae:

$$\iint \frac{U \sin\varphi \, d\varphi \, d\psi}{[mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi]^{\frac{2n+1}{2}}},$$

quod et ipsum ad totam sphaeram extenditur; unde e numeratore U reiici possunt termini omnes, qui non e quadratis ipsarum $\cos\varphi$, $\sin\varphi\cos\psi$, $\sin\varphi\sin\psi$ conflantur, quippe qui, inter limites assignatos integratione facta, terminos evanescentes procreant. Quibus igitur terminis reiectis, integrale formam supra assignatam induit.

4.

Per considerationes antecendentes facile demonstratur theorema a Cl. Cauchy olim propositum (*Journ. de l'Ec. Polyt. cah. XIX. sur l'intégration*

des équations linéaires aux différences partielles et à coefficiens constans pg. 529.); videlicet, integrale duplex

$$\iint F\left[\frac{a\cos\varphi+b\sin\varphi\cos\psi+c\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{(A\cos^2\varphi+B\sin^2\varphi\cos^2\psi+C\sin^2\varphi\sin^2\psi)}}\right]\frac{\sin\psi\, d\varphi\, d\psi}{[A\cos^2\varphi+B\sin^2\varphi\cos^2\psi+C\sin^2\varphi\sin^2\psi]^{\frac{3}{2}}},$$

ad totam sphaeram extensum, fieri

$$\frac{2\pi}{\sqrt{(ABC)}}\int_0^{\pi} F\left[\sqrt{\left(\frac{aa}{A}+\frac{bb}{B}+\frac{cc}{C}\right)}\cdot\cos\varphi'\right]\sin\varphi'\, d\varphi':$$

unde posito

$$\int_{-x}^{+x} F(x)\, dx = x\psi'(xx),$$

erit integrale propositum:

$$\frac{2\pi\,\psi\left(\frac{aa}{A}+\frac{bb}{B}+\frac{cc}{C}\right)}{\sqrt{(ABC)}}.$$

Quod ut demonstremus, sit

$$A = mm,\quad B = nn,\quad C = pp,$$

integrale propositum per substitutionem nostram in hoc transformatur,

$$\frac{1}{mnp}\iint F\left(\frac{a\cos\eta}{m}+\frac{b\sin\eta\cos\vartheta}{n}+\frac{c\sin\eta\sin\vartheta}{p}\right)\sin\eta\, d\eta\, d\vartheta.$$

Quod, uti Ill. Poisson primum observavit, per transformationem coordinatarum facile in hoc abit:

$$\frac{1}{mnp}\iint F\left[\sqrt{\left(\frac{aa}{mm}+\frac{bb}{nn}+\frac{cc}{pp}\right)}\cdot\cos\varphi'\right]\sin\varphi'\, d\varphi'\, d\vartheta',$$

quod integratum inde a $\vartheta' = 0$ usque ad $\vartheta' = 2\pi$ formam induit, qualem Cl. Cauchy proposuit.

Vir egregius ad formulam assignatam pervenit per applicationes satis delicatas theorematis celeberrimi, quod a conditore Fourrier nomen traxit. Haec nostra methodus fortasse magis directa videbitur; quae adeo transformationes suppeditat indefinitas.

5.

Ope substitutionis a nobis propositae facile etiam succedit areae ellipsoidae determinatio, quam primis methodis longe aliis dedit ill. Legendre in *applicationibus functionum ellipticarum ad geometriam*, quae in *Exercitiis calculi integralis* sive in *Tractatu de functionibus ellipticis* (vol. I.) leguntur. Sit enim

$$mmxx + nnyy + ppzz = 1$$

aequatio ellipsoidae, designantibus $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{p}$ semiaxes; ubi ponitur

$$x = \frac{\cos\varphi}{m}, \quad y = \frac{\sin\varphi\cos\psi}{n}, \quad z = \frac{\sin\varphi\sin\psi}{n},$$

quod fieri posse patet et notum est, facile demonstratur, areae elementum fore

$$\frac{1}{mnp} \cdot \sqrt{(mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi)} \sin\varphi\, d\varphi\, d\psi.$$

Quod ex iis, quae supra diximus, per angulos η, ϑ expressum formam induit rationalem, atque bis integratum sine negotio per integralia elliptica exprimitur. ***Sunt autem*** $\cos\eta$, $\sin\eta\cos\vartheta$, $\sin\eta\sin\vartheta$, ***quarum ope elementum areae ellipsoidae rationaliter exprimitur, ipsi cosinus angulorum, quos linea normalis in puncto superficiei ellipsoidae cum axibus eius format.*** Quippe quos cosinus, ex elementis geometricis notum est, fieri:

$$\frac{mmx}{\sqrt{(m^4xx + n^4yy + p^4zz)}}, \quad \frac{nnx}{\sqrt{(m^4xx + n^4yy + p^4zz)}}, \quad \frac{ppx}{\sqrt{(m^4xx + n^4yy + p^4zz)}},$$

sive per angulos φ, ψ expressos:

$$\frac{m\cos\varphi}{\sqrt{(mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi)}} = \cos\eta,$$

$$\frac{n\sin\varphi\cos\psi}{\sqrt{(mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi)}} = \sin\eta\cos\vartheta,$$

$$\frac{p\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{(mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi)}} = \sin\eta\sin\vartheta,$$

quod demonstrandum erat.

Antecedentia paucis exemplis illustremus; in quibus, nisi aliud diserte adiicitur, supponimus, integralia ad octantem sphaerae extendi, sive a $\varphi = 0$, $\psi = 0$ ad $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\psi = \frac{\pi}{2}$, ideoque etiam a $\eta = 0$, $\vartheta = 0$ ad $\eta = \frac{\pi}{2}$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

Exemplum I.

$$A = \iint \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\sqrt{(mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi)^3}}.$$

6.

Abhibita substitutione proposita, e (7.) transformatur A in sequentem expressionem simplicissimam

$$A = \iint \frac{\sin\eta\, d\eta\, d\vartheta}{mnp},$$

ideoque integrationibus inter limites assignatos transactis, fit

$$A = \frac{\pi}{2mnp}.$$

Quem valorem Cl. Cauchy l. c. deduxit e formula supra citata (§. 4.), functionem praefixo F denotatam ponendo constanti aequalem. Idem iam prius invenit ill. Lagrange (*Mém. de l'Acad. de Berlin a.* 1792. *p.* 261.), massam ellipsoidae quaerens.

Exemplum II.

$$B = \iint \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\sqrt{(mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi)}}.$$

7.

Dedimus §. 2. formulas:

$$\sin\eta\, d\eta\, d\vartheta = \frac{mnp\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\sqrt{R^3}}, \quad RP = 1,$$

unde

$$\frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\sqrt{R}} = \frac{1}{mnp}\,\frac{\sin\eta\, d\eta\, d\vartheta}{P}.$$

Hinc prodit

$$B = \frac{1}{mnp}\iint \frac{\sin\eta\, d\eta\, d\vartheta}{\frac{\cos^2\eta}{mm} + \frac{\sin^2\eta\cos^2\vartheta}{nn} + \frac{\sin^2\eta\sin^2\vartheta}{pp}}.$$

Altera integratione secundum ϑ transacta, statim fit:

$$B = \frac{\pi}{2mnp}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\eta\, d\eta}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2\eta}{mm} + \frac{\sin^2\eta}{nn}\right)}\sqrt{\left(\frac{\cos^2\eta}{mm} + \frac{\sin^2\eta}{pp}\right)}}.$$

Quod integrale ut in formam usitatam integralium ellipticorum redigatur, distinguamus inter quantitates m, n, p, ac statuamus $m > n > p$. Quod pro arbitrio facere licet. Nam integrale duplex propositum valorem non mutat, quantitates m, n, p, vel quod idem est, quantitates $\cos\varphi$, $\sin\varphi\cos\psi$, $\sin\varphi\sin\psi$ inter se permutando. Quod in valore invento ipsius B facile demonstratur. Posito enim aut $\frac{n}{m}\tang\eta$, aut $\frac{p}{m}\tang\eta$ loco $\tang\eta$, unde limites non mutantur, transformationes easdem obtines, ac si aut n aut p cum m commutentur. Generaliter autem, quoties integrale duplex

$$\iint F(\cos\varphi, \sin\varphi\cos\psi, \sin\varphi\sin\psi)\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi$$

ad octantem sphaerae extenditur, in functione F quantitates illas $\cos\varphi$, $\sin\varphi\cos\psi$, $\sin\varphi\sin\psi$ quolibet modo inter se permutare licet, valore integralis eodem manente.

Ponamus:

$$11. \quad \sqrt{\left(\frac{\cos^2\eta}{mm} + \frac{\sin^2\eta}{pp}\right)} = \frac{\cos w}{p}, \quad \sqrt{\left(\frac{\cos^2\eta}{mm} + \frac{\sin^2\eta}{nn}\right)} = \frac{\sqrt{(1 - x^2\sin^2 w)}}{n} = \frac{\Delta(w)}{n},$$

quod licet, siquidem constans $\varkappa\varkappa$ statuitur

$$12.\quad \varkappa\varkappa = \frac{mm-nn}{mm-pp},\ \text{unde etiam}\ \varkappa'\varkappa' = 1-\varkappa\varkappa = \frac{nn-pp}{mm-pp}.$$

Habetur simul:

$$13.\quad \cos\eta = \frac{m\sin w}{\sqrt{(mm-pp)}},\quad \sin\eta\, d\eta = \frac{-m\cos w\, dw}{\sqrt{(mm-pp)}}.$$

Unde

$$14.\quad \frac{1}{mnp}\cdot\frac{\sin\eta\, d\eta\, d\vartheta}{\frac{\cos^2\eta}{mm}+\frac{\sin^2\eta\cos^2\vartheta}{nn}+\frac{\sin^2\eta\sin^2\vartheta}{pp}} = \frac{-np\cos w\, dw\, d\vartheta}{\sqrt{(mm-pp)}\,[pp\Delta^2(w)\cos^2\vartheta + nn\cos^2 w\sin^2\vartheta]}.$$

Quoties $\eta=0$, fit $\cos w = \frac{p}{m}$, quoties $\eta = \frac{\pi}{2}$, fit $\cos w = 1$, $w=0$; unde limites respectu anguli w erunt $\arccos\frac{p}{m}$ et 0.

His adnotatis, invenitur

$$B = \frac{\pi}{2\sqrt{(mm-pp)}}\int_0^w \frac{dw}{\Delta(w)} = \frac{\pi}{2}\int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(mm\cos^2 w + nn\sin^2 w - pp)}},$$

sive e notatione ab ill. Legendre adhibita:

$$B = \frac{\pi F(w,\varkappa)}{2\sqrt{(mm-pp)}},$$

siquidem $\cos w = \frac{p}{m}$, $\varkappa = \sqrt{\left(\frac{mm-nn}{mm-pp}\right)}$.

8.

Expressiones ipsius B per integralia simplicia, quas antecedentibus dedimus, quamvis, quod fieri debet, valorem non mutant, ipsis m, n, p inter se permutatis, forma tamen symmetrica respectu harum quantitatum non gaudent. Cuiusmodi formam habet expressio, quam e valore ipsius A supra invento deducere licet per considerationes sequentes.

Ponatur in exemplo I. $mm+x$, $nn+x$, $pp+x$ loco ipsarum mm, nn, pp, unde invenitur:

$$A = \iint \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{(x+mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Quod multiplicatum per $\frac{1}{2}dx$, et integratum a $x=0$ usque ad $x=\infty$, suggerit

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty A\,dx = \iint \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{(mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi)^{\frac{1}{2}}} = B.$$

Jam vero, facta mutatione indicata, fit ex exemplo I.:

$$A = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{[(x+mm)(x+nn)(x+pp)]}}.$$

Unde habemus

$$15.\quad B = \iint \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\sqrt{(mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi)}}$$
$$= \frac{\pi}{4}\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{[(x+mm)(x+nn)(x+pp)]}}.$$

Hinc simul, ubi in valore ipsius B transformato:

$$B = \frac{1}{mnp}\iint \frac{\sin\eta\, d\eta\, d\vartheta}{\frac{\cos^2\eta}{mm} + \frac{\sin^2\eta\cos^2\vartheta}{nn} + \frac{\sin^2\eta\sin^2\vartheta}{pp}}$$

ponimus $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{p}$ loco m, n, p, atque φ, ψ loco η, ϑ scribimus, prodit:

$$16.\quad \iint \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi} = \frac{\pi}{4}\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{[(1+mmx)(1+nnx)(1+ppx)]}},$$

integralibus duplicibus semper a $\varphi = 0$, $\psi = 0$ usque ad $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\psi = \frac{\pi}{2}$ extensis. Utraque satis elegans est formula. Alterum integrale etiam sic exhibere licet:

$$\frac{\pi}{4}\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{[x(x+mm)(x+nn)(x+pp)]}}.$$

Ceterum e (15.) valorem supra inventum

$$B = \frac{\pi F(w, \varkappa)}{2\sqrt{(mm-pp)}} = \frac{\pi}{2}\int_0^{w} \frac{dw}{\sqrt{(mm\cos^2 w + nn\sin^2 w - pp)}}$$

statim deducis, posito

$$\frac{x+pp}{mm-pp} = \operatorname{cotang}^2 w.$$

Exemplum III.

Determinatio areae ellipsoidae.

$$C = \iint \sqrt{(mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi)}.\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi.$$

9.

Ponamus, coordinatas orthogonales x, y, z puncti in superficie positi datas esse per duas variabiles φ, ψ, notum est, generaliter areae superficiei elementum dS per φ, ψ exprimi hunc in modum:

$$dS = \sqrt{\left[\left(\frac{dy}{d\varphi}\frac{dz}{d\psi} - \frac{dy}{d\psi}\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\frac{dx}{d\psi} - \frac{dz}{d\psi}\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dx}{d\varphi}\frac{dy}{d\psi} - \frac{dx}{d\psi}\frac{dy}{d\varphi}\right)^2\right]}\, d\varphi\, d\psi.$$

Sit

$$x = \frac{\cos\varphi}{m},\quad y = \frac{\sin\varphi\cos\psi}{n},\quad z = \frac{\sin\varphi\sin\psi}{p},$$

unde

$$mmxx + nnyy + ppzz = 1,$$

superficies erit ellipsoida, cuius semiaxes $\frac{1}{m}, \frac{1}{n}, \frac{1}{p}$; atque elementum areae superficiei fit e formula generali:

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\cos^2\varphi}{n^2p^2} + \frac{\sin^2\varphi\cos^2\psi}{p^2m^2} + \frac{\sin^2\varphi\sin^2\psi}{m^2n^2}\right)}.\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi = \frac{\sqrt{(R)}\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{mnp}.$$

Quod, ut aream integram ellipsoidae S obtineas, integrari debet a $\varphi = 0$, $\psi = 0$ usque ad $\varphi = \pi$, $\psi = 2\pi$; unde

$$S = \frac{8C}{mnp}.$$

E formulis nostris

$$\sin\eta\, d\eta\, d\vartheta = mnp\frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\sqrt{(R)^3}}, \quad \sqrt{(RP)} = 1,$$

prodit:

$$dS = \frac{\sqrt{(R)}\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{mnp} = \frac{\sin\eta\, d\eta\, d\vartheta}{m^2n^2p^2PP};$$

unde e §. 5. videmus, *designantibus* $\cos\eta$, $\sin\eta\cos\vartheta$, $\sin\eta\sin\vartheta$ *cosinus angulorum, quos linea normalis in puncto ellipsoidae cum axibus format, fore elementum areae ellipsoidae:*

$$dS = \frac{\sin\eta\, d\eta\, d\vartheta}{m^2n^2p^2\left(\frac{\cos^2\eta}{mm} + \frac{\sin^2\eta\cos^2\vartheta}{nn} + \frac{\sin^2\eta\sin^2\vartheta}{pp}\right)^2} = \frac{\sin\eta\, d\eta\, d\vartheta}{m^2n^2p^2PP}.$$

Ipsius C expressionem transformatam eruimus:

$$C = \frac{1}{mnp}\iint\frac{\sin\eta\, d\eta\, d\vartheta}{PP}.$$

Ubi loco anguli η angulum w introducimus, fit e §. 7. (11.), (13.):

$$C = \frac{n^2p^2}{\sqrt{(mm-pp)}}\iint\frac{\cos w\, dw\, d\vartheta}{[pp\Delta^2 w\cos^2\vartheta + nn\cos^2 w\sin^2\vartheta]^2}.$$

Integratione facta a $\vartheta = 0$ usque ad $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, habetur:

$$C = \frac{\pi}{4\sqrt{(mm-pp)}}\int_0^w \frac{nn\cos^2 w + pp\Delta^2 w}{\cos^2 w\,\Delta^2 w}.\frac{dw}{\Delta w}$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{(mm-pp)}}\left[nn\int_0^w \frac{dw}{\Delta^3 w} + pp\int_0^w \frac{dw}{\cos^2 w\,\Delta w}\right].$$

Ad reductionem ulteriorem observo, differentiatione facta facile probari formulas:

$$\varkappa^2\frac{d\left(\frac{\sin w\cos w}{\Delta w}\right)}{dw} = \Delta w - \frac{\varkappa'\varkappa'}{\Delta^3 w},$$

$$\frac{d\left(\frac{\sin w\,\Delta w}{\cos w}\right)}{dw} = \frac{\varkappa'\varkappa'}{\cos^2 w\,\Delta w} - \frac{\varkappa'\varkappa'}{\Delta w} + \Delta w,$$

$$\frac{d\left(\frac{\cos w\,\Delta w}{\sin w}\right)}{dw} = \frac{-1}{\sin^2 w\,\Delta w} + \frac{1}{\Delta w} - \Delta w.$$

E prima et secunda fit:

$$\int_0^w \frac{dw}{\Delta^3 w} = \frac{E(w)}{\varkappa'\varkappa'} - \frac{\varkappa\varkappa}{\varkappa'\varkappa'}\cdot\frac{\sin w\cos w}{\Delta w},$$

$$\int_0^w \frac{dw}{\cos^2 w\,\Delta w} = F(w) - \frac{E(w)}{\varkappa'\varkappa'}\cdot\frac{1}{\varkappa'\varkappa'}\cdot\frac{\sin w\,\Delta w}{\cos w},$$

ideoque:

$$C = \frac{\pi}{4\sqrt{(mm-pp)}}\left[\frac{nn-pp}{\varkappa'\varkappa'}E(w) + ppF(w) - \frac{\varkappa\varkappa\, nn}{\varkappa'\varkappa'}\cdot\frac{\sin w\cos w}{\Delta w} + \frac{pp}{\varkappa'\varkappa'}\cdot\frac{\sin w\,\Delta w}{\cos w}\right].$$

In qua formula est e (7.)

$$\cos w = \frac{p}{m},\quad \Delta w = \frac{n}{m},\quad \varkappa\varkappa = \frac{mm-nn}{mm-pp},\quad \varkappa'\varkappa' = \frac{nn-pp}{mm-pp},$$

unde expressio inventa ipsius C in sequentem contrahitur:

$$C = \frac{\pi m}{4\sin w}\left[\sin^2 w\, E(w) + \cos^2 w\, F(w)\right] + \frac{\pi n p}{4m}.$$

Hinc area integra ellipsoidae, cuius semiaxes $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{p}$, fit:

$$S = 2\pi\left[\frac{\sin^2 w\, E(w) + \cos^2 w\, F(w)}{np\sin w} + \frac{1}{mm}\right].$$

De substitutionibus

$\cos\varphi = \sin h\,\Delta(h', \lambda')$,	$\cos\eta = \sin i\,\Delta(i', \varkappa')$,
$\sin\varphi\cos\psi = \cos h\cos h'$,	$\sin\eta\cos\vartheta = \cos i\cos i'$,
$\sin\varphi\sin\psi = \sin h'\,\Delta(h, \lambda)$,	$\sin\eta\sin\vartheta = \sin i\,\Delta(i, \varkappa)$.

10.

Determinatio antecedens areae ellipsoidae cum ea convenit, quam olim ill. Legendre per duas methodos diversas invenit, quarum altera per evolutionem in seriem procedit; altera methodus, qua vir illustris usus est, et ipsa transformationi variabilium innititur. Quam eo magis memorabilem esse duco, quod elementum areae, per variabiles novas expressum, in duas partes discerpitur, quae singulae *variabiles separatas habent, ita ut bis integratae, producta binorum integralium simplicium evadant.* Forma autem, qua variabiles separatae inveniuntur, sicuti in aequationibus differentialibus affectatur, ita etiam integralibus multiplicibus lucem maximam affundere videtur. In finem propositum dividit vir ill. aream in elementa infinita rectangularia, quae intersectione mutua linearum alterius curvaturae cum lineis alterius formantur. Quae elementa exprimit

per duas variabiles tales, ut alterutra constante, variante altera, elementa in eadem linea curvaturae posita obtineantur. Integratione facta pro utraque variabili inter limites constantes, inde area rectanguli eruitur, quatuor lineis curvaturae inclusi. Quod invenitur generaliter per speciem tertiam integralium ellipticorum exprimi. Calculi momenta praecipua haec sunt. Sit

$$\lambda\lambda = \frac{pp(mm-nn)}{nn(mm-pp)}, \quad \lambda'\lambda' = \frac{mm(nn-pp)}{nn(mm-pp)},$$

atque ponatur:

$$\begin{aligned} mx &= \cos\varphi &&= \sin h\,\Delta(h', \lambda'), \\ ny &= \sin\varphi\cos\psi &&= \cos h\cos h', \\ pz &= \sin\varphi\sin\psi &&= \sin h'\,\Delta(h, \lambda), \end{aligned}$$

designantibus, ut supra, x, y, z coordinatas puncti in superficie ellipsoidae positi, cuius aequatio

$$mmxx + nnyy + ppzz = 1,$$

sive cuius semiaxes $\frac{1}{m}, \frac{1}{n}, \frac{1}{p}$. Quibus statutis, probatur e theoria nota linearum curvaturae, quoties h' constans, variante h obtineri puncta lineae alterius curvaturae; quoties h constans, variante h' obtineri puncta in linea alterius curvaturae posita.

In substitutione proposita et ipsi $\cos\varphi$, $\sin\varphi\cos\psi$, $\sin\varphi\sin\psi$ exprimuntur per binos factores, qui alter alteram variabilem continent, et idem invenitur accidere de functione R per angulos h, h' expressa. Facta enim substitutione, prodit

$$\begin{aligned} \sqrt{R} &= \sqrt{(mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\psi)} \\ &= \frac{1}{n}\sqrt{(mm\sin^2 h + nn\cos^2 h)}\sqrt{(pp\sin^2 h' + nn\cos^2 h')}. \end{aligned}$$

Porro obtinetur elementum superficiei sphaericae, per h, h' expressum

$$\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi = \frac{(\lambda\lambda\cos^2 h + \lambda'\lambda'\cos^2 h')\, dh\, dh'}{\Delta(h, \lambda)\,\Delta(h', \lambda')}.$$

Unde videmus, etiam hoc elementum in duas partes discerpi, quae singulae variabiles separatas habent.

Per aequationes omnino similes iis, quibus $\cos\varphi$, $\sin\varphi\cos\psi$, $\sin\varphi\sin\psi$ ab angulis h, h' pendent, exprimuntur $\cos\eta$, $\sin\eta\cos\vartheta$, $\sin\eta\sin\vartheta$ per angulos novos i, i', siquidem statuitur

$$\operatorname{tang} i = \frac{m}{n}\operatorname{tang} h, \quad \operatorname{tang} i' = \frac{p}{n}\operatorname{tang} h'.$$

Quibus positis, habetur

$$\sqrt{R} = \frac{mnp}{\sqrt{(mm\cos^2 i + nn\sin^2 i)}\sqrt{(pp\cos^2 i' + nn\sin^2 i')}};$$

$$\frac{n\Delta(h,\lambda)}{\sqrt{(mm\sin^2 h + nn\cos^2 h)}} = \Delta(i,\varkappa), \quad \frac{n\Delta(h',\lambda')}{\sqrt{(pp\sin^2 h' + nn\cos^2 h')}} = \Delta(i',\varkappa'),$$

unde

$$\cos\eta = \frac{m\cos\varphi}{\sqrt{R}} = \sin i\,\Delta(i',\varkappa'),$$

$$\sin\eta\cos\vartheta = \frac{n\sin\varphi\cos\psi}{\sqrt{R}} = \cos i\cos i',$$

$$\sin\eta\sin\vartheta = \frac{p\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{R}} = \sin i'\,\Delta(i,\varkappa),$$

nec non:

$$\sin\eta\, d\eta\, d\vartheta = \frac{mnp\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\sqrt{R^3}} = \frac{[\varkappa\varkappa\cos^2 i + \varkappa'\varkappa'\cos^2 i']\, di\, di'}{\Delta(i,\varkappa)\,\Delta(i',\varkappa')},$$

siquidem moduli $\varkappa$, $\varkappa'$ ponuntur, ut supra,

$$\varkappa = \sqrt{\left(\frac{mm-nn}{mm-pp}\right)}, \quad \varkappa' = \sqrt{\left(\frac{nn-pp}{mm-pp}\right)}.$$

Posito insuper, ut supra, $\cos w = \frac{p}{m}$, ipsi $\sqrt{R}$ etiam hanc formam creare licet:

$$\sqrt{R} = \frac{n}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2 w\sin^2 i)}\sqrt{(1+\varkappa'\varkappa'\operatorname{tang}^2 w\sin^2 i')}}.$$

Unde elementum areae ellipsoidae dS per angulos novos i, i' expressum, hanc formam induit:

$$dS = \frac{\sqrt{(R)}\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{mnp} =$$

$$\frac{n^2}{m^2p^2}\cdot\frac{\varkappa\varkappa\cos^2 i + \varkappa'\varkappa'\cos^2 i'}{[1-\varkappa^2\sin^2 w\sin^2 i]^2\,[1+\varkappa'\varkappa'\operatorname{tang}^2 w\sin^2 i']^2}\cdot\frac{di\, di}{\Delta(i,\varkappa)\,\Delta(i',\varkappa')}.$$

Ita videmus, elementum areae ellipsoidae, per angulos i, i' expressum in duas partes discerpi, in quibus singulis variabiles separatae sunt. Posito igitur

$$\int\frac{\varkappa\varkappa\cos^2 i . di}{[1-\varkappa^2\sin^2 w\sin^2 i]^2\,\Delta(i,\varkappa)} = L\int\frac{di'}{[1+\varkappa'\varkappa'\operatorname{tang}^2 w\sin^2 i']^2\,\Delta(i',\varkappa')} = M',$$

$$\int\frac{di}{[1-\varkappa^2\sin^2 w\sin^2 i]^2\,\Delta(i,\varkappa)} = M\int\frac{\varkappa'\varkappa'\cos^2 i'\, di'}{[1+\varkappa'\varkappa'\operatorname{tang}^2 w\sin^2 i']^2\,\Delta(i',\varkappa')} = L',$$

invenitur:

$$S = \frac{n^2}{m^2p^2}[LM' + L'M].$$

Quoties pro utraque variabili inter limites constantes integramus, $i = i_1$, $i = i_2$ et $i' = i'_1$, $i' = i'_2$, erit S area rectanguli in superficie ellipsoidae delineati, quatuor lineis curvaturae inclusi, quarum binae ad eandem curvaturam pertinent. Binae, quae ad alteram curvaturam pertinent, obti-

nentur, quoties in valoribus coordinatarum x, y, z supra traditis h ut constans consideratur, eique valores $\tang h = \frac{n}{m} \tang i_1$, $\tang h = \frac{n}{m} \tang i_2$ tribuuntur; binae, quae ad alteram pertinent, obtinentur, ubi h' ut constans consideratur, eique valores tribuuntur $\tang h' = \frac{n}{p} \tang i'_1$, $\tang h' = \frac{n}{p} \tang i'_2$. Cuiusmodi rectangulum ex expressionibus antecedentibus apparet, generaliter per integralia elliptica exprimi, quae ad speciem tertiam pertinent. Quoties octantem areae integrae quaeris, integralia extendi debent inter limites $h = 0$, $h = \frac{\pi}{2}$; $h' = 0$, $h' = \frac{\pi}{2}$, ideoque etiam inter limites $i = 0$ et $i = \frac{\pi}{2}$, $i' = 0$ et $i' = \frac{\pi}{2}$. Quo casu integralia elliptica in speciem primam et secundam redeunt, unde variis reductionibus adhibitis, ad expressionem supra inventam delabimur. Quae apud ipsum Legendre videas.

11.

Casu quo integratio ad octantem areae integrae extenditur, reductio expressionis inventae

$$S = \frac{n^2}{m^2 p^2} [LM' + L'M]$$

in formam simplicem, supra aliis methodis erutam, non sine inventis praeclaris transigi potest, quae ill. Legendre de tertia specie integralium ellipticorum condidit. Vice versâ, proprietates integralium ellipticorum satis reconditae per transformationem illam integralium duplicium non sine elegantia demonstrari possunt.

Ita e. g. de formula inventa

$$\iint \sin\eta \, d\eta \, d\vartheta = \iint \frac{\varkappa\varkappa \cos^2 i + \varkappa'\varkappa' \cos^2 i'}{\Delta(\varkappa, i)\,\Delta(\varkappa', i')} \, di \, di'$$
$$= \iint \frac{\Delta^2(\varkappa, i) + \Delta^2(\varkappa', i') - 1}{\Delta(\varkappa, i)\,\Delta(\varkappa', i')} \, di \, di',$$

casu quo pro angulis η, ϑ, i, i' inter limites 0 et $\frac{\pi}{2}$ integratur, statim obtines theorema egregium; ab ill. Legendre inventum, quod relationem sistit inter integralia elliptica integra speciei primae et secundae, quae ad modulum $\varkappa$ ejusque complementum $\varkappa'$ pertinent,

$$F^1(\varkappa)\,E^1(\varkappa') + F^1(\varkappa')\,E^1(\varkappa) - F^1(\varkappa)\,F^1(\varkappa') = \frac{\pi}{2}.$$

Cuius etiam demonstrationem luculentam, e formula generaliori deductam, dedit Cl. Abel (Vol. II. pag. 26.).

Vidimus supra, tres quantitates, $\cos\eta$, $\sin\eta\cos\vartheta$, $\sin\eta\sin\vartheta$ ipsos esse cosinus angulorum, quos linea normalis in puncto ellipsoidae ducta, cum axibus format. Unde patet, $\sin\eta\, d\eta\, d\vartheta$ esse elementum *curvaturae integrae* areae, quam Cl. **Gauss** in *Disq. gener. de superf. curvis* appellavit. Hinc ope formulae inventae

$$\iint \sin\eta\, d\eta\, d\vartheta = \iint \frac{[\Delta^2(\varkappa, i) + \Delta^2(\varkappa', i') - 1]\, di\, di'}{\Delta(\varkappa, i)\,\Delta(\varkappa', i')}$$

facile invenis *curvaturam integram rectanguli in superficie ellipsoidae quatuor lineis curvaturae inclusi,*

$$\begin{aligned} &[F(i_2, \varkappa) - F(i_1, \varkappa)]\,[E(i'_2, \varkappa') - E(i'_1, \varkappa')] \\ +&[F(i'_2, \varkappa') - F(i'_1, \varkappa')]\,[E(i_2, \varkappa) - E(i_1, \varkappa)] \\ -&[F(i_2, \varkappa) - F(i_1, \varkappa)]\,[F(i'_2, \varkappa') - F(i'_1, \varkappa')]. \end{aligned}$$

Erit autem curvatura integra rectanguli pars superficiei sphaericae, abscissa duobus conis, quorum aequatio

$$\frac{\varkappa\varkappa\, xx}{\Delta^2(i, \varkappa)} + \frac{yy}{\cos^2 i} = \frac{zz}{\sin^2 i},$$

posito $i = i_1$ et $i = i_2$, et duobus conis, quorum aequatio

$$\frac{\varkappa'\varkappa'\, xx}{\Delta^2(i', \varkappa')} + \frac{yy}{\cos^2 i'} = \frac{zz}{\sin^2 i'},$$

posito $i' = i'_1$, $i' = i'_2$, siquidem conorum apices in centro sphaerae statuuntur. Quod e valoribus, quos $\cos\eta$, $\sin\eta\cos\vartheta$, $\sin\eta\sin\vartheta$ pro limitibus induunt, facile demonstratur. Quoties $i_1 = 0$, $i'_1 = 0$, duae e lineis curvaturae fiunt ipsae sectiones principales ellipsoidae; quo casu, siquidem $i_2 = i$, $i'_2 = i'$, fit curvatura integra

$$F(i, \varkappa)\, E(i', \varkappa') + F(i', \varkappa')\, E(i, \varkappa) - F(i, \varkappa)\, F(i', \varkappa').$$

Observo adhuc, elementum lineae curvaturae, designante h' sive i' constantem, esse

$$\frac{1}{mn}\sqrt{(\lambda\lambda\cos^2 h + \lambda'\lambda'\cos^2 h')}\sqrt{(mm\sin^2 h + nn\cos^2 h)}\cdot\frac{dh}{\Delta(h, \lambda)} =$$
$$\frac{n\sqrt{(\varkappa\varkappa\cos^2 i + \varkappa'\varkappa'\cos^2 i')}}{mm\,[1 - \varkappa^2\sin^2 w\sin^2 i]^{\frac{3}{2}}\,[1 + \varkappa'\varkappa'\operatorname{tang}^2 w\sin^2 i']^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{di}{\Delta(i, \varkappa)};$$

designante h sive i constantem,

$$\frac{1}{np}\sqrt{(\lambda\lambda\cos^2 h + \lambda'\lambda'\cos^2 h')}\sqrt{(pp\sin^2 h' + nn\cos^2 h')}\cdot\frac{dh'}{\Delta(h', \lambda')} =$$
$$\frac{n\sqrt{(\varkappa\varkappa\cos^2 i + \varkappa'\varkappa'\cos^2 i')}}{pp\,[1 - \varkappa^2\sin^2 w\sin^2 i]^{\frac{1}{2}}\,[1 + \varkappa'\varkappa'\operatorname{tang}^2 w\sin^2 i']^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{di'}{\Delta(i', \varkappa')}.$$

Utriusque lineae elementis in se ductis, prodit, quod fieri debet, elemen-

tum areae. Rectificationem lineae curvaturae, patet, a transcendentibus Abelianis pendere.

Exemplum IV.

$$D = \iint \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{[m'm'\cos^2\varphi + n'n'\sin^2\varphi\cos^2\psi + p'p'\sin^2\varphi\sin^2\psi]\sqrt{R}}.$$

12.

Per substitutionem nostram integrale propositum ope ipsorum η, ϑ hunc in modum exprimitur:

$$D = \frac{1}{mnp}\iint \frac{\sin\eta\, d\eta\, d\vartheta}{\frac{m'm'}{mm}\cos^2\eta + \frac{n'n'}{nn}\sin^2\eta\cos^2\vartheta + \frac{p'p'}{pp}\sin^2\eta\sin^2\vartheta}.$$

Unde e formulis exemplo secundo propositis, siquidem ibidem ponimus $\frac{m}{m'}$, $\frac{n}{n'}$, $\frac{p}{p'}$ loco m, n, p, obtinemus:

$$D = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{F(\varkappa, w)}{mn'p'\sin w},$$

modulo $\varkappa$ et amplitudine w definitis per aequationes:

$$\varkappa\varkappa = \frac{p'p'(mmn'n' - m'm'nn)}{n'n'(mmp'p' - m'm'pp)},\quad ww = \frac{pm'}{mp'},\quad \Delta(w, \varkappa) = \frac{nm'}{mn'}.$$

Sive etiam e (16.) obtinetur formula:

$$D = \iint \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{[m'm'\cos^2\varphi + n'n'\sin^2\varphi\cos^2\psi + p'p'\sin^2\varphi\sin^2\psi]\sqrt{(mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi\cos^2\psi + pp\sin^2\varphi\sin^2\psi)}}$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{[(mm + m'm'x)(nn + n'n'x)(pp + p'p'x)]}}.$$

Exemplum V.

$$E = \iint \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{U'\sqrt{U}},$$

$$U = a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi\cos^2\psi + c\sin^2\varphi\sin^2\psi + 2d\sin^2\varphi\cos\psi\sin\psi + 2e\cos\varphi\sin\varphi\sin\psi + 2f\cos\varphi\sin\varphi\cos\psi,$$

$$U' = a'\cos^2\varphi + b'\sin^2\varphi\cos^2\psi + c'\sin^2\varphi\sin^2\psi + 2d'\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\psi + 2e'\cos\varphi\sin\varphi\sin\psi + 2f'\cos\varphi\sin\varphi\cos\psi.$$

Limites $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$; $\psi = 0$, $\psi = 2\pi$.

13.

Integrale hoc exemplo propositum multo complicatius est quam id, de quo exemplo antecedente egimus, cum in expressionibus ipsarum U, U' praeter quadrata quantitatum $\cos\varphi$, $\sin\varphi\cos\psi$, $\sin\varphi\sin\psi$ adhuc binae in se ductae inveniantur. Nihilominus valorem eius eruimus, si substitu-

tioni, quibus usi sumus, transformationem coordinatarum orthogonalium bis adhibitam jungimus. Supponimus autem, functiones U, U' pro valoribus certe realibus angulorum φ, ψ valores semper positivos servare; quoties enim U valores etiam negativos induere potest, integrale propositum imaginarium fit, quoties U' etiam negativos induit valores, integralis valor in infinitum abit.

Ac si consideramus $r\cos\varphi$, $r\sin\varphi\cos\psi$, $r\sin\varphi\sin\psi$ tamquam coordinatas orthogonales puncti, cuius distantia ab initio coordinatarum $= r$, per transformationem primam coordinatarum, facile intelligitur, E hanc formam induere posse:

$$E = \iint \frac{\sin\varphi'\, d\varphi'\, d\psi'}{U'\sqrt{(GG\cos^2\varphi' + G'G'\sin^2\varphi'\cos^2\psi' + G''G''\sin^2\varphi'\sin^2\psi')}},$$

designantibus $r\cos\varphi'$, $r\sin\varphi'\cos\psi'$, $r\sin\varphi'\sin\psi'$ coordinatas transformatas, relatas ad axes principales ellipsoidae, cuius aequatio

$$r^2 U = 1,$$

et cuius semiaxes principales $\frac{1}{G}$, $\frac{1}{G'}$, $\frac{1}{G''}$. Ac rursus erunt limites integralis transformati $\varphi' = 0$ et $\varphi' = \pi$, $\psi' = 0$ et $\psi' = 2\pi$. Functio autem U', per φ', ψ' expressa, formam induit

$$U' = a''\cos^2\varphi' + b''\sin^2\varphi'\cos^2\psi' + c''\sin^2\varphi'\cos^2\psi' +$$
$$2d''\sin^2\varphi'\cos\psi'\sin\psi' + 2e''\cos\varphi'\sin\varphi'\sin\psi' + 2f''\sin\varphi'\cos\varphi'\cos\psi'.$$

Integrali ita transformato applicemus substitutionem nostram

$$\cos\eta' = \frac{G\cos\varphi'}{\sqrt{R'}},\quad \sin\eta'\cos\vartheta' = \frac{G'\sin\varphi'\cos\psi'}{\sqrt{R'}},\quad \sin\eta'\sin\vartheta' = \frac{G''\sin\varphi'\sin\psi'}{\sqrt{R'}},$$

posito

$$R' = GG\cos^2\varphi' + G'G'\sin^2\varphi'\cos^2\psi' + G''G''\sin^2\varphi'\sin^2\psi',$$

quo facto integrale propositum induit formam sequentem:

$$E = \frac{1}{GG'G''}\iint \frac{\sin\eta'\, d\eta'\, d\vartheta'}{U''},$$

siquidem ponitur

$$U'' = \frac{a''\cos^2\eta'}{GG} + \frac{b''\sin^2\eta'\cos^2\vartheta'}{G'G'} + \frac{c''\sin^2\eta'\sin^2\vartheta'}{G''G''}$$
$$+ 2\left[\frac{d''\sin^2\eta'\cos\vartheta'\sin\vartheta'}{G'G''} + \frac{e''\cos\eta'\sin\eta'\sin\vartheta'}{G''G} + \frac{f''\sin\eta'\cos\eta'\cos\vartheta'}{GG'}\right].$$

Ac rursus limites erunt $\eta' = 0$ et $\eta' = \pi$, $\vartheta' = 0$ et $\vartheta' = 2\pi$.

Jam secunda vice consideremus $r\cos\eta'$, $r\sin\eta'\cos\vartheta'$, $r\sin\eta'\sin\vartheta'$ tamquam coordinatas orthogonales puncti, cuius distantia ab initio coordinatarum $= 1$; sint $r\cos\eta$, $r\sin\eta\cos\vartheta$, $r\sin\eta\sin\vartheta$ coordinatae transfor-

matae, relatae ad axes principales ellipsoidae, cuius aequatio

$$rrU'' = 1,$$

et cuius semiaxes principales sint m, n, p. Quibus statutis integrale propositum per η, ϑ expressum hanc formam induere patet simplicissimam

$$E = \iint \frac{\sin\eta\, d\eta\, d\vartheta}{GG'G''\left[\frac{\cos^2\eta}{mm} + \frac{\sin^2\eta\cos^2\vartheta}{nn} + \frac{\sin^2\eta\sin^2\vartheta}{pp}\right]},$$

limitibus integralis rursus existentibus $\eta = 0$ et $\eta = \pi$, $\vartheta = 0$ et $\vartheta = 2\pi$. Quod in exemplo II. facile ad integrale ellipticum revocatum est.

14.

Reductio integralis propositi antecedentibus indicata requirit binas transformationes coordinatarum orthogonalium, quae singulae a resolutione aequationis cubicae pendent. Nam primum ut radices aequationis cubicae inveniuntur GG, $G'G'$, $G''G''$, a quibus pendent coëfficientes substitutionis primae adhibitae, ideoque etiam quantitates a'', b'', etc. Per quas et ipsas G, G', G'' deinde exhibentur coëfficientes aequationis cubicae secundae, cuius radices sunt $\frac{1}{mm}$, $\frac{1}{nn}$, $\frac{1}{pp}$. At factis calculis observatur, e coëfficientibus illis aequationis cubicae secundae quantitates G, G', G'', omnino abire, unde resolutioni aequationis cubicae primae supersederi potest; ita ut problema, quod a duabus aequationibus cubicis pendere videatur, revera ab unica tantum pendeat. Calculum paucis indicabo, forte et aliis occasionibus utilem.

Sit substitutio prima adhibita:

$$\begin{aligned}
\cos\varphi &= \alpha\cos\varphi' + \alpha'\sin\varphi'\cos\psi' + \alpha''\sin\varphi'\sin\psi',\\
\sin\varphi\cos\psi &= \beta\cos\varphi' + \beta'\sin\varphi'\cos\psi' + \beta''\sin\varphi'\sin\psi',\\
\sin\varphi\sin\psi &= \gamma\cos\varphi' + \gamma'\sin\varphi'\cos\psi' + \gamma''\sin\varphi'\sin\psi',
\end{aligned}$$

unde etiam vice versa:

$$\begin{aligned}
\cos\varphi' &= \alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi\cos\psi + \gamma\sin\varphi\sin\psi,\\
\sin\varphi'\cos\psi' &= \alpha'\cos\varphi + \beta'\sin\varphi\cos\psi + \gamma'\sin\varphi\sin\psi,\\
\sin\varphi'\sin\psi' &= \alpha''\cos\varphi + \beta''\sin\varphi\cos\psi + \gamma''\sin\varphi\sin\psi.
\end{aligned}$$

Quibus aequationibus in functione U' substitutis, obtinemus

$$\begin{aligned}
a'' &= a'\alpha\alpha + b'\beta\beta + c'\gamma\gamma + 2d'\beta\gamma + 2e'\gamma\alpha + 2f'\alpha\beta,\\
b'' &= a'\alpha'\alpha' + b'\beta'\beta' + c'\gamma'\gamma' + 2d'\beta'\gamma' + 2e'\gamma'\alpha' + 2f'\alpha'\beta',\\
c'' &= a'\alpha''\alpha'' + b'\beta''\beta'' + c'\gamma''\gamma'' + 2d'\beta''\gamma'' + 2e'\gamma''\alpha'' + 2f'\alpha''\beta'',
\end{aligned}$$

$$d'' = a'\alpha'\alpha'' + b'\beta'\beta'' + c'\gamma'\gamma'' + d'(\beta'\gamma'' + \beta''\gamma') + e'(\gamma'\alpha'' + \gamma''\alpha') + f'(\alpha'\beta'' + \alpha''\beta'),$$
$$e'' = a'\alpha''\alpha + b'\beta''\beta + c'\gamma''\gamma + d'(\beta''\gamma + \beta\gamma'') + e'(\gamma''\alpha + \gamma\alpha'') + f'(\alpha''\beta + \alpha\beta''),$$
$$f'' = a'\alpha\alpha' + b'\beta\beta' + c'\gamma\gamma' + d'(\beta\gamma' + \beta'\gamma) + e'(\gamma\alpha' + \gamma'\alpha) + f'(\alpha\beta' + \alpha'\beta).$$

Inter coëfficientes substitutionis propositae habentur relationes notissimae, quae in transformatione systematis coordinatarum orthogonalium in aliud eiusmodi systema valent. Deinde ut systema novum coordinatarum idem sit atque axium principalium ellipsoidae, cuius aequatio $r^2 U = 1$, siquidem $\frac{1}{G}$, $\frac{1}{G'}$, $\frac{1}{G''}$ sunt ipsae semiaxes principales, haberi debet aequatio:

$$U = GG\cos^2\varphi' + G'G'\sin^2\varphi'\cos^2\varphi' + G''G''\sin^2\varphi'\sin^2\psi',$$

unde prodeunt relationes:

$$\begin{aligned}
GG\alpha\alpha + G'G'\alpha'\alpha' + G''G''\alpha''\alpha'' &= a,\\
GG\beta\beta + G'G'\beta'\beta' + G''G''\beta''\beta'' &= b,\\
GG\gamma\gamma + G'G'\gamma'\gamma' + G''G''\gamma''\gamma'' &= c,\\
GG\beta\gamma + G'G'\beta'\gamma' + G''G''\beta''\gamma'' &= d,\\
GG\gamma\alpha + G'G'\gamma'\alpha' + G''G''\gamma''\alpha'' &= e,\\
GG\alpha\beta + G'G'\alpha'\beta' + G''G''\alpha''\beta'' &= f,
\end{aligned}$$

quibus iungamus sequentes, quae ex antecedentibus fluunt:

$$\begin{aligned}
G'^2G''^2\alpha\alpha + G''^2G^2\alpha'\alpha' + G^2G'^2\alpha''\alpha'' &= bc - dd,\\
G'^2G''^2\beta\beta + G''^2G^2\beta'\beta' + G^2G'^2\beta''\beta'' &= ca - ee,\\
G''^2G^2\gamma\gamma + G''^2G^2\gamma'\gamma' + G^2G'^2\gamma''\gamma'' &= ab - ff,\\
G'^2G''^2\beta\gamma + G''^2G^2\beta'\gamma' + G^2G'^2\beta''\gamma'' &= ef - ad,\\
G'^2G''^2\gamma\alpha + G''^2G^2\gamma'\alpha' + G^2G'^2\gamma''\alpha'' &= fd - be,\\
G'^2G''^2\alpha\beta + G''^2G^2\alpha'\beta' + G^2G'^2\alpha''\beta'' &= de - cf,\\
G^2G'^2G''^2 &= abc - add - bee - cff + 2def.
\end{aligned}$$

Aequatio ellipsoidae secundae, cuius axes principales investigandae proponuntur, haec erat:

$$\frac{a''}{GG}xx + \frac{b''}{G'G'}yy + \frac{c''}{G''G''}zz + \frac{2d''}{G'G''}yz + \frac{2e''}{G''G}zx + \frac{2f''}{GG'}xy = 1,$$

siquidem

$$r\cos\eta' = x, \quad r\sin\eta'\cos\vartheta' = y, \quad r\sin\eta'\sin\vartheta' = z.$$

Unde, si m, n, p denotant semiaxes principales, e theoria nota axium principalium superficierum secundi ordinis, erunt m, n, p radices aequationis cubicae

$$x^3 - x^2\left(\frac{a''}{GG} + \frac{b''}{G'G'} + \frac{c''}{G''G''}\right) + x\left(\frac{b''c''-d''d''}{G'^2G''^2} + \frac{c''a''-e''e''}{G''^2G^2} + \frac{a''b''-f''f''}{G^2G'^2}\right)$$
$$- \frac{a''b''c''-a''d''d''-b''e''e''-c''f''f''+2d''e''f''}{G^2G'^2G''^2} = 0.$$

Ipsarum autem a'', b'' etc. substitutis valoribus, per relationes supra appositas et eas quae inter ipsas α, β, γ etc. habentur, coëfficientes substitutionis per solas quantitates a, b, c etc. a', b', c' etc. exprimere licet. Quo facto, aequatio cubica multiplicata per $G^2G'^2G''^2$ haec evadit:

$$\begin{aligned}
& x^3\{abc - add - bee - cff + 2def\} \\
& - x^2\left\{\begin{matrix} a'(bc-dd) + b'(ca-ee) + c'(ab-ff) \\ +2d'(ef-ad) + 2e'(fd-be) + 2f'(de-cf) \end{matrix}\right\} \\
& + x\left\{\begin{matrix} a(b'c'-d'd') + b(c'a'-e'e') + c(a'b'-f'f') \\ +2d(ef-ad) + 2e(fd-be) + 2f(d'e'-c'f') \end{matrix}\right\} \\
& - a'b'c' + a'd'd' + b'e'e' + c'f'f' - 2d'e'f' = 0.
\end{aligned}$$

Cuius aequationis radices ubi sunt $\frac{1}{mm}$, $\frac{1}{nn}$, $\frac{1}{pp}$, vidimus §. 13., inveniri:

$$E = \frac{1}{\sqrt{(abc-add-bee-cff+2def)}}\iint\frac{\sin\eta\, d\eta\, d\vartheta}{\frac{\cos^2\eta}{mm} + \frac{\sin^2\eta\cos^2\vartheta}{nn} + \frac{\sin^2\eta\sin^2\vartheta}{pp}},$$

integrationibus factis a $\eta = 0$, $\vartheta = 0$ usque ad $\eta = \pi$, $\vartheta = 2\pi$.

Adnoto, commutatis inter se quantitatibus a, b, c etc. et a', b', c' etc., aequationem cubicam in aliam abire, cuius radices valores reciprocos nanciscuntur.

De substitutione

$$\cos\eta = \frac{g\cos\varphi + h\sin\psi\cos\psi + i\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{U}},$$

$$\sin\eta\cos\vartheta = \frac{g'\cos\varphi + h'\sin\varphi\cos\psi + i'\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{U}},$$

$$\sin\eta\sin\vartheta = \frac{g''\cos\varphi + h''\sin\varphi\cos\psi + i''\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{U}}.$$

15.

Methodus, qua antecedentibus usi sumus, procedebat per tres transformationes integralis propositi; afferam sequentibus methodum novam et magis directam, qua per substitutionem unicam pervenimus ad formam simplicem, in quam integrale E redegimus. Et dum methodo antecedente ellipsoidae *binae*, quae ad axes orthogonales relatae erant, ad axes principales referri debebant, hac methodo investigandae sunt axes principales *unius ellipsoidae, cuius datur aequatio ad coordinatas obliquas relata.*

$$d'' = a'\alpha'\alpha'' + b'\beta'\beta'' + c'\gamma'\gamma'' + d'(\beta'\gamma'' + \beta''\gamma') + e'(\gamma'\alpha'' + \gamma''\alpha') + f'(\alpha'\beta'' + \alpha''\beta'),$$
$$e'' = a'\alpha''\alpha + b'\beta''\beta + c'\gamma''\gamma + d'(\beta''\gamma + \beta\gamma'') + e'(\gamma''\alpha + \gamma\alpha'') + f'(\alpha''\beta + \alpha\beta''),$$
$$f'' = a'\alpha\alpha' + b'\beta\beta' + c'\gamma\gamma' + d'(\beta\gamma' + \beta'\gamma) + e'(\gamma\alpha' + \gamma'\alpha) + f'(\alpha\beta' + \alpha'\beta).$$

Inter coëfficientes substitutionis propositae habentur relationes notissimae, quae in transformatione systematis coordinatarum orthogonalium in aliud eiusmodi systema valent. Deinde ut systema novum coordinatarum idem sit atque axium principalium ellipsoidae, cuius aequatio $r^2 U = 1$, siquidem $\frac{1}{G}$, $\frac{1}{G'}$, $\frac{1}{G''}$ sunt ipsae semiaxes principales, haberi debet aequatio:

$$U = GG\cos^2\varphi' + G'G'\sin^2\varphi'\cos^2\varphi' + G''G''\sin^2\varphi'\sin^2\psi',$$

unde prodeunt relationes:

$$\begin{aligned}
GG\alpha\alpha + G'G'\alpha'\alpha' + G''G''\alpha''\alpha'' &= a,\\
GG\beta\beta + G'G'\beta'\beta' + G''G''\beta''\beta'' &= b,\\
GG\gamma\gamma + G'G'\gamma'\gamma' + G''G''\gamma''\gamma'' &= c,\\
GG\beta\gamma + G'G'\beta'\gamma' + G''G''\beta''\gamma'' &= d,\\
GG\gamma\alpha + G'G'\gamma'\alpha' + G''G''\gamma''\alpha'' &= e,\\
GG\alpha\beta + G'G'\alpha'\beta' + G''G''\alpha''\beta'' &= f,
\end{aligned}$$

quibus iungamus sequentes, quae ex antecedentibus fluunt:

$$\begin{aligned}
G'^2G''^2\alpha\alpha + G''^2G^2\alpha'\alpha' + G^2G'^2\alpha''\alpha'' &= bc - dd,\\
G'^2G''^2\beta\beta + G''^2G^2\beta'\beta' + G^2G'^2\beta''\beta'' &= ca - ee,\\
G''^2G^2\gamma\gamma + G''^2G^2\gamma'\gamma' + G^2G'^2\gamma''\gamma'' &= ab - ff,\\
G'^2G''^2\beta\gamma + G''^2G^2\beta'\gamma' + G^2G'^2\beta''\gamma'' &= ef - ad,\\
G'^2G''^2\gamma\alpha + G''^2G^2\gamma'\alpha' + G^2G'^2\gamma''\alpha'' &= fd - be,\\
G'^2G''^2\alpha\beta + G''^2G^2\alpha'\beta' + G^2G'^2\alpha''\beta'' &= de - cf,\\
G^2G'^2G''^2 &= abc - add - bee - cff + 2def.
\end{aligned}$$

Aequatio ellipsoidae secundae, cuius axes principales investigandae proponuntur, haec erat:

$$\frac{a''}{GG}xx + \frac{b''}{G'G'}yy + \frac{c''}{G''G''}zz + \frac{2d''}{G'G''}yz + \frac{2e''}{G''G}zx + \frac{2f''}{GG'}xy = 1,$$

siquidem

$$r\cos\eta' = x, \quad r\sin\eta'\cos\vartheta' = y, \quad r\sin\eta'\sin\vartheta' = z.$$

Unde, si m, n, p denotant semiaxes principales, e theoria nota axium principalium superficierum secundi ordinis, erunt m, n, p radices aequationis cubicae

$$x^3 - x^2\left(\frac{a''}{GG} + \frac{b''}{G'G'} + \frac{c''}{G''G''}\right) + x\left(\frac{b''c'' - d''d''}{G'^2G''^2} + \frac{c''a'' - e''e''}{G''^2G^2} + \frac{a''b'' - f''f''}{G^2G'^2}\right)$$
$$- \frac{a''b''c'' - a''d''d'' - b''e''e'' - c''f''f'' + 2d''e''f''}{G^2G'^2G''^2} = 0.$$

Ipsarum autem a'', b'' etc. substitutis valoribus, per relationes supra appositas et eas quae inter ipsas α, β, γ etc. habentur, coëfficientes substitutionis per solas quantitates a, b, c etc. a', b', c' etc. exprimere licet. Quo facto, aequatio cubica multiplicata per $G^2G'^2G''^2$ haec evadit:

$$\begin{aligned}
&x^3\{abc - add - bee - cff + 2def\}\\
&- x^2\left\{\begin{array}{l} a'(bc - dd) + b'(ca - ee) + c'(ab - ff)\\ + 2d'(ef - ad) + 2e'(fd - be) + 2f'(de - cf)\end{array}\right\}\\
&+ x\left\{\begin{array}{l} a(b'c' - d'd') + b(c'a' - e'e') + c(a'b' - f'f')\\ + 2d(ef - ad) + 2e(fd - be) + 2f(d'e' - c'f')\end{array}\right\}\\
&- a'b'c' + a'd'd' + b'e'e' + c'f'f' - 2d'e'f' = 0.
\end{aligned}$$

Cuius aequationis radices ubi sunt $\frac{1}{mm}$, $\frac{1}{nn}$, $\frac{1}{pp}$, vidimus §. 13., inveniri:

$$E = \frac{1}{\sqrt{(abc - add - bee - cff + 2def)}} \iint \frac{\sin\eta \, d\eta \, d\vartheta}{\frac{\cos^2\eta}{mm} + \frac{\sin^2\eta\cos^2\vartheta}{nn} + \frac{\sin^2\eta\sin^2\vartheta}{pp}},$$

integrationibus factis a $\eta = 0$, $\vartheta = 0$ usque ad $\eta = \pi$, $\vartheta = 2\pi$.

Adnoto, commutatis inter se quantitatibus a, b, c etc. et a', b', c' etc., aequationem cubicam in aliam abire, cuius radices valores reciprocos nanciscuntur.

De substitutione

$$\cos\eta = \frac{g\cos\varphi + h\sin\psi\cos\psi + i\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{U}},$$
$$\sin\eta\cos\vartheta = \frac{g'\cos\varphi + h'\sin\varphi\cos\psi + i'\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{U}},$$
$$\sin\eta\sin\vartheta = \frac{g''\cos\varphi + h''\sin\varphi\cos\psi + i''\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{U}}.$$

15.

Methodus, qua antecedentibus usi sumus, procedebat per tres transformationes integralis propositi; afferam sequentibus methodum novam et magis directam, qua per substitutionem unicam pervenimus ad formam simplicem, in quam integrale E redegimus. Et dum methodo antecedente ellipsoidae *binae*, quae ad axes orthogonales relatae erant, ad axes principales referri debebant, hac methodo investigandae sunt axes principales *unius ellipsoidae, cuius datur aequatio ad coordinatas obliquas relata.*

Propositum sit problema algebraicum, *per substitutiones lineares*

$$u = gx + hy + iz,$$
$$v = g'x + h'y + i'z,$$
$$w = g''x + h''y + i''z$$

expressiones binas sequentes

$$A = axx + byy + czz + 2dyz + 2ezx + 2fxy,$$
$$A' = a'xx + b'yy + c'zz + 2d'yz + 2e'zx + 2f'xy$$

revocare ad formam simplicem, e qua producta binarum variabilium abierunt,

$$A = uu + vv + ww,$$
$$A' = \frac{uu}{mm} + \frac{v'v'}{nn} + \frac{w'w'}{pp}.$$

Investigandae sunt coëfficientes substitutionis adhibitae, et quantitates m, n, p.

Problema antecedens nullis difficultatibus obnoxium est, et facile revocatur ad problema notum geometricum. Ponamus enim

$$\sqrt{a}.x = x', \quad \sqrt{b}.y = y', \quad \sqrt{c}.z = z',$$
$$\frac{d}{\sqrt{(bc)}} = \cos\lambda, \quad \frac{e}{\sqrt{(ca)}} = \cos\mu, \quad \frac{f}{\sqrt{(ab)}} = \cos\nu,$$

unde fit

$$A = x'x' + y'y' + z'z' + 2\cos\lambda y'z' + 2\cos\mu z'x' + 2\cos\nu x'y',$$
$$A' = \frac{a'}{a}x'x' + \frac{b'}{b}y'y' + \frac{c'}{c}z'z' + \frac{2d'}{\sqrt{(bc)}}y'z' + \frac{2e'}{\sqrt{(ca)}}z'x' + \frac{2f'}{\sqrt{(ab)}}x'y'.$$

Porro substitutiones adhibendae erunt:

$$u = \frac{g}{\sqrt{a}}x' + \frac{h}{\sqrt{b}}y' + \frac{i}{\sqrt{c}}z',$$
$$v = \frac{g'}{\sqrt{a}}x' + \frac{h'}{\sqrt{b}}y' + \frac{i'}{\sqrt{c}}z',$$
$$w = \frac{g''}{\sqrt{a}}x' + \frac{h''}{\sqrt{b}}y' + \frac{i''}{\sqrt{c}}z'.$$

Sint x', y', z' coordinatae obliquae puncti, quae angulos inter se efficiunt λ, μ, ν; ubi u, v, w sunt coordinatae puncti orthogonales, eodem initio gaudentes, quadratum distantiae puncti ab initio communi coordinatarum exprimi potest sive per formulam A, sive per $uu + vv + ww$, unde locum habere debet aequatio prima:

$$A = uu + vv + ww.$$

Sint porro u, v, w relatae ad axes principales ellipsoidae, cuius aequatio, ad coordinatas obliquas x', y', z' relata, est

$$A' = 1;$$

haberi debet aequatio altera

$$A = \frac{uu}{mm} + \frac{vv}{nn} + \frac{ww}{pp},$$

siquidem m, n, p sunt semiaxes ellipsoidae principales. Unde *problema propositum convenit cum problemate geometrico, investigandi axes principales ellipsoidae, cuius aequatio $A' = 1$, designantibus x', y', z' coordinatas obliquas, quae angulos inter se efficiunt λ, μ, ν.* Cuius problematis analysis et alibi invenitur, et a me exhibita est in hoc Diario Vol. II. pag. 227.

Loco citato *) demonstravi, siquidem aequatio ellipsoidae sit

$$Ax'x' + By'y' + Cz'z' + 2ay'z' + 2bz'x' + 2cx'y' = 1,$$

esse $\frac{1}{mm}$, $\frac{1}{nn}$, $\frac{1}{pp}$ radices aequationis cubicae:

$$(x-A)(x-B)(x-C) - (x-A)(x\cos\lambda - a)^2 - (x-B)(x\cos\mu - b)^2$$
$$-(x-C)(x\cos\nu - c)^2 + 2(x\cos\lambda - a)(x\cos\mu - b)(x\cos\nu - c) = 0.$$

Hoc loco igitur in locum ipsarum

$$A,\quad B,\quad C,\quad a,\quad b,\quad c$$

scribendum erit

$$\frac{a'}{a},\quad \frac{b'}{b},\quad \frac{c'}{c},\quad \frac{d'}{\sqrt{(bc)}},\quad \frac{e'}{\sqrt{(ca)}},\quad \frac{f'}{\sqrt{(ab)}}.$$

Unde si insuper restituimus valores:

$$\cos\lambda = \frac{d}{\sqrt{(bc)}},\quad \cos\mu = \frac{e}{\sqrt{(ca)}},\quad \cos\nu = \frac{f}{\sqrt{(ab)}},$$

aequatio cubica, multiplicata per abc, fit:

$$(ax-a')(bx-b')(cx-c') - (ax-a')(dx-d')^2 - (bx-b')(ex-e')^2$$
$$-(cx-c')(fx-f')^2 + 2(dx-d')(ex-e')(fx-f') = 0$$

Quae prorsus convenit cum ea, ad quam §. antecedente devenimus. Iisdem mutationibus factis, e formulis loco citato traditis valores coëfficientium $\frac{g}{\sqrt{a}}$, $\frac{h}{\sqrt{b}}$, $\frac{i}{\sqrt{c}}$ etc., ideoque etiam ipsarum g, h, i etc. nancisceris.

16.

Observo generaliter, propositis aequationibus linearibus

$$u = gx + hy + iz,$$
$$v = g'x + h'y + i'z,$$
$$w = g''x + h''y + i''z,$$

siquidem considerentur x, y, z ideoque etiam u, v, w tamquam functio-

*) L. c. loco x', y', z' positum est x, y, z; porro L, M, N loco $\frac{1}{mm}$, $\frac{1}{nn}$, $\frac{1}{pp}$

nes duarum variabilium φ, ψ, posito brevitatis causa

$$L = \frac{dy}{d\varphi}\frac{dz}{d\psi} - \frac{dy}{d\psi}\frac{dz}{d\varphi},$$
$$M = \frac{dz}{d\varphi}\frac{dx}{d\psi} - \frac{dz}{d\psi}\frac{dx}{d\varphi},$$
$$N = \frac{dx}{d\varphi}\frac{dy}{d\psi} - \frac{dx}{d\psi}\frac{dy}{d\varphi},$$

fieri:

$$\frac{dv}{d\varphi}\frac{dw}{d\psi} - \frac{dv}{d\psi}\frac{dw}{d\varphi} = (h'i''-h''i')L + (i'g''-i''g')M + (g'h''-g''h')N,$$
$$\frac{dw}{d\varphi}\frac{du}{d\psi} - \frac{dw}{d\psi}\frac{du}{d\varphi} = (h''i-hi'')L + (i''g-ig'')M + (g''h-gh'')N,$$
$$\frac{du}{d\varphi}\frac{dv}{d\psi} - \frac{du}{d\psi}\frac{dv}{d\varphi} = (hi'-h'i)L + (ig'-i'g)M + (gh'-g'h)N.$$

Quibus aequationibus multiplicatis respective per u, v, w, et summatione facta, reiectis, qui destruuntur, terminis, prodit:

$$17.\quad u\left[\frac{dv}{d\varphi}\frac{dw}{d\psi} - \frac{dv}{d\psi}\frac{dw}{d\varphi}\right] + v\left[\frac{dw}{d\varphi}\frac{du}{d\psi} - \frac{dw}{d\psi}\frac{du}{d\varphi}\right] + w\left[\frac{du}{d\varphi}\frac{dv}{d\psi} - \frac{du}{d\psi}\frac{dv}{d\varphi}\right] =$$
$$P\left\{x\left[\frac{dy}{d\varphi}\frac{dz}{d\psi} - \frac{dy}{d\psi}\frac{dz}{d\varphi}\right] + y\left[\frac{dz}{d\varphi}\frac{dx}{d\psi} - \frac{dz}{d\psi}\frac{dx}{d\varphi}\right] + z\left[\frac{dx}{d\varphi}\frac{dy}{d\psi} - \frac{dx}{d\psi}\frac{dy}{d\varphi}\right]\right\},$$

posito brevitatis causa:

$$P = g(h'i''-h''i') + g'(h''i-hi'') + g''(hi'-h'i).$$

His praemissis, sit iam

$$x = \cos\varphi,\quad y = \sin\varphi\cos\psi,\quad z = \sin\varphi\sin\psi,$$

sit porro

$$\cos\eta = \frac{u}{\sqrt{(uu+vv+ww)}},\quad \sin\eta\cos\vartheta = \frac{v}{\sqrt{(uu+vv+ww)}},$$
$$\sin\eta\sin\vartheta = \frac{w}{\sqrt{(uu+vv+ww)}}.$$

Ubi coëfficientibus g, h, i etc. valores eosdem atque §. antecedente tribuimus, erit:

$$A = U = uu+vv+ww,$$
$$A' = U' = \frac{uu}{mm} + \frac{vv}{nn} + \frac{ww}{pp},$$

ideoque:

$$\frac{U'}{U} = \frac{\cos^2\eta}{mm} + \frac{\sin^2\eta\cos^2\vartheta}{nn} + \frac{\sin^2\eta\sin^2\vartheta}{pp}.$$

Aequationes autem lineares inter u, v, w et x, y, z propositae fiunt:

$$\cos\eta = \frac{g\cos\varphi + h\sin\varphi\cos\psi + i\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{U}},$$
$$\sin\eta\cos\vartheta = \frac{g'\cos\varphi + h'\sin\varphi\cos\psi + i'\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{U}},$$
$$\sin\eta\sin\vartheta = \frac{g''\cos\varphi + h''\sin\varphi\cos\psi + i''\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{U}}.$$

Habetur porro e §. 1.:

$$x\left[\frac{dy}{d\varphi}\frac{dz}{d\psi}-\frac{dy}{d\psi}\frac{dz}{d\varphi}\right]+y\left[\frac{dz}{d\varphi}\frac{dx}{d\psi}-\frac{dz}{d\psi}\frac{dx}{d\varphi}\right]+z\left[\frac{dx}{d\varphi}\frac{dy}{d\psi}-\frac{dx}{d\psi}\frac{dy}{d\varphi}\right]=\sin\varphi\,d\varphi\,d\psi,$$

$$\frac{u\left[\frac{dv}{d\varphi}\frac{dw}{d\psi}-\frac{dv}{d\psi}\frac{dw}{d\varphi}\right]+v\left[\frac{dw}{d\varphi}\frac{du}{d\psi}-\frac{dw}{d\psi}\frac{du}{d\varphi}\right]+w\left[\frac{du}{d\varphi}\frac{dv}{d\psi}-\frac{du}{d\psi}\frac{dv}{d\varphi}\right]}{[uu+vv+ww]^{\frac{3}{2}}}=\sin\eta\,d\eta\,d\vartheta,$$

ideoque e formula (17.):

$$\frac{\sin\varphi\,d\varphi\,d\psi}{U^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{P}.\sin\eta\,d\eta\,d\vartheta,$$

unde etiam:

$$\frac{\sin\varphi\,d\varphi\,d\psi}{U\sqrt{U}}=\frac{1}{P}.\frac{\sin\eta\,d\eta\,d\vartheta}{\frac{\cos^2\eta}{mm}+\frac{\sin^2\eta\cos^2\vartheta}{nn}+\frac{\sin^2\eta\sin^2\vartheta}{pp}}.$$

Singulis valoribus realibus ipsarum $\cos\varphi$, $\sin\varphi\cos\psi$, $\sin\varphi\sin\psi$ conveniunt valores reales iique unici quantitatum $\cos\eta$, $\sin\eta\cos\vartheta$, $\sin\eta\sin\vartheta$; ac facile patet, singulis valoribus realibus ipsarum $\cos\eta$, $\sin\eta\cos\vartheta$, $\sin\eta\sin\vartheta$ respondere vice versa valores reales eosque unicos quantitatum $\cos\varphi$, $\sin\varphi\cos\psi$, $\sin\varphi\sin\psi$. Unde hisce tributis valoribus omnibus realibus, etiam illis valores omnes reales conveniunt, neque iidem plus semel; sive integrationibus factis a $\varphi=0$, $\psi=0$ usque ad $\varphi=\pi$, $\psi=2\pi$, etiam a $\eta=0$, $\vartheta=0$ usque ad $\eta=\pi$, $\vartheta=2\pi$ integrari debet, vel quod idem est, integrali proposito ad totam sphaeram extenso etiam integrale transformatum ad totam sphaeram extendi debet.

Restat, ut constantem P per quantitates datas exhibeamus; quod facile fit considerationibus geometricis sequentibus. Designantibus enim, ut supra x', y', z' coordinatas obliquas, u, v, w coordinatas orthogonales, ubi fit:

$$u=\frac{g}{\sqrt{a}}x'+\frac{h}{\sqrt{b}}y'+\frac{i}{\sqrt{c}}z',$$

$$v=\frac{g'}{\sqrt{a}}x'+\frac{h'}{\sqrt{b}}y'+\frac{i'}{\sqrt{c}}z',$$

$$w=\frac{g''}{\sqrt{a}}x'+\frac{h''}{\sqrt{b}}y'+\frac{i''}{\sqrt{c}}z',$$

erunt

$\frac{g}{\sqrt{a}}, \frac{g'}{\sqrt{a}}, \frac{g''}{\sqrt{a}}$ cosinus angulorum inter x' et axes orthogonales,

$\frac{h}{\sqrt{b}}, \frac{h'}{\sqrt{b}}, \frac{h''}{\sqrt{b}}$ - - - y' - - - ,

$\frac{i}{\sqrt{c}}, \frac{i'}{\sqrt{c}}, \frac{i''}{\sqrt{c}}$ - - - z' - - - .

unde ex elementis geometriae analyticae constat, esse $\frac{P}{\sqrt{(abc)}}$ solidum parallelepipedum, contentum inter axes ipsarum x', y', z', cuius latera $= 1$. Idem probatur esse

$$\sqrt{(1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu)}.$$

Utraque expressione aequali posita, et substitutis valoribus

$$\cos\lambda=\frac{d}{\sqrt{(bc)}},\quad \cos\mu=\frac{e}{\sqrt{(ca)}},\quad \cos\nu=\frac{f}{\sqrt{(ab)}},$$

prodit:

$$P=\sqrt{(abc-add-bee-cff+2def)}.$$

Hinc tandem provenit, substituto valore ipsius P et integratione duplice facta,

$$E=\iint\frac{\sin\varphi\,d\varphi\,d\psi}{U'\sqrt{U}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{(abc-add-bee-cff+2def)}}\iint\frac{\sin\eta\,d\eta\,d\vartheta}{\frac{\cos^2\eta}{mm}+\frac{\sin^2\eta\cos^2\vartheta}{nn}+\frac{\sin^2\eta\sin^2\vartheta}{pp}},$$

integralibus ad totam sphaeram extensis, ac designantibus mm, nn, pp radices aequationis

$$(ax-a')(bx-b')(cx-c')-(ax-a')(dx-d')^2-(bx-b')(ex-e')^2$$
$$-(cx-c')(fx-f')^2+2(dx-d')(ex-e')(fx-f')=0.$$

Quae cum supra inventis prorsus conveniunt. Quam transformationem erui videmus per substitutionem unicam:

$$\cos\eta=\frac{g\cos\varphi+h\sin\varphi\cos\psi+i\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{U}},$$

$$\sin\eta\cos\vartheta=\frac{g'\cos\varphi+h'\sin\varphi\cos\psi+i'\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{U}},$$

$$\sin\eta\sin\vartheta=\frac{g''\cos\varphi+h''\sin\varphi\cos\psi+i''\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{U}},$$

coëfficientibus g, h, i etc. rite determinatis.

17.

Dedimus in exemplo II. §. 8. 15. formulam

$$B=\frac{1}{mnp}\iint\frac{\sin\eta\,d\eta\,d\vartheta}{\frac{\cos^2\eta}{mm}+\frac{\sin^2\eta\cos^2\vartheta}{nn}+\frac{\sin^2\eta\sin^2\vartheta}{pp}}$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{[(x+mm)(x+nn)(x+pp)]}},$$

integrali duplici extenso a $\eta=0$, $\vartheta=0$ usque ad $\eta=\frac{\pi}{2}$, $\vartheta=\frac{\pi}{2}$. Unde integrali duplici ad totam sphaeram extenso, fit

$$\iint \frac{\sin\eta\, d\eta\, d\vartheta}{\frac{\cos^2\eta}{mm}+\frac{\sin^2\eta\cos^2\vartheta}{nn}+\frac{\sin^2\eta\sin^2\vartheta}{pp}} = 2\pi\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{\left[\left(1+\frac{x}{mm}\right)\left(1+\frac{x}{nn}\right)\left(1+\frac{x}{pp}\right)\right]}}.$$

Hinc patet, *quantitatem, quae in integrali simplice sub radicali invenitur, rationaliter exhiberi posse, etiamsi* $\frac{1}{mm}$, $\frac{1}{nn}$, $\frac{1}{pp}$ *tantum ut radices aequationis cubicae datae sint.* Quod si ad casum antecedentibus propositum applicatur, dantur $\frac{1}{mm}$, $\frac{1}{nn}$, $\frac{1}{pp}$ ut radices aequationis

$$(ax-a')(bx-b')(cx-c')-(ax-a')(dx-d')^2-(bx-b')(ex-e')^2$$
$$-(cx-c')(fx-f')^2+2(dx-d')(ex-e')(fx-f')=0.$$

Unde expressio ad laevum identica erit cum hac

$$P\left(x-\frac{1}{mm}\right)\left(x-\frac{1}{nn}\right)\left(x-\frac{1}{pp}\right).$$

Posito $-\frac{1}{x}$ loco x et multiplicatione facta per $-x^3$, inde aequationem identicam nanciscimur sequentem:

$$P\left(1+\frac{x}{mm}\right)\left(1+\frac{x}{nn}\right)\left(1+\frac{x}{pp}\right)=$$
$$(a+a'x)(b+b'x)(c+c'x)-(a+a'x)(d+d'x)^2-(b+b'x)(e+e'x)^2$$
$$-(c+c'x)(f+f'x)^2+2(d+d'x)(e+e'x)(f+f'x).$$

Unde habetur iam theorema satis memorabile, quo integrale duplex propositum E *absque ulla aequationis algebraicae resolutione* per integrale simplex exprimitur.

Theorema.

Ponatur

$$U = a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi\cos^2\psi + c\sin^2\varphi\sin^2\psi$$
$$+ 2d\sin^2\varphi\cos\psi\sin\psi + 2e\cos\varphi\sin\varphi\sin\psi + 2f\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi,$$
$$U' = a'\cos^2\varphi + b'\sin^2\varphi\cos^2\psi + c'\sin^2\varphi\sin^2\psi$$
$$+ 2d'\sin^2\varphi\cos\psi\sin\psi + 2e'\cos\varphi\sin\varphi\sin\psi + 2f'\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi,$$
$$X = (a+a'x)(b+b'x)(c+c'x)-(a+a'x)(d+d'x)^2-(b+b'x)(e+e'x)^2$$
$$-(c+c'x)(f+f'x)^2+2(d+d'x)(e+e'x)(f+f'x),$$

erit

$$\iint \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{U'\sqrt{U}} = 2\pi\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

integrali duplici a $\varphi=0$, $\psi=0$ extenso usque ad $\varphi=\pi$, $\psi=2\pi$.

De theoremate antecedente valde generali casibus specialibus haec fluunt:

$$1.\quad \iint \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\sqrt{U}} =$$

$$2\pi \iint_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{[(a+x)(b+x)(c+x)-dd(a+x)-ee(b+x)-ff(c+x)+2def]}},$$

$$2.\quad \iint \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{U} =$$

$$2\pi \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{[(a+x)(b+x)(c+x)-dd(a+x)-ee(b+x)-ff(c+x)+2def]}},$$

$$3.\quad \iint \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\sqrt{U^3}} = \frac{4\pi}{\sqrt{(abc-add-bee-cff+2def)}}.$$

Quod ad (2.) attinet, observo generaliter, commutatis inter se a, b, c etc. et a', b', c' etc., simulque $\frac{1}{x}$ loco x posito, binas formulas

$$\iint \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{U^1\sqrt{U}} = 2\pi \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\iint \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{U\sqrt{U^1}} = 2\pi \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

alteram ex altera sequi.

Regiom. 1. Nov. 1832.

9.

Über die Theorie der Kugeldreiecke.

(Von dem Herrn Dr. Friedrich *Schmeisser*, Prorector zu Frankfurt a. d. O)

Die Mängel und Schwierigkeiten, welche die gewöhnliche Theorie der Dreiecke hat, ist wohl jedem gründlichen Kenner der Mathematik so bekannt, dafs eine umständliche Erörterung derselben hier überflüssig sein dürfte. Sie scheinen ihren Grund hauptsächlich in der Gewohnheit zu haben, wonach man aus der bekannten Fundamentalgleichung für 3 Seiten und 1 Winkel, welche nur für Dreiecke bewiesen wird, deren Seiten kleiner als 90° sind, alle übrigen herleitet, oder vielmehr ausrechnet. Dafs man dabei durch lange analytische Operationen, welche oft umständliche Verbindungen, sehr gewählte Vertauschungen zweckmäfsiger goniometrischer Ausdrücke, und mühsame Rechnungen erfordern, zum Ziele geführt wird, wobei die Anfänger meistens gleichsam im Dunkel wandeln, ist für das Studium dieses so wichtigen Zweiges der Mathematik ein sehr nachtheiliger Umstand, wie fast Alle bekennen, deren Beruf es mit sich bringt, darin zu unterrichten; dazu die mühsame Arbeit in so fern zu wenig belohnend, als die Resultate der allgemeinen Gültigkeit der Beweise ermangeln.

Wenn zwar die Gleichung für entgegenliegende Seiten und Winkel (I.) für die Fälle, wo die Gröfsen derselben zwischen 90° und 180° betragen, auch auf die gewöhnliche Weise leicht bewiesen werden können, so scheint der allgemeingültige Beweis der Gleichung für 3 Seiten und 1 Winkel (II.), weder auf dem gewöhnlichen Wege zu gelingen, noch auch nach der gemeiniglich nach Lagrange benannten Methode, welche aber de Gua (*Mém. de l'Acad. des sciences. Par.* 1783.) zuerst bekannt gemacht hat, wonach man die Tangenten und Secanten zweier Seiten zu Hülfe nimmt. Die Versuche aber, welche zu diesem Zwecke auf andere Weise gemacht worden sind, haben sich nicht den Dank erwerben können, welchen die Absicht und die Mühe ihrer scharfsinnigen Urheber verdiente, so dafs man dem gewöhnlichen, weit einfacheren Nothbehelfe den Vorzug giebt, wonach man schliefst, dafs jene Gleichung, nach Verwechselung der Zeichen vor den Cosinus, auch für die Kugeldreiecke

gelte, deren Seiten $>90^0$ sind. Will man aber auch für die Fälle, wo nur 1 oder 2 Seiten $>90^0$, und der Winkel $<$ oder $>90^0$ sind, diese Gleichung hinsichtlich ihrer Form rechtfertigen, so treten wieder Schwierigkeiten ein, welche so zu beseitigen, wie es die Strenge der Wissenschaft fordert, das gewöhnliche Verfahren theils nicht bequeme, theils nicht genügende Mittel darbietet.

Die Gleichung (II.) wendet man nun gewöhnlich auf ein Supplementardreieck an, worin alle Seiten und Winkel $>90^0$ sind, um die Gleichung für 1 Seite und 3 Winkel (III.) zu erhalten. In sofern jene (II.) für besagte Fälle nicht bewiesen ist, kann letztere (III.) überhaupt selbst für die Fälle, wo alle Seiten und Winkel $<90^0$ sind, nur als unbewiesene Annahme gelten. Ob die Ersten, welche die Eigenschaft des Supplementardreiecks entdeckten, als Caswell und Lansberg, diesen Umstand nicht beachtet haben, oder ob spätere Schriftsteller durch Euler's und Lagranges Ansehen bewogen wurden, die Gleichung (III.) auf diese Art abzuleiten, ist dem Verf. wegen Mangel an dazu nöthigen Schriften an seinem Orte unbekannt; dafs man aber wegen der Annahme dieser Gleichung kein Bedenken trug, ist leicht daraus zu erklären, dafs sie nach der ältern Methode durch Anwendung der Formeln für die rechtwinkligen Kugeldreiecke durch die Bestandtheile der schiefwinkligen in Lehrbüchern bewiesen und als richtig bekannt war.

Da nach der Erfindung der Logarithmen, die Gleichungen (II., III.) in ihrer ursprünglichen Form zur Anwendung derselben unbequem waren, so war man auf Umwandelungsmethoden bedacht, um Productengleichungen zu erhalten, und machte dadurch das Studium der sphärischen Trigonometrie, wie der ebenen, nicht nur weitläufiger und schwieriger, sondern man beschränkte auch durch die angewandten Hülfsmittel, deren man sich noch bedient, die Beweise der Gültigkeit der umgewandelten Gleichungen. Man gebraucht nemlich dazu goniometrische Formeln, welche in den Lehrbüchern blofs für Winkel oder Bogen $<90^0$ bewiesen werden, als $\cos a = 2\cos^2\frac{1}{2}a - 1 = 1 - \sin^2\frac{1}{2}a$, desgleichen

$$\cos(p-q) + \cos(p+q) = 2\cos p\cos q,$$

$$\cos(p-q) - \cos(p+q) = 2\sin p\sin q, \text{ u. dergl.}$$

Es werden daher die Beweise der umgewandelten Gleichungen auf die Fälle beschränkt, worin die Summe zweier Seiten $<90^0$ ist, und dafs sie in andern Fällen gelten, wird wenigstens nicht bewiesen. Dabei

kann nicht unerwähnt bleiben, dafs man bei einigen umgewandelten Gleichungen auch auf auffallende Ungereimtheiten stöfst. Selbst in vorzüglichen Werken findet sich z. B.

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\left(\frac{-\cos \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \cos \frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \cdot \sin c}\right)},$$

wenn A die Seite und a, b, c, die Winkel bedeuten. Es sollen daher die Werthe für $\sin \frac{1}{2} A$, wie auch $\operatorname{tang} \frac{1}{2} A$ und $\cot \frac{1}{2} A$, sogenannte unmögliche Gröfsen sein, welche doch, wie jedem Mathematiker bekannt ist, reel sind. Es hat den Verf. oft gewundert, dafs sich diese Gleichung in den meisten neuern Büchern so findet, da sich leicht nachweisen läfst, dafs bei consequenter Beobachtung der Zeichen und der Annahme, dafs 2 negative Factoren ein positives Product geben, die Ungereimtheit sogleich verschwindet. Denn wenn $a < 90^0$, so ist $(b+a) > 90^0$, folglich $\cos(b+c)$ negativ. Nimmt man nun bei der Vertauschung der Werthe auch $\cos \frac{1}{2}(a+b+c)$ negativ, so heben sich beide Negationen auf. So findet sich auch die Gleichung richtig in Vega's Vorlesungen Bd. 2. §. 579. Welche Bewandnifs es mit der durch $\cos \frac{1}{2}(a+b+c)$ ausgedrückten Gröfse hat, zeigt sich in nachstehender Abhandlung (§. 28.), worin die Gleichungen nach der darin beschriebenen Methode auch so hervorgehen, dafs alle Umwandlungen unnöthig sind.

Verwickelter und für Anfänger schwieriger sind die gewöhnlichen Methoden der Herleitung sowohl der Neperschen Analogien, als auch noch mehr die der 4 einfachen, höchst merkwürdigen Gleichungen (§. 29. V. bis VIII.), welche zuerst Delambre (in der 1807 erschienenen *connaiss. des tems.* 1809. p. 45.) und Gaufs (*theoria motus corp coel. etc.* 1809. p. 51.) ohne Beweise aufgestellt, benutzt und empfohlen haben. Die Beweisarten dieser Gleichungen, so viel dem Verf. bekannt geworden sind, lassen sich nach den Mitteln, deren man sich dazu bedient, in 4 Classen bringen. In so fern aber schon die Fundamentalgleichungen (II., III.), woraus sie abgeleitet werden, an Einseitigkeit der Beweise leiden, so vergröfsert sich solche noch bei denjenigen Entwickelungsarten der genannten Gleichungen, welche sich dazu der Formeln für $\sin(a+b)$, $\sin(a-b)$ etc. nebst daraus abgeleiteter bedienen, deshalb, weil diese in den Büchern ebenfalls nur für die Fälle bewiesen sind, wo $(a+b) < 90^0$. Eine andere von den Cagnolischen Formeln ausgehende vermehrt noch die Schwierigkeiten durch weitläufige Zusammensetzung der Gleichungen und

Absonderung goniometrischer Ausdrücke; wogegen diejenige, welche sich aller 3 Fundamentalgleichungen (I., II., III.) bedient, einen weniger erkünstelten Gang nimmt, und an Kürze und Eleganz die übrigen übertrifft. In sofern die Gleichung (I.) sich als allgemeingültig beweisen liefs, so versuchte der Verf. eine Entwicklungsart jener blos aus letzterer; allein die Weitläufigkeit, die durch Zusammensetzung und Trennung, wie bei den andern, auch entstand, die schwierige Wahl bei der Umtauschung der Ausdrücke, die widrige Gezwungenheit und Künstelei des ganzen Verfahrens, endlich der traurige Umstand, dafs so einfache Wahrheiten auf so beschwerlichen Umwegen bewiesen werden sollten, haben ihn stets zurückgehalten, seine Entwickelungsart bekannt zu machen.

Wiewohl die grofse Wichtigkeit der Anwendung der Analysis auf die Trigonometrie kein Mathematiker verkennen wird, so wird man doch auch eingestehen müssen, dafs durch langwierige analytische Operationen die wahre Einsicht in die Sachen nicht gefördert, vielmehr dem Anfänger das Studium dieser schönen Wissenschaft erschwert wird; dagegen es in jeder Hinsicht vortheilhafter sein mufs, wenn die einfachsten Gleichungen auch einfach und anschaulich bewiesen und alle beschwerlichen Umformungen mit ihren Künsten entbehrt werden können.

Da sich alle einfachen Gleichungen der ebenen Trigonometrie nicht nur anschaulich beweisen, sondern auch ohne Umwandlungen aus einander herleiten lassen (wie nächstens in einer andern Schrift gezeigt werden wird), so verliefs den Verf. die Hoffnung nicht, diesen Zweck auch in der, jener analogen sphärischen zu erreichen. Mittelst der Projectionen von Kugelausschnitten hat es ihm nicht gelingen wollen, so vieles Nachdenken er auch daran gewendet hat. Aber im September 1829 leitete ihn Beschäftigung mit Sonnenuhren zufällig auf den Gedanken, die Sätze der sphärischen Trigonometrie auf der Ebene zu betrachten und zu beweisen. Dafs sich dadurch die Gleichungen für Kugeldreiecke, worin 1 Seite oder 1 Winkel $= 90^0$ (§. 40. 41.) ist, wie auch die Fundamentalgleichungen (I., II.) leicht finden liefsen, ist klar. Der Beweis der dritten (III.) ist ihm jedoch nie gelungen. Weil es ihm aber vorzüglich um einfachere Beweisarten jener 4 Gleichungen zu thun war, welche er die Delambre-Gaufsischen nennen will, weil sie mit den Namen beider berühmten Männer bezeichnet werden, so nahm er zu der §. 1.—7. angedeuteten Betrachtung seine Zuflucht, welcher der Ptolemäische Lehrsatz zum Grunde

liegt, welche dort nur soweit mitgetheilt ist, als es der Zweck erforderte, und durch welche es gelang, die Formeln §. 1.—4. auch für die Fälle zu beweisen, wenn $(p+q)$ bis 180^0 wächst. Dadurch wurde es leicht, mittelst (Fig. 6. und 7.), welche weitere zum Zwecke eingerichtete Ausbildungen der (Fig. 1.) sind, jene 4 Gleichungen für alle Arten von Kugeldreiecken, deren Seiten und Winkel zwischen 0^0 und 180^0 betragen, so anschaulich und kurz zu erhalten, als je gewünscht werden kann (§. 29. 33.). Aber dabei fanden sich auch zugleich eben so kurz und allgemein die 8 andern einfachen Gleichungen für alle 6 Stücke eines Kugeldreiecks §. 29. I. bis IV. §. 33. IX.—XII. Sehr wichtig dabei ist, dafs sie alle unmittelbar als Productengleichungen gefunden werden, und dadurch alle Umwandelungen zum Dienste der Logarithmen, mithin auch die kunstgriffige Anwendung eines grofsen Formelapparats ganz entbehrlich machen.

Diese Behandlungsart der Kugeldreiecke sogleich öffentlich bekannt zu machen, hinderte das Bedenken, etwas Überflüssiges zu thun, im Falle ein Mathematiker in irgend einem Werke solche schon aufgestellt hätte. Da der Verf. an seinem Orte (wegen Mangels an Schriften über diesen Gegenstand) darüber nicht zur Sicherheit gelangen konnte, so wartete er nicht nur die Erscheinung des 5ten Bandes des Klügelschen math. Wörterbuchs (bearbeitet von J. A. Grunert, Leipz. 1831) ab, sondern befragte auch deshalb in Briefen einige ausgezeichnete und sehr gelehrte Mathematiker Deutschlands. Da nun in jenem (Art. Sphärische Trigonometrie), worin nichts Brauchbares übergangen zu sein scheint, sich keine Spur dieses Verfahrens fand, und letztere die Bekanntschaft damit verneinten, so glaubte der Verf. etwas nicht Unnützliches zu thun, in den folgenden Paragraphen eine kurze Andeutung seiner Methode bekannt zu machen.

1.

Es sei (Taf. I. Fig. 1.) ein gröfster Kreis einer Kugel, dessen Mittelpunct in O, und worin 2 beliebige Bogen $bc = A$, $ac = B$ so angenommen sind, dafs $A > B$; durch den Durchmesser cl seien aa' und bb' rechtwinklig gezogen, daher Bogen $bca = (A+B)$, $ba' = (A-B)$. Der Kürze wegen sei Winkel $blc = p$, $alc = q$. Zieht man die Sehnen ab und cf rechtwinklig bei i durcheinander, so ist auch $bfc = p$, $afc = q$. Weil nun $cbl = cal = 90^0$, so ist, wenn man $cl = 1$ setzt:

α) $bc = \sin p$, $bl = \cos p$,

β) $ac = \sin q$, $al = \cos q$,

γ) $bi = \sin p . \cos q$, $ai = \sin q . \cos p$,

δ) $ab = \sin(p+q) = \sin p . \cos q + \sin q . \cos p$. I.

2.

Zieht man ferner $a'f$, welche bi in g schneidet, so ist wegen gleicher Bogen $\triangle gif \cong \triangle aif$, mithin $gi = ai$, und $\triangle bga' \sim \triangle agf$, folgl. $bg = a'b = \sin(p-q)$. Weil nun $bg = bi - gi = bi - ai$, so ist

$$\sin(p-q) = \sin p . \cos q - \sin q . \cos p. \text{ II.}$$

3.

Da $\triangle chi \sim \triangle aeh$, so ist $fl = ba'$, folglich $af = bl$; daher

α) $af = \cos p$, $bf = \cos q$,

β) $if = \cos p . \cos q$,

γ) $ci = \sin p . \sin q$, daher

δ) $cf = \cos(p-q) = \cos p . \cos q + \sin p . \sin q$. III.

4.

Zieht man endlich den Durchmesser bd, wie auch df und am parallel mit df, so sind die Winkel $bad = bfd = amf = 90°$ und Winkel $bda = (p+q)$, daher $ad = fs = \cos(p+q)$. Weil nun Winkel $fsm = asi = 90° - p$, folglich $ias = p = cai$, so ist $\triangle asi \cong \triangle aci$, mithin $is = ci$ (§. 3. γ.). Wenn nun

α) $(p+q) < 90°$, so fällt s zwischen i und f, und ist $sf = if - is$, oder

$$\cos(p+q) = \cos p . \cos q - \sin p . \sin q. \text{ IV. } a.$$

β) Aber wenn $(p+q) > 90°$, so fällt m in die Verlängerung von bf, und s in die von cf aufserhalb des Kreises (Vergl. Fig. 7.) und es ist $fs = is - if = ci - if$, d. i.

$$\cos(p+q) = \sin p . \sin q - \cos p . \cos q. \text{ IV. } b.$$

5.

Denkt man sich nun die Sehnen ab und cf durch den ganzen Kreis fortbewegt, so dafs sie sich allemal rechtwinklig durchschneiden, so kann $(p+q)$ jeden Werth zwischen 0° und 180° annehmen, und die Linien und ihre Abschnitte behalten allemal ihre goniometrischen Werthe. Es sind daher die Gleichungen §. 1.—4. dadurch für alle Fälle bewiesen, wo $(p+q)$ bis 180° wächst. Die Gültigkeit derselben, auch wenn $(p+q) > 180°$ wird, nachzuweisen, ist zum gegenwärtigen Zwecke nicht nöthig. Bei specieller Betrachtung ersieht man, dafs wenn $(p+q)$

zunimmt, $(p-q)$ gleich bleiben kann und umgekehrt, oder beide Werthe verändert werden.

6.

Setzt man nun statt p und q die ihnen gleichen halben Werthe der Bogen, so haben die §. 1. u. s. w. betrachteten Linien, wenn man den Halbmesser $bo = 1$ annimmt, folgende goniometrische Werthe:

1) $ab = 2\sin\frac{1}{2}(A+B)$,
2) $bg = 2\sin\frac{1}{2}(A-B)$,
3) $cf = 2\cos\frac{1}{2}(A-B)$,
4) $fs = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)$,
5) $bi = 2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B$,
6) $ai = 2\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}A$,
7) $fi = 2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B$,
8) $ci = 2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B$.

Daraus lassen sich die goniometrischen Verhältnisse, in welchen diese Linien zu einander stehen, leicht herleiten.

7.

Von den übrigen Ergebnissen dieser sehr fruchtbaren Betrachtung sind folgende zum gegenwärtigen Zwecke noch erforderlich.

α) $cl^2 = bf^2 + ac^2 = bi^2 + fi^2 + ai^2 + ci^2$, weil $bf = al$. (Vergl. Klügels Math. W. B. Thl. 3. Art. Kreis No. 49.)

β) Nach §. 6. No. 5.—8. ist $bi.ai = fi.ci = \sin A.\sin B$. Daraus ergiebt sich, weil

$$ab^2 = bi^2 + 2bi.ai + ai^2 \text{ und}$$
$$cf^2 = if^2 + 2if.ci + ci^2,$$

γ) $ab^2 + cf^2 = bi^2 + if^2 + ai^2 + ci^2 + 2bi.ai + 2.if.ci$
$= cl^2 + 4.bi.ai$, d. i., wenn $cl = 2$,

$\sin^2\frac{1}{2}(A+B) + \cos^2\frac{1}{2}(A-B) = 1 + \sin A.\sin B$. Auf gleiche Weise ist $bg^2 + fs^2 = cl^2 - 4bi.ai$, oder

$$\sin^2\frac{1}{2}(A-B) + \cos^2\frac{1}{2}(A+B) = 1 - \sin A.\sin B.$$

8.

Ferner sei (Fig. 2.) abc ein ungleichseitiges ebenes Dreieck, worin $bc = A$, $ac = B$, $ab = C$ und a, b, c die Winkel desselben. Mit $B < A$ sei der Halbkreis fad beschrieben, daher $bf = (A+B)$, $bd = (A-B)$, und C schneidet entweder den Halbkreis noch einmal in e, oder berührt ihn blofs, wenn $a = 90^0$. Zieht man ce, so ist Winkel $ecb = u = (a-b)$, wogegen Winkel $acf = (a+b)$ ist. Denkt man A und B der Gröfse

nach unverändert, aber a, als Grenzpunct von B und C, durch den Halbkreis $deaf$ stetig sich bewegend, so erkennt man folgende Veränderung der Winkel und der Seite C. Indem der Winkel c von 0^0 bis 180^0 wächst, nimmt der Winkel a von 180^0 bis 0^0 ab, b aber wächst von 0^0 bis er sein Maximun erreicht hat, wenn $a = 90^0$ ist, und nimmt von da wieder bis 0^0 ab; zugleich wird $(a+b)$ um so viel verkleinert, als c wächst, nimmt mithin von 180^0 bis 0^0 ab, wogegen die Abnahme von $(a-b)$ von 180^0 bis 0^0 immer geringer wird. Die Seite C aber wächst von $(A-B)$ bis $(A+B)$. Auf ganz dieselbe Weise geschieht in einem Kugeldreiecke, worin 2 Seiten $(A+B) < 180^0$ sind, die Zu- und Abnahme sowohl der sphärischen Winkel, als auch der dritten Seite C (§. 13.).

9.

Zieht man ad und af, so ist Winkel $adc = m = \frac{1}{2}(a+b) = 90^0 - \frac{1}{2}c$, $dab = n = \frac{1}{2}(a-b)$, $baf = a + \frac{1}{2}c = 90^0 + n = 90^0 + \frac{1}{2}(a-b) = 180^0 - (b+f) = 180^0 - (b + \frac{1}{2}c)$, folglich $\frac{1}{2}(a-b) = 90^0 - (b + \frac{1}{2}c)$. Daher $\sin baf = \sin(a + \frac{1}{2}c) = \cos\frac{1}{2}(a-b) = \sin(b + \frac{1}{2}c)$, und $\sin\frac{1}{2}(a-b) = \cos(b + \frac{1}{2}c)$. Vergleicht man die Linien nach dem allgemein gültigen Hauptsatze der ebenen Trigonometrie, und substituirt diese Werthe, so ist

1) $bf.\sin afb = ab.\sin baf$, d. i.

$$(A+B).\left\{\begin{matrix}\sin\frac{1}{2}c \\ \cos\frac{1}{2}(a+b)\end{matrix}\right\} = C.\left\{\begin{matrix}\sin(a+\frac{1}{2}c) \\ \cos\frac{1}{2}(a-b)\end{matrix}\right\},$$

2) $bd.\sin adb = ab.\sin n$, d. i.

$$(A-B).\left\{\begin{matrix}\sin\frac{1}{2}(a+b) \\ \cos\frac{1}{2}c\end{matrix}\right\} = C.\left\{\begin{matrix}\sin\frac{1}{2}(a-b) \\ \cos(b+\frac{1}{2}c)\end{matrix}\right\}.$$

Setzt man diese unter 2 Nummern gefaſste Gleichungen auseinander, so erhält man, weil auch $\sin(a + \frac{1}{2}c) = \sin(b + \frac{1}{2}c)$ und $\cos(b + \frac{1}{2}c) = \cos(a + \frac{1}{2}c)$, 12, und durch Vertauschung der Buchstaben, 36 Gleichungen, woraus sich durch bloſse Anwendung der Rechnungsoperationen alle übrigen Gleichungen der ebenen Trigonometrie herleiten lassen.

10.

In dem $\triangle$ abc (Fig. 3.) sei $B > A$, mit $ac = B$ der Kreis um c beschrieben, und bc und ab bis dahin, in d und p, verlängert, daher $bf = (B+A)$, $bd = (B-A)$. Bezeichnet man die äuſseren Winkel bak mit a, abd mit b, die innern mit u und v, folglich $u = 180^0 - b$, $v = 180^0 - a$, so ist Winkel $acf = u + v = 360^0 - (a+b)$, daher $(a+b)$ = Bogen $adpf$ und $acb = (a+b) - 180^0$, folglich $m = \frac{1}{2}(u+v) =$

$180^0 - \frac{1}{2}(a+b) = 90^0 - \frac{1}{2}c$. Ferner ist $n = u - m = \frac{1}{2}(u-v) = \frac{1}{2}(a-b)$, mithin Winkel $dcp = (a-b)$.

Denkt man a, als Grenzpunct von B und C, durch den Halbkreis daf gleichförmig fortrückend, so erleiden die Winkel nebst C folgende Veränderungen. Indem Winkel c von 0^0 bis 180^0 wächst, wächst auch b von 0^0 bis 180^0, aber a nimmt von 180^0 ab, bis $b = 90^0$ wird, und dann wieder zu bis 180^0. Daher wächst $(a+b)$ von 180^0 bis 360^0 ebensoviel, als c, wogegen die Abnahme des Winkels $dcp = (a-b)$ immer geringer wird. C wächst von $(B-A)$ bis $(B+A)$. Auf ebendieselbe Weise verhält sich die Zu- und Abnahme der Winkel und Seite in einem Kugeldreiecke, worin 2 Seiten $(A+B) > 180^0$ sind (§. 15.).

11.

Es ist ferner der Winkel $baf = (v + \frac{1}{2}c) = 180^0 - (a - \frac{1}{2}c) = 90^0 - n = 90^0 - \frac{1}{2}(a-b)$ (§. 10.) $= b - \frac{1}{2}c$; folgl. $n = 90^0 - (b - \frac{1}{2}c)$; daher $\sin baf = \sin(a - \frac{1}{2}c) = \cos\frac{1}{2}(a-b) = \sin(b - \frac{1}{2}c)$ und $\sin n = \sin\frac{1}{2}(a-b) = \cos(b - \frac{1}{2}c)$. Man erhält daher durch Vergleichung der Linien, wie §. 9.:

1) $bf.\sin afb = ab.\sin baf$, d. i.

$$(B+A).\begin{Bmatrix}\sin\frac{1}{2}c\\ \cos\frac{1}{2}(a+b)\end{Bmatrix} = C.\begin{Bmatrix}\sin(a-\frac{1}{2}c)\\ \cos\frac{1}{2}(a-b)\end{Bmatrix},$$

2) $bd.\sin m = ab.\sin n$, d. i.

$$(B-A).\begin{Bmatrix}\sin\frac{1}{2}(a+b)\\ \cos\frac{1}{2}c\end{Bmatrix} = C.\begin{Bmatrix}\sin\frac{1}{2}(a-b)\\ \cos(b-\frac{1}{2}c)\end{Bmatrix}.$$ Vergl. §. 9.

12.

Es sei nun (Fig. 4.) abc ein Kugeldreieck, dessen Seiten $bc = A$, $ca = B$, $ab = C$, und dessen Winkel a, b, c heifsen mögen, worin zuvörderst $(A+B) < 180^0$, gleichgültig ob $A >$ oder $< 90^0$ ist, und C jede mögliche Gröfse haben kann; aber es sei $A > B$. Denkt man sich nun eine Seite, z. B. A, der Lage nach unverändert, die andere B aber über die Oberfläche der Kugel sich fortbewegend, so beschreibt der Grenzpunct der letztern a den Halbkreis $a'aa''$, während der Winkel c von 0^0 bis 180^0 wächst, und die Seite C von $ba' = (A-B)$ bis $ba'' = (A+B)$ zunimmt. Dabei trifft der Bogen B den Halbkreis $a'aa''$ allemal unter 90^0, und der Winkel c ist dem Winkel an der Achse $a'ea$ gleich. Der Halbkreis bah aber, wovon C ein Theil ist, wird von jenem $a'aa''$ entweder zweimal durchschnitten, oder nur in einem Puncte berührt. Letz-

teres findet Statt, wenn der Winkel $a = 90^0$ ist. Denn man denke sich an den Punct a 3 Tangenten für die Bogen ac, $a'a$ und ba, so bilden die 2 erstern allemal einen rechten Winkel, wogegen die dritte in jedem Durchschnittspuncte der Bogen eine andere Richtung, abwärts oder aufwärts, hat. Im Berührungspuncte aber fallen die Tangenten der Bogen ab und aa' in eine Linie zusammen, welche mit der Tang. ac einen rechten Winkel bilden. Da nun die Tangenten in den Verlängerungen der Ebenen ihrer Bogen liegen, so stofsen auch die Ebenen abo und aco unter 90^0 aneinander, mithin ist auch Winkel $a = 90^0$. Eine besondere Zeichnung macht dieses deutlicher.

13.

Bei Betrachtung der Veränderung der Winkel, (wozu man sich einer Kugel von Elfenbein oder Holz, worauf man die gezogenen Bogen wieder löschen kann, am zweckmäfsigsten bedient), erkennt man, dafs wenn c von 0^0 bis 180^0 wächst, der Winkel b zunimmt, bis er sein Maximum erreicht hat, wo $a = 90^0$ ist, und dann bis 0^0 abnimmt, wogegen a von 180^0 bis 0^0 vermindert wird. Sowohl $(a+b)$, als auch $(a-b)$ nehmen ab von 180^0 bis 0^0, auf ähnliche Weise, wie bei dem ebenen Dreiecke §. 8., wogegen $(a+b+c)$ über 180^0 wächst bis $a = 90$, und dann wieder abnimmt. die Seite C wächst aber von $(A-B)$ bis $(A+B)$.

14.

Wenn $(A+B) = 180^0$, wo bekanntlich allemal $(a+b) = 180^0$ ist, so wächst C ebenfalls von $(A-B)$ bis $(A+B)$, während c von 0^0 bis 180^0 zunimmt. Zugleich nimmt a von 180^0 bis 90^0 ab, dagegen b von 0^0 bis 90^0 zu, so dafs a und b einander zu 180^0 ergänzen. Es wächst daher $(a+b+c)$ von 180^0 bis 360^0, und $(a-b)$ nimmt ab von 180^0 bis 0^0.

15.

In dem $\triangle\ abc$ (Fig. 5.) sei $bc = A$, $ac = B$, $ab = C$, $(A+B) > 180^0$. Denkt man sich A über die Oberfläche der Kugel fortbewegt und B ruhend, so läuft b als Grenzpunct von A durch den Halbkreis $b''bb'$, während der Winkel c von 0^0 bis 180^0 wächst. Zugleich wächst b von 0^0 bis 180^0. Der Winkel a aber nimmt ab, bis sein Nebenwinkel bab'' sein Maximum, mithin a sein Minimum erreicht hat, und Winkel $b = 90^0$ ist (§. 12.), und von da wieder zu bis 180^0. Daher wächst $(a+b)$ von 180^0 bis 360^0, $(a-b)$ nimmt ab von 180^0 bis 0^0, und $(a+b+c)$ wächst von 180^0 bis 540^0, auf ähnliche Weise, wie bei dem ebenen Dreiecke

§. 10. Die Seite C aber wächst von $(A-B)$ bis $360^0-(A+B)$. Aus diesen von §. 13. bis 15. betrachteten 3 Hauptfällen ergiebt sich zugleich, daſs in **jedem Kugeldreiecke** $\sin\frac{1}{2}C > \sin\frac{1}{2}(A-B)$ und $< \sin\frac{1}{2}(A+B)$, desgleichen $\cos\frac{1}{2}C < \cos\frac{1}{2}(A-B)$ und $> \cos\frac{1}{2}(A+B)$ sein muſs.

16.

In (Fig. 4.), wo $(A+B) < 180^0$ (§. 12.), sind nun die Sehnen $ba'' = 2\sin\frac{1}{2}(A+B)$ und $cf = 2\cos\frac{1}{2}(A-B)$ (§. 6.) durch einander bei i rechtwinklig gezogen. Mit $a''i = 2\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}A$ (§. 6.) denke man sich um den Punct i den Halbkreis $gkda''$ beschrieben, dessen Ebene jede beliebige Lage haben kann. Während nun Winkel c von 0^0 bis 180^0 wächst, und a als Grenzpunct von B sich in dem Halbkreise $a'aa''$ gleichförmig fortbewegt, denke man auch d, als Grenzpunct von di, in dem Halbkreise $gkda$ gleichförmig fortrückend, so, daſs Winkel $bid = a'ea = c$ sei. Da nun, wenn $c = 0^0$, die Seite $C = (A-B) = ba'$ ist (§. 13.), und $bg = ba'$ (§. 2.), so entfernen sich, bei gleichförmiger Zunahme des Winkels c, die Puncte a und d von b **gleichweit**, und es ist allemal $bd = ab = 2\sin\frac{1}{2}C$ (§. 17.).

17.

Um diese Wahrheit, daſs, wenn (Fig. 4.) Winkel $bid = a'ea = c$, $bd = ab = 2\sin\frac{1}{2}C$ ist, so strenge zu beweisen, als immer gefordert werden kann, so sei,

α) auf die Verlängerung von $a'e$ die Linie bn rechtwinklig, wodurch $en = be' = \sin A$, indem $a'e = ae = \sin B$. Zieht man an, so ist die Ebene des $\triangle aen$ gegen die Ebene des $\triangle a''bn$ senkrecht, daher der Winkel $anb = 90^0$, folglich $ab^2 = an^2 + bn^2$. Nun ist nach der ebenen Trigonometrie, wenn Winkel $aen = c < 90^0$:

$$\begin{aligned} an^2 &= en^2 + ae^2 - 2en.ae.\cos c \\ &= en^2 + ae^2 - 2en.ae(1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}c) \\ &= en^2 + ae^2 - 2en.ae + 4en.ae\sin^2\tfrac{1}{2}c \\ &= (en - ae)^2 + 4en.ae.\sin^2\tfrac{1}{2}c \\ &= a'n^2 + 4.en.ae.\sin^2\tfrac{1}{2}c. \end{aligned}$$

Es ist aber auch $bn^2 = a'b^2 - a'n^2$. Addirt man Dieses zu Jenem, so erhält man $an^2 + bn^2 = a'b^2 + 4en.ae\sin^2\frac{1}{2}c$, oder

$$ab^2 = 4\sin^2\tfrac{1}{2}(A-B) + 4\sin A.\sin B.\sin^2\tfrac{1}{2}c.$$

β) In dem $\triangle bdi$ aber, wenn ebenfalls Winkel $bid = c < 90^0$ (§. 16.), ist aus gleichem Grunde:

$$bd^2 = bi^2 + di^2 - 2.bi.di\cos c$$
$$= bi^2 + di^2 - 2bi.di + 4bi.di.\sin^2\tfrac{1}{2}c$$
$$= (bi - di)^2 + 4bi.di\sin^2\tfrac{1}{2}c$$
$$= bg^2 + 4bi.di\sin^2 c.$$

Da nun $bg = a'b = 2\sin\frac{1}{2}(A - B)$ und $bi.di = \sin A \sin B$ (§. 6.), so ist auch $bd^2 = 4\sin^2\frac{1}{2}(A - B) + 4\sin A \sin B \sin^2\frac{1}{2}c$, mithin auch $bd = ab = 2\sin\frac{1}{2}C$. Ist aber $c > 90^0$, so ist in

$$\alpha)\quad an^2 = en^2 + ae^2 + 2en.ae.\cos c,$$
$$\beta)\quad bd^2 = bi^2 + di^2 + 2bi.di.\cos c,$$

dagegen in beiden Gleichungen $\cos c = 2\sin^2\frac{1}{2}c - 1$ (welche Formel man erhält, wenn man (§ 4. β.) $p = \frac{1}{2}c$, $q = \frac{1}{2}c$ und $\cos^2\frac{1}{2}c = 1 - \sin^2\frac{1}{2}c$ setzt). Substituirt man diesen Werth, so erhält man für bd^2 und ab^2 ebendieselben gleichen Ausdrücke, daher in allen Puncten $bd = ab = 2\sin\frac{1}{2}C$.

18.

In (Fig. 6.) sind die drei Seiten des §. 16. etc. betrachteten Kugeldreiecks in einem gröfsten Kreise aneinander gelegt, $A = bc$, $B = ac$, $C = bd'$; die Sehnen ab und cf durchkreuzen sich ebenfalls rechtwinklig bei i, und haben, so wie ihre Abschnitte, die §. 6. angegebenen Werthe. In der Ebene desselben gröfsten Kreises sei nun

α) der Halbkreis $gkda$ mit ai beschrieben (§. 16.). Macht man den Winkel bid = dem sphärischen Winkel c, und zieht bd, welches nach §. 17. $= 2\sin\frac{1}{2}C$ ist, so schneidet bd diesen Halbkreis entweder noch einmal in k, oder berührt ihn blos (§. 8.). Der Kürze wegen sei Winkel $bdi = u$, Winkel $dbi = v$, Winkel $bik = x$, so ist $u + v = dia = 180^0 - c$, und $x = u - v$ (§. 9.). Wenn nun Winkel c von 0^0 bis 180^0 wächst, so nimmt x von 180^0 bis 0^0 ab, mithin wie die Differenz oder die Summe der 2 übrigen sphärischen Winkel $(a - b)$ oder $(a + b)$ (§. 13.), und verhält sich nicht wie $180^0 - (a + b)$. Da aber, wenn bd den Halbkreis blos berührt, x = Winkel $c < 90^0$ sein mufs, und $(a + b + c) > 180^0$, so kann x nicht $= (a + b)$ sein; dafs aber $x = (a - b)$ ist, wird §. 20. bewiesen.

β) Beschreibt man auch mit ci den Halbkreis ces, macht den Winkel $die = 90^0$ und zieht ef, so ist Winkel $cie = bid$ = dem sphärischen Winkel c, Winkel $eif = 180^0 - c$, und ef schneidet den Halbkreis entweder noch einmal in p, oder berührt ihn blos (§. 8.). Der Kürze wegen sei Winkel $ief = w$, $efi = z$, $fip = y$, so ist $y = w - z$ (§. 9.), und $w + z$

= Winkel cie = dem sphärischen Winkel c. Wenn nun c von 0^0 bis 180^0 wächst, so wächst auch y von 0^0 bis 180^0. Es könnte daher $y = 180^0 - (a \pm b)$ sein (§. 13.). Allein wenn ef den Halbkreis berührt, so ist $y = 180^0 - c < 90^0$ (§. 8.) mithin $c > 90^0$, indem $a < 90^0$, folglich auch $(a - b) < 90^0$ ist. Es kann daher y nicht $= 180^0 - (a - b)$ sein; dafs aber $y = 180^0 - (a + b)$ ist, wird sich §. 20. ergeben.

19.

Wenn im $\triangle\, bid$ (Fig. 6.) der Winkel $bid = c > 90^0$, und im $\triangle\, eif$ der Winkel $eif = 180^0 - c$ (§. 18.) $< 90^0$, so ist nach der ebenen Trigonometrie:

$$bd^2 = bi^2 + di^2 + bi.di \cos c, \text{ und}$$
$$ef^2 = if^2 + ei^2 - fi.ei \cos c.$$

Da nun $bi.di = fi.ei$ (§. 7. β.), so ist $bd^2 + ef^2 = bi^2 + di^2 + if^2 + ei^2 = 4$, wenn der Halbmesser der Kugel $= bo = 1$ gesetzt wird (§. 7. α.), daher $ef^2 = 4 - bd^2 = 4 - 4 \sin^2 \frac{1}{2} C$ (§. 17.) $= 4(1 - \sin^2 \frac{1}{2} C) = 4 \cos^2 \frac{1}{2} C$, folglich $ef = 2 \cos \frac{1}{2} C$. Ebendasselbe ergiebt sich, wenn man Winkel $bid = c < 90^0$ annimmt. Wird $c = 0^0$, so wird $ef = cf$, d. i. $2 \cos \frac{1}{2} C = 2 \cos \frac{1}{2}(A - B)$; wird $c = 180^0$, so wird $ef = fs$, d. i. $2 \cos \frac{1}{2} C = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B)$ (vergl. §. 15.), und kann kein Kugeldreieck stattfinden.

Übrigens, da $\triangle\, bid = bi.di.\sin bid$, $\triangle\, eif = ei.if \sin eif$ und $eif = 180^0 - bid$, so sind die Flächen dieser Dreiecke allemal einander gleich (§. 7. β.).

20.

Um den Beweis, dafs in (Fig. 6.) $x = (a - b)$ und $y = 180^0 - (a + b)$ ist (§. 18.), auf einmal geben zu können, ohne mehr Figuren zu bedürfen, scheint folgende Bemerkung nöthig.

Wenn man die 3 Seiten eines Kugeldreiecks A, C, B in dieser Ordnung in einen gröfsten Kreis der Kugel einträgt, wie in (Fig. 8.), durch die Halbmesser ao und bo die Linien dm und ck bei e und g rechtwinklig zieht, so schneiden sie sich in einem Puncte h und ist $cg = \sin A$, $de = \sin B$ und Winkel $khd = C$. Zieht man hf rechtwinklig gegen em, macht $hm = hg$ und $fe = de = \sin B$, so ist bekanntlich $fm = cg = \sin A$, Winkel feh = sphär. Winkel a, desgleichen $fmh = b$, mithin $mfe = 180^0 - (a + b)$. Diese Construction eines solchen Winkeldreiecks hat auch keine Schwierigkeit, wenn 1 Winkel stumpf oder 1 Seite $> 90^0$ ist.

Nun stelle aber das $\triangle abc$ in (Fig. 2.) dasjenige Winkeldreieck vor, welches dem bisher (§. 16. etc.) betrachteten Kugeldreiecke zugehört, und welches nach der Betrachtung §. 8. allemal pafst, indem nach §. 13. $(a+b)<180^0$ ist, wenn $(A+B)<180^0$. Darin sei $bc=\sin A$, $ac=cd=\sin B$, folglich $bd=\sin A-\sin B=2\sin\frac{1}{2}(A-B)\cos\frac{1}{2}(A+B)$, und Winkel a und b den gleichbezeichneten sphärischen Winkeln gleich; daher $acb=180^0-(a+b)$, $m=\frac{1}{2}(a+b)$, $n=\frac{1}{2}(a-b)$ (§. 9.). Nun ist

$$ab=\frac{bc.\sin acb}{\sin a}=\frac{bd.\sin m}{\sin n}, \text{ oder}$$

$$\frac{\sin A.\sin(a+b)}{\sin a}=\frac{(\sin A-\sin B).\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}, \text{ oder}$$

$$\frac{\sin C.\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\sin c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B).\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}, \text{ folglich}$$

$$\sin\frac{1}{2}(a-b).\cos\frac{1}{2}(a+b)=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B).\cos\frac{1}{2}(A+B).\sin c}{\sin C}$$

In (Fig. 6.) ziehe man gd und es, so ist Winkel $bdg=\frac{1}{2}x$, $bgd=90^0+\frac{1}{2}c$, $fes=\frac{1}{2}y$, $esf=180^0-\frac{1}{2}c$. Nun ist

$$bd=\frac{bg.\sin bgd}{\sin bdg}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(A-B).\cos\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}x},$$

$$ef=\frac{fs.\sin esf}{\sin sef}=\frac{2\cos\frac{1}{2}(A+B).\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}y}.$$

Multiplicirt man beide Gleichungen, so ist

$$bd.ef=2\sin\tfrac{1}{2}C.2\cos\tfrac{1}{2}C \text{ (§. 19.)}=2\sin C=\frac{2\sin\frac{1}{2}(A-B).\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin c}{\sin\frac{1}{2}x.\sin\frac{1}{2}y},$$

folglich

$$\sin\tfrac{1}{2}x.\sin\tfrac{1}{2}y=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B).\cos\frac{1}{2}(A+B)\ \sin c}{\sin C}$$

Da aber oben derselbe Ausdruck gefunden wurde, so ist $\sin\frac{1}{2}x.\sin\frac{1}{2}y=\sin\frac{1}{2}(a-b).\cos\frac{1}{2}(a+b)=\sin\frac{1}{2}(a-b).\sin(90^0-\frac{1}{2}(a+b))$. Da sich nun x wie $(a-b)$ und y wie $180^0-(a+b)$ verhält (§. 18.), nicht aber x wie $180^0-(a+b)$, so mufs in allen Puncten $x=(a-b)$, folglich $y=180^0-(a+b)$ sein. Es ist daher auch $w-z=180^0-(a+b)$ und $(u-v)=(a-b)$ (§. 18.). Da endlich $a>u$, $b>v$ sein mufs, so sei $a=u+\delta$, $b=v+\delta'$. Subtrahirt man beides, so ist $a-b=u-v+\delta-\delta'$, mithin $\delta=\delta'$, d. h. a übertrifft u um eben so viel, als b, v. Die Beweise, dafs $x=(a-b)$, $y=180^0-(a+b)$, lassen sich übrigens schöner führen mittelst 2 Constructionen.

21.

Dem gemäfs haben die in den Ebenen bda und cef liegenden Winkel gegen die sphärischen a, b, c folgende Werthe. Wenn nemlich:

1) $bid = c$, folglich $bad = \frac{1}{2}c$, so ist
2) $aid = 180^0 - c$, folglich $dgi = 90^0 - \frac{1}{2}c$,
3) $adg = 90^0$,
4) $bik = x = (a - b)$, folglich $bdg = \frac{1}{2}(a - b)$ (§. 20.);
5) $adb = 90^0 + \frac{1}{2}(a - b)$,
6) $bgd = 90^0 + \frac{1}{2}c$,
7) $bdi = u = 90^0 - \frac{1}{2}(b + c - a)$,
8) $dbg = v = 90^0 - \frac{1}{2}(a + c - b)$,
9) $cie = c$, folglich $cse = \frac{1}{2}c$ (§. 18, β.),
10) $eif = 180^0 - c$, folglich $ecf = 90^0 - \frac{1}{2}c$,
11) $ces = 90^0$,
12) $fip = y = 180^0 - (a + b)$, folglich $sef = 90^0 - \frac{1}{2}(a + b)$,
13) $cef = 180^0 - \frac{1}{2}(a + b)$,
14) $esf = 180^0 - \frac{1}{2}c$,
15) $ief = w = 90^0 - \frac{1}{2}(a + b - c)$,
16) $ife = z = \frac{1}{2}(a + b + c) - 90^0$.

22.

Addirt man von den 4 Winkeln u, v, w, z, je zwei, so findet man

1) $u + z = a$, 2) $v + z = b$, 3) $w + z = c$,
4) $v + w = 180^0 - a$, 5) $u + w = 180^0 - b$, 6) $u + v = 180^0 - c$.

Daraus folgt $u + v + w + z = 180^0$, was auch aus der Betrachtung der (Fig. 6.) sich ergiebt. Da auch $u + v = a + b - 2\delta$ (§. 20.) $= 180^0 - c$, so ist $2\delta = (a + b + c) - 180^0$, folglich $\delta = \frac{1}{2}(a + b + c) - 90^0 = z$. Es ist daher um z Winkel a gröfser, als u, b gröfser als v.

Aus dem bisher Vorgetragenen lassen sich leicht Methoden ableiten, aus 3 bekannten Stücken eines Kugeldreiecks, worin $(A + B) < 180^0$, die übrigen durch **Construction** zu finden, welche wir hier der Kürze wegen übergehen.

23.

Wenn $(A + B) = 180^0$, mithin (Fig. 6.) ab durch den Mittelpunct o geht, so ist $ci = if$; daher fallen die Puncte s und f zusammen und $fs = 2\cos\frac{1}{2}(A + B)$ (§. 6.) verschwindet. Es wird $z = w = \frac{1}{2}c$, daher (nach §. 21. No. 16. oder 15.) $\frac{1}{2}(a + b) = 90^0$, folglich $(a + b) = 180^0$,

und $\frac{1}{2}(a-b) = \frac{1}{2}(a+b) - b = 90^0 - b$; nach §. 21. No. 7. 8., $u = (a - \frac{1}{2}c)$, $v = b - \frac{1}{2}c$, mithin $a = u + \frac{1}{2}c =$ Winkel bda, und $b = v + \frac{1}{2}c =$ Winkel $dba + bad$ (vergl. §. 9. und 11.).

24.

In (Fig. 7.) sei $acbf$ ein gröfster Kreis einer Kugel, $bc = A$ und $ac = B$ zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks, so, dafs $(A+B) > 180^0$; ab und cf durchschneiden sich bei i ebenfalls rechtwinklig. Die Hülfskreise sind mit bi und ci beschrieben, und ab und cf bis dahin in g und s verlängert, daher $ag = 2 \sin\frac{1}{2}(A-B)$ (§. 6.), $fs = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)$. Die übrigen Bestandtheile der Linien bg und cs haben die gleichbezeichneten Werthe §. 6. Legt man nun an i den sphärischen Winkel $c = aid$, macht $eid = 90^0$, und zieht da verlängert bis k und dg, desgleichen ef, verlängert bis p und es, endlich auch ik und ip, so ist

1) $ad = 2\sin\frac{1}{2}C$, 3) $kig = x = (a-b)$,
2) $ef = 2\cos\frac{1}{2}C$, 4) $sip = y = (a+b) - 180^0$.

25.

Die Beweise dieser 4 Werthe können auf ebendieselbe Weise geführt werden, wie in den §§. 17. 19. 20. bereits geschehen ist. Es werden daher einige Andeutungen hinreichend sein.

1) Wenn man (Fig. 5.) eb'' verlängert und am senkrecht darauf, wie auch bm zieht, so findet sich in dem rechtwinkligen $\triangle\, abm$, $ab^2 = 4\sin^2\frac{1}{2}C = 4\sin^2\frac{1}{2}(A-B) + 4\sin B \sin A \sin^2\frac{1}{2}c$. Ebendenselben Werth erhält man auf ebendieselbe Weise (§. 17.) für ad^2 (Fig. 7.), woraus $ad = 2\sin\frac{1}{2}C$ folgt.

2) Dafs $ef = 2\cos\frac{1}{2}C$, ergiebt sich eben so, wie §. 19.

3) Betrachtet man das $\triangle\, abc$ (Fig. 3.) als das dem gegenwärtigen Falle entsprechende Winkeldreieck, worin $ac = \sin B$, $bc = \sin A$ und a und b als die gleichbezeichneten sphärischen Winkel angenommen werden, mithin $acb = (a+b) - 180^0$ ist, mit Rücksicht auf die Betrachtung §. 10. und §. 15., und verfährt wie §. 20., so findet man für x und y (Fig. 7.) die §. 24. No. 3. 4. angegebenen Werthe.

26.

Es haben daher die in den Ebenen $bdgk$ und $cbspi$ liegenden Winkel folgende Werthe. Wenn nämlich a, b, c die sphärischen Winkel sind, und

1) $dig = c$, folglich $dbg = \frac{1}{2}c$, so ist

2) $bid = 180^0 - c$, folglich $bgd = 90^0 - \frac{1}{2}c$,
3) $bdg = 90^0$,
4) $kig = x = (a - b)$, folglich $adg = \frac{1}{2}(a - b)$,
5) $adb = 90^0 - \frac{1}{2}(a - b)$,
6) $dai = u = 90^0 - \frac{1}{2}(b + c - a)$,
7) $adi = v = 90^0 - \frac{1}{2}(a + c - b)$,
8) $adq = \alpha = 90^0 + \frac{1}{2}(a + c - b)$,
9) $dag = \beta = 90^0 + \frac{1}{2}(b + c - a)$,
10) $cie = c$, folglich $cse = \frac{1}{2}c$,
11) $eis = 180^0 - c$, folglich $ecs = 90^0 - \frac{1}{2}c$,
12) $ces = 90^0$,
13) $pis = y = (a + b) - 180^0$, folgl. $fes = \frac{1}{2}(a + b) - 90^0$,
14) $cef = 180^0 - \frac{1}{2}(a + b)$,
15) $ief = w = 90^0 - \frac{1}{2}(a + b - c)$,
16) $efi = z = \frac{1}{2}(a + b + c) - 90^0$.

27.

Wie §. 22. findet sich auch hier

1) $u + z = a$, 2) $v + z = b$, 3) $w + z = c$,
4) $v + w = 180^0 - a$, 5) $u + w = 180^0 - b$, 6) $u + v = 180 - c$,
mithin auch $u + v + w + z = 180^0$. Übrigens ist auch $\alpha - w = a$, $\beta - w = b$.

Die Verfahrungsarten, aus 3 bekannten Stücken eines Kugeldreiecks, worin $(A + B) > 180^0$ ist, die übrigen durch Construction zu finden, können hier auch übergangen werden, da sie sich aus dem Bisherigen leicht ableiten lassen.

28.

Nach §. 21. 22. und 26. findet sich in allen Fällen, es mag $(A + B) <$ oder $=$ oder $> 180^0$ sein, der Winkel $z = \frac{1}{2}(a + b + c) - 90^0$. In (Fig. 6.) sieht man, dafs in den, §. 21. und 22. betrachteten Fällen, wo $\frac{1}{2}(a + b + c)$ zwischen 90^0 und 180^0 fällt, z nur bis 90^0, und wenn $(A + B) > 180^0$ ist, nur bis 180^0 wachsen kann (Fig. 7.). Da also in allen Fällen $z < 180^0$ ist, so ist $\sin z$ allemal positiv. Nun ist zwar $\sin z = \sin(\frac{1}{2}(a + b + c) - 90^0)$ der Gröfse, so wie dem Zahlwerthe nach, $= \cos\frac{1}{2}(a + b + c)$, wird aber nicht negativ, weil eine positive Gröfse dadurch nicht negativ werden kann, dafs sie blos einen andern Namen bekommt. Gleiche Bewandnifs hat es mit der Function $\sin(\frac{1}{2}(a + b) - 90^0) = \cos\frac{1}{2}(a + b)$, wo $\frac{1}{2}(a + b) > 90^0$ ist. Denn die Zeichen des Gegensatzes können auf die trigonome-

trischen Functionen nur in so fern Anwendung finden, als sie eine entgegengesetzte Lage gegen einander haben.

29.

Vergleicht man nun die goniometrischen Werthe der in (Fig. 6. und 7.) betrachteten Linien (§. 6.) mit den Functionen ihrer entgegenliegenden Winkel (§. 21. und 26.) nach dem einfachsten, aber allgemeingültigen Satze der ebenen Trigonometrie, und zwar zuvörderst in (Fig. 6.), wo $(A+B)<180^0$ ist, so erhält man folgende VIII Hauptgleichungen, wofür der Halbmesser $= 1$ angenommen ist:

$$1.\quad bi.\sin bid = bd.\sin u, \text{ d. i.}$$
$$2\sin\tfrac{1}{2}A.\cos\tfrac{1}{2}B.\sin c = 2\sin\tfrac{1}{2}C.\sin(90^0-\tfrac{1}{2}(b+c-a)) \text{ oder}$$
$$\sin\tfrac{1}{2}A.\cos\tfrac{1}{2}B.\sin c = \sin\tfrac{1}{2}C.\cos\tfrac{1}{2}(b+c-a).\quad \text{I.}$$
$$2.\quad di.\sin bid = bd.\sin v, \text{ d. i.}$$
$$2\cos\tfrac{1}{2}A.\sin\tfrac{1}{2}B.\sin c = 2\sin\tfrac{1}{2}C.\sin(90^0-\tfrac{1}{2}(a+c-b)) \text{ oder}$$
$$\cos.\tfrac{1}{2}A.\sin\tfrac{1}{2}B.\sin c = \sin\tfrac{1}{2}C.\cos\tfrac{1}{2}(a+c-b).\quad \text{II.}$$
$$3.\quad if.\sin fie = ef.\sin w, \text{ d. i.}$$
$$2\cos\tfrac{1}{2}A.\cos\tfrac{1}{2}B.\sin(180^0-c) = 2\cos\tfrac{1}{2}C.\sin(90^0-\tfrac{1}{2}(a+b-c)) \text{ oder}$$
$$\cos\tfrac{1}{2}A.\cos\tfrac{1}{2}B.\sin c = \cos\tfrac{1}{2}C.\cos\tfrac{1}{2}(a+b-c).\quad \text{III.}$$
$$4.\quad ei.\sin cif = ef.\sin z, \text{ d. i.}$$
$$2\sin\tfrac{1}{2}A.\sin\tfrac{1}{2}B.\sin(180^0-c) = 2\cos\tfrac{1}{2}C.\sin(\tfrac{1}{2}(a+b+c)-90^0) \text{ oder}$$
$$\sin\tfrac{1}{2}A.\sin\tfrac{1}{2}B.\sin c = \cos\tfrac{1}{2}C.\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c).\quad \text{IV.}$$
$$5.\quad ab.\sin bad = bd.\sin adb \text{ oder}$$
$$2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}c = 2\sin\tfrac{1}{2}C.\sin(90+\tfrac{1}{2}(a-b)) \text{ oder}$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}c = \sin\tfrac{1}{2}C.\cos\tfrac{1}{2}(a-b).\quad \text{V.}$$
$$6.\quad bg.\sin dgb = bd.\sin bdg, \text{ d. i.}$$
$$2\sin\tfrac{1}{2}(A-B)\sin(90^0-\tfrac{1}{2}c) = 2\sin\tfrac{1}{2}C.\sin\tfrac{1}{2}(a-b) \text{ oder}$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(A-B)\cos\tfrac{1}{2}c = \sin\tfrac{1}{2}C.\sin\tfrac{1}{2}(a-b).\quad \text{VI.}$$
$$7.\quad cf.\sin fce = ef.\sin fec, \text{ d. i.}$$
$$2\cos\tfrac{1}{2}(A-B)\sin(90^0-\tfrac{1}{2}c) = 2\cos\tfrac{1}{2}C.\sin(180^0-\tfrac{1}{2}(a+b)) \text{ oder}$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(A-B)\cos\tfrac{1}{2}c = \cos.\tfrac{1}{2}C\sin\tfrac{1}{2}(a+b).\quad \text{VII.}$$
$$8.\quad fs\ \sin esf = ef.\sin fes, \text{ d. i.}$$
$$2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\sin(180^0-\tfrac{1}{2}c) = 2\cos\tfrac{1}{2}C.\sin(90^0-\tfrac{1}{2}(a+b)) \text{ oder}$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}c = \cos\tfrac{1}{2}C.\cos\tfrac{1}{2}(a+b).\quad \text{VIII.}$$

Die Gleichungen I. bis IV. scheinen bisher unbekannt gewesen zu sein, wenigstens hat der Verf. sie noch in keinem Buche gefunden. Daſs sie, sich durch geschickte Umformung der gewöhnlichen Fundamentalgleichung

herleiten lassen mögen, bezweifelt er nicht, hat aber aus Abneigung gegen langweilige analytische Operationen, wenn sie zu nichts Nützlichem führen, den Versuch nie gemacht. Die Gleichungen V. bis VIII. sind die bekannten Delambre-Gaufsischen.

30.

Verführt man eben so mit den gleichbezeichneten Linien in (Fig. 7.) und substituirt die Werthe derselben aus §. 6. so wie die der Winkel aus §. 26., so erhält man auch für die Kugeldreiecke, worin $(A+B) > 180^0$ ist (§. 24.), ebendieselben VIII Gleichungen (§. 29.), welche hier zu wiederholen überflüssig sein würde. Da nun in beiden Figuren (6. und 7.) die dritte Seite $C <$ oder $> 90^0$ sein kann, so ist dadurch die Gültigkeit dieser VIII Gleichungen für alle Kugeldreiecke bewiesen, deren Seiten und Winkel zwischen 0^0 und 180^0 betragen. Die Betrachtung aber auf Fälle zu erstrecken, wo Elemente der Dreiecke 180^0 übersteigen, ist aus bekannten Gründen unnöthig.

31.

Wenn man aber in dem §. 24. betrachteten Kugeldreiecke die Seiten mit A', B', C', und die Winkel desselben mit a', b', c', dagegen dieselben Elemente des ihm zugehörigen Supplementar- oder Polardreiecks mit A, B, C, a, b, c, bezeichnet, so ist in (Fig. 7.), wenn $bc = A'$, $ac = B'$ ist, $bf = b$, $af = a$, weil $bf + ac = af + bc = 180^0$, der Winkel $eif = 180^0 - c'$ (§. 26. 11.) $= C$ und $ef = 2 \sin \frac{1}{2} c$, folglich $ad = 2 \cos \frac{1}{2} c$ (§. 25. 2.); die Linien ba und cf aber, nebst ihren Abschnitten und Verlängerungen, haben folgende Werthe (§. 6):

1) $ab = 2 \sin \frac{1}{2}(b+a)$, 5) $bi = 2 \cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b$,

2) $ag = 2 \sin \frac{1}{2}(b-a)$, 6) $ai = 2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b$,

3) $cf = 2 \cos \frac{1}{2}(b-a)$, 7) $fi = 2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b$,

4) $fs = 2 \cos \frac{1}{2}(b+a)$, 8) $ci = 2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b$.

32.

Die Werthe der Winkel aber, welche auf ähnliche Art, wie oben, bewiesen, oder auch nach dem §. 26. bestimmt werden können, sind folgende. Wenn nemlich:

1) $fie = C$, folglich $fce = \frac{1}{2} C$, so ist

2) $eic = 180^0 - C$, folglich $cse = 90^0 - \frac{1}{2} C$,

3) $ces = 90^0$,

4) $pis = y = 180^0 - (A+B)$, folglich $fes = 90^0 - \frac{1}{2}(A+B)$,

5) $cef = \frac{1}{2}(A+B)$,
6) $ief = w = \frac{1}{2}(A+B-C)$,
7) $efs = \frac{1}{2}(A+B+C)$,
8) $efi = z = 180^0 - \frac{1}{2}(A+B+C)$,
9) $bid = C$, folglich $bgd = \frac{1}{2}C$,
10) $dia = 180^0 - C$, folglich $dbg = 90^0 - \frac{1}{2}C$,
11) $bdg = 90^0$,
12) $kig = x = (B-A)$, folglich $adg = \frac{1}{2}(B-A)$,
13) $bda = 90^0 - \frac{1}{2}(B-A)$,
14) $adi = v = \frac{1}{2}(A+C-B)$,
15) $dai = u = \frac{1}{2}(B+C-A)$,
16) $dag = \beta = 180^0 - \frac{1}{2}(B+C-A)$.

33.

Vergleicht man nun die Werthe der Linien, wie §. 29., so erhält man auch folgende 4 Hauptgleichungen, worin ebenfalls der Halbmesser der Kugel = 1 angenommen ist. Es ist nemlich

1) $ei . \sin eif = ef . \sin z$, d. i.
$2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin C = 2\sin\frac{1}{2}c\sin(180^0 - \frac{1}{2}(A+B+C))$, oder
$\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin C = \sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}(A+B+C)$. IX.

2) $if . \sin eif = ef . \sin w$, d. i.
$2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin C = 2\sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}(A+B-C)$, oder
$\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin C = \sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}(A+B-C)$. X.

3) $ai . \sin aid = ad . \sin v$, d. i.
$2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin(180^0 - C) = 2\cos\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}(A+C-B)$, oder
$\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin C = \cos\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}(A+C-B)$. XI.

4) $di . \sin aid = ad . \sin u$, d. i.
$2\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin(180^0 - C) = 2\cos\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}(B+C-A)$, oder
$\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin C = \cos\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}(B+C-A)$. XII.

Die Vergleichung der Seiten der Dreiecke cef, efs, abd, adg giebt wieder die Gleichungen V. — VIII. §. 29. Diese Gleichungen IX. bis XII. erhält man eben so auch aus (Fig. 6.). Sie haben daher ebenfalls allgemeine Gültigkeit.

34.

Die §. 29. und 33. gefundenen 12 Hauptgleichungen für alle 6 Stücke eines jeden Kugeldreiecks geben nun, nach Vertauschung der Buchstaben, 36, welche in ein Verzeichnifs zusammenzustellen zweckmäfsig ist. Aus

ihnen erhält man blos durch Multiplication und Division, mithin ohne analytische Umwege, alle Gleichungen für 5 und 4 Stücke, welche zur Auflösung der Kugeldreiecke erfordert werden, so wie sie zur Anwendung der Logarithmen unmittelbar brauchbar sind. Durch Division nemlich ergeben sich daraus 36 Gleichungen für 5 Stücke, worunter die 12 Neperschen Analogien. Durch Multiplication der Gleichungen nach I.—IV. und IX.—XII. erhält man 12, und daraus wieder durch Division nochmals 12, mithin 24 Gleichungen für 4 Stücke. Aus ebendenselben 8 Gleichungen findet sich nach Vertauschung der Buchstaben bei zweckmäfsiger Wahl durch Division die Gleichung $\sin A \sin b = \sin B \sin a$, nebst den 2 ähnlichen. Daher erhält man im Ganzen für 6, 5 und 4 Stücke 99 Gleichungen.

35.

Wenn es in Hinsicht der Gleichungen §. 33. blos darauf ankommt, die Formeln für 3 Seiten und einen Winkel zu erhalten und zu beweisen, so kann es auf kürzere Art so geschehen, dafs man die §. 31. angewendete Eigenschaft des Supplementardreiecks nicht bedarf. Um hier nur das kürzeste Verfahren mitzutheilen, seien die Bogen eines gröfsten Kreises (Fig. 8.) $ab = C$, $ad = B$, $dl = A$. Zieht man bp durch ao, lq durch do rechtwinklig, so schneiden sich diese Linien in i, und es ist der Winkel $biq = pil = B$, wie auch Bogen $aq = (A-B)$, $pd = (C-B)$, daher $pq = aq + ad + pd = A + C - B$, $pl = A + B - C$, folglich Winkel $pql = \frac{1}{2}(A + B - C)$, $bq = B + C - A$, folglich Winkel $plq = \frac{1}{2}(B + C - A)$. Ferner ist $ir = br \cos a = \sin C \cos a$, folglich

$$bi = br + ir = \sin C + \sin C \cos a = \sin C(1 + \cos a) = \sin C \,.\, 2\cos^2 \tfrac{1}{2} a,$$

indem $a < 90^0$, und

$$pi = pr - ir = \sin C - \sin C \cos a = \sin C(1 - \cos a) = \sin C \,.\, 2\sin^2 \tfrac{1}{2} a.$$

Zieht man endlich pn und bs rechtwinklig gegen ql und substituirt die gefundenen Werthe, so ist

1) $bs = bi . \sin bis = bl . \sin bls$, d. i.

$$= 2\sin B . \sin C . \cos^2 \tfrac{1}{2} a = 2 \sin \tfrac{1}{2}(A + B + C) \sin \tfrac{1}{2}(B + C - A), \text{ folglich}$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\sin \frac{1}{2}(A + B + C) \sin \frac{1}{2}(B + C - A)}{\sin B \sin C},$$

2) $pn = pi . \sin pin = pq . \sin pqn$, d. i.

$$= 2\sin B . \sin C . \sin^2 \tfrac{1}{2} a = 2\sin \tfrac{1}{2}(A + C - B) \sin \tfrac{1}{2}(A + B - C), \text{ folglich}$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\sin \frac{1}{2}(A + C - B) \sin \frac{1}{2}(A + B - C)}{\sin B . \sin C}.$$

Wenn 1 oder 2 Seiten, als A und C, gröfser als 90° sind, so legt man, um den Beweis auf ebendieselbe Art zu führen, die Ergänzungen derselben zu 180° an B, es mag $B <$ oder $> 90°$ sein. Andere Beweise lassen sich auf die Eigenschaften der Figur 1. gründen, welche vielleicht eleganter scheinen dürften, aber hier der Kürze wegen übergangen werden müssen.

36.

Mittelst der aus obigen XII. Hauptgleichungen hergeleiteten (§. 34.) lassen sich nun zwar alle Fälle lösen, welche bei der Anwendung vorkommen, selbst die zwei, wo man zweimal zu rechnen nicht vermeiden kann. Nemlich:

α) Wenn A, B, c bekannt und C zu suchen ist, so läfst sich mittelst der Neperschen Analogien zuvörderst entweder $\frac{1}{2}(a+b)$ oder $\frac{1}{2}(a-b)$ berechnen und $\frac{1}{2}C$ nach einer der Gleichungen V.—VIII. ohne Zweideutigkeit finden.

β) Wenn a, b, C bekannt und c zu suchen ist, erhält man auf ebendieselbe Weise $\frac{1}{2}(A+B)$ oder $\frac{1}{2}(A-B)$, und dadurch $\frac{1}{2}c$.

Es haben aber bekanntlich Mollweide*) (1816) für jenen (α.), Joh. v. Sniadecki**) (1817) für diesen Fall (β.) besondere Berechnungsarten mittelst Hülfs-Bogen oder Winkel angegeben; allein sie sind aus Gleichungen abgeleitet, deren allgemeine Gültigkeit nicht bewiesen ist. In so fern solche Hülfswinkelformeln nöthig oder wünschenswerth sein sollten, mögen für besagte Fälle hier auch einige angegeben werden, welche auf allgemein bewiesenen Gleichungen beruhen, dieselben Vortheile gewähren und an Kürze jenen nicht nachzustehen scheinen.

37.

Für den ersten Fall (§. 36. α.) ist nach §. 17. und §. 25. $\sin^2\frac{1}{2}C = \sin^2\frac{1}{2}(A-B) + \sin A \sin B \sin^2\frac{1}{2}c$, daher auch

$$1)\quad \sin^2\tfrac{1}{2}C = \sin^2\tfrac{1}{2}(A-B)\left[1 + \frac{\sin A \sin B \sin^2\frac{1}{2}c}{\sin^2\frac{1}{2}(A-B)}\right].$$

Setzt man $\frac{\sin A \sin B \sin^2\frac{1}{2}c}{\sin^2\frac{1}{2}(A-B)} = \tang^2\varphi$, so erhält man

$$\sin\tfrac{1}{2}C = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\varphi}.\quad (\text{I.})$$

*) Zeitschrift für Astronomie I. S. 459.

**) Sphärische Trigonom. a. d. Pol. übers. von L. Feld. Leipz 1828. §. 8. S. 27.

2) Weil $1-\sin^2\frac{1}{2}C=\cos^2\frac{1}{2}C$, so ist

$$\cos^2\tfrac{1}{2}C=\cos^2\tfrac{1}{2}(A-B)-\sin A\sin B\sin^2\tfrac{1}{2}c.$$

Setzt man $\frac{\sin A\sin B\sin^2\frac{1}{2}c}{\cos^2\frac{1}{2}(A-B)}=\sin^2\varphi$, weil allemal $\sin A\sin B\sin^2\frac{1}{2}c>\cos^2\frac{1}{2}(A-B)$, so ist

$$\cos\tfrac{1}{2}C=\cos\tfrac{1}{2}(A-B)\cos\varphi.\quad\text{(II.)}$$

3) Wenn man in den Gleichungen §. 17. $\cos c=2\cos\frac{1}{2}c-1$, wenn $c<90^0$, $=1-2\cos^2\frac{1}{2}c$, wenn $c>90^0$ (§. 4.), so erhält man

$$\sin^2\tfrac{1}{2}C=\sin^2\tfrac{1}{2}(A+B)-\sin A\sin B\cos^2\tfrac{1}{2}c.$$

Setzt man $\frac{\sin A\sin B\cos^2\frac{1}{2}c}{\sin^2\frac{1}{2}(A+B)}=\cos^2\varphi$, so ist

$$\sin\tfrac{1}{2}C=\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\varphi.\quad\text{(III.)}$$

4) Da $\cos^2\frac{1}{2}C=\cos^2\frac{1}{2}(A+B)+\sin A\sin B\cos^2\frac{1}{2}c$, so ist, wenn $\frac{\sin A\sin B\cos^2\frac{1}{2}c}{\cos^2\frac{1}{2}(A+B)}=\text{cotang}^2\varphi$,

$$\cos\tfrac{1}{2}C=\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\varphi}.\quad\text{(IV.)}$$

38.

Wenn man in (Fig. 7.) die Werthe von ef und cd in Beziehung auf §. 31. auf ebendieselbe Weise entwickelt, wie §, 17., so erhält man

1) $\cos^2 c=\sin^2\frac{1}{2}(a-b)+\sin a\sin b\cos^2\frac{1}{2}C.$

Nun sei $\frac{\sin a\sin b\cos^2\frac{1}{2}C}{\sin^2\frac{1}{2}(a-b)}=\text{cotang}^2\psi$, folglich

$$\cos\tfrac{1}{2}c=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\psi}.\quad\text{(I.)}$$

Verfährt man ferner wie §. 37., so ist

2) $\sin^2\frac{1}{2}c=\cos^2\frac{1}{2}(a-b)-\sin a\sin b\cos^2\frac{1}{2}C,$

$\frac{\sin a\sin b\cos^2\frac{1}{2}C}{\cos^2\frac{1}{2}(a-b)}=\cos^2\psi$, folglich

$$\sin\tfrac{1}{2}c=\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\sin\psi.\quad\text{(II.)}.$$

3) $\cos^2\frac{1}{2}c=\sin^2\frac{1}{2}(a+b)-\sin a\sin b\sin^2\frac{1}{2}C,$

$\frac{\sin a\sin b\sin^2\frac{1}{2}C}{\sin^2\frac{1}{2}(a+b)}=\sin^2\psi$, folglich

$$\cos\tfrac{1}{2}c=\sin\tfrac{1}{2}(a+b)\cos\psi.\quad\text{(III.)}$$

4) $\sin^2\frac{1}{2}c=\cos^2\frac{1}{2}(a+b)+\sin a\sin b\sin^2\frac{1}{2}C,$

$\frac{\sin a\sin b\sin^2\frac{1}{2}C}{\cos^2\frac{1}{2}(a+b)}=\text{tang}^2\psi$, folglich

$$\sin\tfrac{1}{2}c=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\psi}.\quad\text{(IV.)}$$

39.

Wiewohl für specielle Fälle, wenn nemlich Seiten und Winkel $= 90^0$ oder $= 60^0$ oder $= 45^0$ etc. oder einander gleich sind, jene Gleichungen §. 29. und 33. manche Verkürzungen erhalten, so könnte der hier vorgetragenen Behandlungsweise der Kugeldreiecke die Einwendung gemacht werden, dafs dadurch die bekannten, sehr nützlichen Formeln für solche, worin 1 Seite oder 1 Winkel, oder mehrere zugleich, $= 90^0$ sind, nicht erhalten werden. Um dieser zu begegnen, sei hier noch beigefügt, auf welche einfache und zugleich anschauliche Weise jene Formeln bewiesen werden können.

40.

In (Fig. 9.) mögen die Seiten $A = bc = 90^0$, $B = ca$, $C = ap = bd$ sein. Zieht man dl durch bo, af durch co, pq durch ao rechtwinklig, so schneiden sich dl und af in h rechtwinklig, pq aber die Verlängerung von bo so, dafs Winkel $okm = B$, es mag $B <$ oder $> 90^0$ sein. Schneidet man hf mit $gf = gd = \sin C$, und macht $hi = he = \sin B \cos c$, so ist $if = \sin B$ und Winkel $fgi = b$, $gif = c$, daher in dem $\triangle fgi$ $\sin B \sin c = \sin C \sin b$. Zieht man kn senkrecht gegen pq und macht $mn = mq = \sin C$, so ist Winkel $qmn = a$, $km = \sin C \cos a$, $kn = \sin b$; übrigens $om = \cos C = go$ und $eo = \cos B$. Daher ist (für den Halbmesser $= 1$)

1) $kn = mn . \sin kmn$, d. i.
 $\sin b = \sin B \sin a$;

2) $go = he$, d. i.
 $\cos C = \sin B \cos c$, folglich, da $\sin B = \frac{\sin C \sin b}{\sin c}$:

3) $\cot C = \sin b \cot c$, desgleichen
 $\cot B = \sin c \cot b$;

4) $om = km . \tang okm$, d. i.
 $\cos C = \sin C \cos a \tang B$, oder
 $\cot C \cot B = \cos a$.

5) Aus No. 4., 1. und 3. folgt
 $\cos B = \cot a \tang c$, und aus 3. und 4.

6) $\cos a = \cos b \cos c$.

41.

Für ein rechtwinkliges Kugeldreieck sei (Fig. 10.) ebenfalls ein gröfster Kreis, worin $bc = A$ die Hypotenuse, $ab = C$, $ad = B$ die Ka-

theten. Zieht man ce durch bo, dk durch ao rechtwinklig, so liegt der Durchschnittspunct dieser Linien h bekanntlich in ao, und ist $cg = \sin A$, $go = \cos A$, $gh = \sin A \cos b$, $dh = \sin B$, $ho = \cos B$. Zieht man hf senkrecht gegen ge und macht $gf = cg = \sin A$, so ist $hf = dk = \sin B$, Winkel $fgh = b$ und $fhg = a = 90^0$. Daher

1) $hf = gf . \sin fgh$, d. i. $\sin B = \sin A \sin b$;
2) $go = ho . \cos goh$, d. i. $\cos A = \cos B \cos C$;
3) $gh = go . \text{tang}\, goh$, d. i.
   $\sin A \cos b = \cos A\, \text{tang}\, C$, oder $\text{tang} A \cos b = \text{tang}\, C$;
4) $gh = ho . \sin goh$, d. i.
   $\sin A \cos b = \cos B \sin C$, oder, da $\sin A = \frac{\sin B}{\sin b}$ (1.):

   $\text{tang}\, B = \sin C \cot b$; und, weil $\sin A = \frac{\sin C}{\sin c}$:
5) $\cos b = \cos B \sin c$, wie auch (b und c vertauscht)
   $\cos c = \cos C \sin b$; woraus durch Multiplication und Substitution aus No. 2.
6) $\cot b \cot c = \cos A$.

Wenn A und B oder $C > 90^0$ sind, so ergeben sich diese Formeln eben so leicht, wenn man die Ergänzungen derselben zu 180^0 in den Kreis trägt.

42.

Dafs endlich nach der in diesem Aufsatze angedeuteten Methode alle Aufgaben der sphärischen Trigonometrie sehr einfach durch Construction gelöst, und dabei auch die Winkel auf ebendenselben gröfsten Kreis reducirt und in demselben mit den Seiten verglichen werden können, bedarf kaum der Erwähnung. Darauf hier weiter einzugehen, erlauben die Grenzen nicht, in welchen sich diese Abhandlung zu halten hat, und wegen welcher darin, die völlige Bekanntschaft mit dem gegenwärtigen Zustande der Trigonometrie voraussetzend, Vieles ohne Erörterung hingestellt ist. Sollten die hier mitgetheilten Ansichten der Beachtung nicht unwürdig befunden werden, so wird es leicht sein, nicht nur überhaupt die Sachen vollkommener zu gestalten, sondern auch für einzelne Sätze strengere und elegantere Beweise zu liefern. Da eine mit Schwierigkeit neu gebrochene Bahn, womit der Verf. seine Methode vergleichen zu können glaubt, wenigstens ist er darin keinem Vorgänger gefolgt, nicht sogleich die wünschenswerthe Ebenheit und Bequemlichkeit zu haben pflegt, so hofft er, wegen Mangelhaftigkeit um gütige Nachsicht und freundliche Zurechtweisung bitten zu dürfen.

10.

Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung.

(Fortsetzung des Aufsatzes No. 1. im vorigen Hefte.)

(Von dem Herrn Dr. *Stern*, zu Göttingen.)

B. Verwandlung gegebener Kettenbrüche in andere, sowohl der endlichen als der unendlichen.

17.

Es wurde schon früher (§. 2.) an einem Beispiele gezeigt, dafs mehrere Kettenbrüche, die nicht identisch sind, einander gleich sein können. Es sollen nun hier die erheblichsten Methoden gegeben werden, vermittelst welcher man einen gegebenen Kettenbruch, seines Werthes unbeschadet, in einen andern verwandeln kann. Der Nutzen solcher Verwandlungen wird sich beim späteren Gebrauche von selbst ergeben. Der Raum-Ersparung wegen soll aber von jetzt an in den meisten Fällen eine andere Bezeichnung für die Kettenbrüche angewandt werden; nemlich statt der früheren Bezeichnungsart:

$$F(a, a_m) = a + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \text{etc.}}}$$

schreibe ich jetzt: $F(a, a_m) = F(a + b_1 : a_1 + b_2 : a_2 \text{ etc.})$, wo also immer zwischen einem Theilzähler und dem dazu gehörenden Theilnenner zwei Puncte stehen. Sollte ein Theilzähler oder Theilnenner schon ein Bruch sein, so wird er auch in Form eines Bruches geschrieben. Wäre z. B. der Bruch $a + \cfrac{\frac{b_1}{\beta_1}}{a_1 + \cfrac{b_2}{\frac{a_2}{\alpha_2} \text{ etc.}}}$ gegeben, so würde dieser Bruch nach der neuen Bezeichnung, wie folgt, ausgedrückt werden müssen: $F\left(a + \frac{b_1}{\beta_1} : a_1 + b_2 : \frac{a_2}{\alpha_2} \text{ etc.}\right)$. Sollte ein Theilzähler oder Theilnenner aus mehreren, durch $\pm$ verbundenen Gliedern bestehen, so werde ich ihn, wenn Zweideutigkeit entstehen könnte, in Klammern einschliefsen.

18.

In jedem Kettenbruche $F(a, a_{m+n})$ kann man, seines Werthes unbeschadet, einen Theilzähler, den darauf folgenden Theilnenner und den auf diesen folgenden Theilzähler mit einem und demselben beliebigen Ausdrucke multipliciren oder dividiren. Für endliche Kettenbrüche ist der Satz schon früher bewiesen worden (§. 10.); es ist aber leicht einzusehen, daſs er auch für unendliche gilt, wenn man den Werth des unendlichen Kettenbruchs $F(a_{m+1}, a_{m+n}) = \frac{s}{t}$ setzt, weil am angeführten Orte über die Werthe von s und t gar nichts Näheres bestimmt worden ist. Hierdurch erhält man ein Mittel, Kettenbrüche, deren Theilzähler oder Theilnenner Brüche sind, in andere zu verwandeln, deren Theilzähler oder Theilnenner keine Brüche enthalten. Es sei z. B. der Kettenbruch $A = F\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b_1}{\beta_1} : \frac{a_1}{\alpha_1} + \frac{b_2}{\beta_2} : \frac{a_2}{\alpha_2} \text{ etc.}\right)$, so ist

$$A = F\left(\frac{a}{\alpha} + b_1 : \frac{a_1 \cdot \beta_1}{\alpha_1} + \frac{b_2 \cdot \beta_1}{\beta_2} : \frac{a_2}{\alpha_2} \text{ etc.}\right)$$
$$= F\left(\frac{a}{\alpha} + b_1 \cdot \alpha_1 : a_1 \cdot \beta_1 + \frac{b_2 \cdot \alpha_1 \cdot \beta_1}{\beta_2} : \frac{a_2}{\alpha_2} \text{ etc.}\right)$$
$$= F\left(\frac{a}{\alpha} + b_1 \cdot \alpha_1 : a_1 \cdot \beta_1 + b_2 \cdot \alpha_1 \cdot \beta_1 : \frac{a_2 \cdot \beta_2}{\alpha_2} \text{ etc.}\right).$$

Man sieht, daſs auf diese Weise alle gebrochenen Theilzähler und Theilnenner weggeschafft werden können, den ersten Theilnenner $\frac{a}{\alpha}$ jedoch ausgenommen.

19.

Da der Werth eines Kettenbruchs derselbe bleibt, wenn man zwei auf einander folgende Theilzähler b_m, b_{m+1} und den dazwischen liegenden Theilnenner a_m mit -1 multiplicirt, so kann man jeden Kettenbruch mit negativen Theilnennern in einen andern verwandeln, der nur positive Theilnenner enthält, den ersten Theilnenner ausgenommen, der sein Vorzeichen behält. Es sei z. B. der Kettenbruch

$$A = F(\pm a + b_1 : -a_1 + b_2 : -a_2 + b_3 : -a_3 \text{ etc.}),$$

so ist

$$A = F(\pm a - b_1 : a_1 - b_2 : -a_2 + b_3 : -a_3 \text{ etc.})$$
$$= F(\pm a - b_1 : a_1 + b_2 : a_2 - b_3 : -a_3 \text{ etc.})$$
$$= F(\pm a - b_1 : a_1 + b_2 : a_2 + b_3 : a_3 \text{ etc.}).$$

Sind aber die Theilnenner eines Kettenbruches alle positiv, so ist es leicht,

die etwa darin enthaltenen negativen Theilzähler wegzuschaffen, und so den Bruch in einen anderen zu verwandeln, der nur positive Theilzähler und Theilnenner enthält. Denn es ist allgemein

$$a_{m-1} - \frac{b_m}{a_m + R} = a_{m-1} - 1 + \frac{1}{1} + \frac{b_m}{a_m - b_m + R},$$

wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man beide Brüche in gewöhnliche verwandelt. Will man also den Kettenbruch

$$A = F(a - b_1 : a_1 - b_2 : a_2 - b_3 : a_3 \text{ etc.})$$

in einen anderen verwandeln, der nur positive Theilzähler hat, so setze man $R = F(-b_2 : a_2 - b_3 : a_3 \text{ etc.})$, also $A = F([a-1] + 1 : 1 + b_1 : a_1 - b_1 + R)$; nun setze man $R' = F(-b_3 : a_3 \text{ etc.})$, also $R = F(-1 + 1 : 1 + b_2 : a_2 - b_2 + R_1)$ und $A = F([a-1] + 1 : 1 + b_1 : (a_1 - b_1 - 1) + 1 : 1 + b_2 : a_2 - b_2 + R_1)$, und eben so findet man $A =$
$F([a-1] + 1 : 1 + b_1 : (a_1 - b_1 - 1) + 1 : 1 + b_2 : (a_2 - b_2 - 1) + 1 : 1 + b_3 : a_3 - b_3 \text{ etc.})$.
Dieser Bruch wird daher nur positive Theilzähler und Theilnenner enthalten, wenn nicht etwa irgend ein Theilnenner a_m kleiner ist als b_{m+1}.

20.

Ein Kettenbruch, der gebrochene oder negative Theilzähler oder Theilnenner enthält, kann also zuerst nach (§. 18.) in einen andern verwandelt werden. der nur ganze Theilzähler und Theilnenner enthält, dieser wieder nach (§. 19.) in einen andern, der nur positive Theilzähler und Theilnenner hat (den erwähnten Ausnahmefall bei Seite gesetzt); nur der erste Theilnenner könnte gebrochen oder negativ sein, diesen brauchte man alsdann nur auf die andere Seite zu bringen, um auf der einen Seite einen Kettenbruch mit blos ganzen positiven Theilzählern und Theilnennern zu haben. Hierdurch ist eine frühere Behauptung gerechtfertigt (vergl. §. 11.).

21.

Will man einen Kettenbruch mit einer Zahl x multipliciren, so braucht man nur den ersten Theilzähler und Theilnenner mit x zu multipliciren. Ist z. B. der Kettenbruch $A = a + \frac{b_1}{R}$ gegeben, wo R wieder die Summe eines Kettenbruchs ausdrückt, so hat man $x . A = x . a + x . \frac{b_1}{R}$; ist der erste Theilnenner $= 0$, so braucht man nur den ersten Theilzähler mit x zu multipliciren. Will man einen Kettenbruch mit x dividiren, so dividire man den ersten Theilnenner, und multiplicire den zweiten Theil-

zähler und zweiten Theilnenner mit x. Ist z. B. der Kettenbruch $A = a + \frac{b_1}{R}$, so ist $\frac{A}{x} = \frac{a}{x} + \frac{b_1}{x.R}$. Sei nun $R = a_1 + \frac{b_2}{R_1}$, so ist

$$\frac{A}{x} = \frac{a}{x} + \frac{b_1}{x.a_1} + \frac{x.b_2}{R}.$$

22.

Ist in einem Kettenbruche $F(a, a_{m+n})$ ein Theilzähler $b_m = 0$, so bricht der Bruch bei b_m ab, wenn $F(a_m, a_{m+n})$ nicht $= 0$ ist. Hat man z. B. $F(a, a_{m+n}) = F(a + b_1 : a_1 + 0 : a_2 \text{ etc.})$, und ist $F(a_2, a_{m+n})$ nicht $= 0$, so ist $F(a, a_{m+n}) = a + \frac{b_1}{a_1}$. Man darf aber nicht unbedingt behaupten *), dafs, wenn ein Theilzähler $b_m = 0$ ist, alle folgenden Glieder, des Werthes des Bruches unbeschadet, weggelassen werden können, weil es möglich ist, dafs auch $F(a_m, a_{m+n}) = 0$ ist, und alsdann $\frac{b_m}{F(a_m, a_{m+n})} = \frac{0}{0}$ einen bestimmten Werth haben kann. Dafs solche Fälle wirklich vorkommen, wird sich später zeigen.

23.

Ist ein Theilnenner $= 0$, so läfst sich der Kettenbruch zusammenziehen. Hat man z. B. $F(a, a_m) = a + \frac{b}{0} + \frac{b_2}{F(a_2, a_m)}$, so ist

$$F(a, a_m) = a + \frac{b_1}{b_2 : F(a_2, a_m)} = a + \frac{b_1 . F(a_2, a_m)}{b_2},$$

aber $F(a_2, a_m) = a_2 + \frac{b_2}{F(a_3, a_m)}$, also $F(a, a_m) = a + \frac{b_1 . a_2}{b_2} + \frac{b_1 . b_2}{b_2 . F(a_3, a_m)}$,

und da $F(a_3, a_m) = a_3 + \frac{b_3}{F(a_4, a_m)}$, so ist

$$F(a, a_m) = a + \frac{b_1 . a_2}{b_2} + \frac{b_1 . b_2}{b_2 . a_3} + \frac{b_2 . b_3}{F(a_4, a_m)}.$$

24.

Aus §. 7. ergiebt sich eine Methode, jeden Kettenbruch in einen andern zu verwandeln, der weniger Theilbrüche als der erste enthält. Es wurde nemlich dort gezeigt, dafs

$$F(a, a_{m+n}) = \frac{F(a_m, a_{m+n}) . a, a_{m-1} + b_m . a, a_{m-2}}{F(a_m, a_{m+n}) . a_1, a_{m-1} + b_m . a_1, a_{m-2}}$$

ist, oder

*) Diese Behauptung findet man z. B. in Eytelwein's Analysis Bd. 1. §. 273.

$$F(a, a_{m+n}) \,.\, F(a_m, a_{m+n}) \,.\, a_1, a_{m-1} + F(a, a_{m+n}) \,.\, b_m \,.\, a_1, a_{m-2}$$
$$- F(a_m, a_{m+n}) a, a_{m-1} - b_m \,.\, a, a_{m-2} = 0,$$

und wenn man alle Glieder mit a_1, a_{m-1} dividirt:

$$F(a, a_{m+n}) \,.\, F(a_m, a_{m+n}) + F(a, a_{m+n}) \,.\, b_m \,.\, \frac{a_1, a_{m-2}}{a_1, a_{m-1}}$$
$$- F(a_m, a_{m+n}) \,.\, F(a, a_{m-1}) - b_m \,.\, \frac{a, a_{m-2}}{a_1, a_{m-1}} = 0.$$

Hieraus folgt

$$[F(a, a_{m+n}) - F(a, a_{m-1})] \times \left[F(a_m, a_{m+n}) + b_m \,.\, \frac{a_1, a_{m-2}}{a_1, a_{m-1}}\right] =$$

$$b_m \,.\, \frac{a, a_{m-2}}{a_1, a_{m-1}} - b_m \,.\, F(a, a_{m-1}) \,.\, \frac{a_1, a_{m-2}}{a_1, a_{m-1}} = b_m \,.\, \frac{(a, a_{m-2} \,.\, a_1, a_{m-1} - a, a_{m-1} \,.\, a_1, a_{m-2})}{(a_1, a_{m-1})^2}.$$

Nun ist $a, a_{m-2} \,.\, a_1, a_{m-1} - a, a_{m-1} \,.\, a_1, a_{m-2} = \pm b_1 \,.\, b_2 \ldots\ldots b_{m-1}$ (§. 8.), also

$$1. \quad F(a, a_{m+n}) = F(a, a_{m-1}) \pm \frac{b_1 \ldots\ldots b_m}{(a_1, a_{m-1})^2 \left(b_m \,.\, \frac{a_1, a_{m-2}}{a_1, a_{m-1}} + F(a_m, a_{m+n})\right)},$$

folglich ist auch

$$2. \quad F(a_m, a_{m+n}) = F(a_m, a_{2m-1}) \pm \frac{b_{m+1} \ldots\ldots b_{2m}}{(a_{m+1}, a_{2m-1})^2 \left(b_{2m} \,.\, \frac{a_{m+1}, a_{2m-2}}{a_{m+1}, a_{2m-1}} + F(a_{2m}, a_{m+n})\right)},$$

also

$$F(a, a_{m+n}) =$$
$$F(a, a_{m-1}) \pm \frac{b_1 \ldots\ldots b_m}{(a_1, a_{m-1})^2 \left(b_m \,.\, \frac{a_1, a_{m-2}}{a_1, a_{m-1}} + F(a_m, a_{2m-1})\right)} \pm \frac{b_{m+1} \ldots\ldots b_{2m}}{(a_{m+1}, a_{2m-1})^2 \left(b_{2m} \,.\, \frac{a_{m+1}, a_{2m-2}}{a_{m+1}, a_{2m-1}} + F(a_{2m}, a_{m+n})\right)}.$$

$F(a_{2m}, a_{m+n})$ könnte man wieder auf ähnliche Weise wie (1.) und (2.) verwandeln, und man sieht leicht, wie sich der auf diese Weise erhaltene Kettenbruch weiter fortsetzen läſst. Der ganze Ausdruck läſst sich aber noch sehr vereinfachen. Zuvörderst bemerke man, daſs überhaupt, wenn s irgend eine ganze Zahl bedeutet,

$$3. \quad F(a_{sm}, a_{m+n}) = F(a_{sm}, a_{(s+1)m-1}) \pm \frac{b_{sm+1} \ldots\ldots b_{(s+1)m}}{(a_{sm+1}, a_{(s+1)m-1})^2 \left(b_{(s+1)m} \,.\, \frac{a_{sm+1}, a_{(s+1)m-2}}{a_{sm+1}, a_{(s+1)m-1}} + F(a_{(s+1)m}, a_{m+n})\right)},$$

vorausgesetzt, daſs $m+n > (s+1)m$ ist. Ferner setze man

$$4. \quad Z_s = \frac{b_{sm+1} \ldots\ldots b_{(s+1)m}}{(a_{sm+1}, a_{(s+1)m-1})^2 \left(b_{(s+1)m} \,.\, \frac{a_{sm+1}, a_{(s+1)m-2}}{a_{sm+1}, a_{(s+1)m-1}} + F(a_{(s+1)m}, a_{m+n})\right)}$$

$$5. \quad = \frac{1}{a_{sm+1}, a_{(s+1)m-1}} \left(\frac{b_{sm+1} \ldots\ldots b_{(s+1)m}}{b_{(s+1)m} \,.\, a_{sm+1}, a_{(s+1)m-2} + a_{sm+1}, a_{(s+1)m-1} \,.\, F(a_{(s+1)m}, a_{m+n})}\right),$$

Aus (3.) und (4.) folgt

$$6. \quad F(a_{sm}, a_{m+n}) = F(a_{sm}, a_{(s+1)m-1}) \pm Z_s,$$

und daher

$$F(a_{(s+1)m}, a_{m+n}) = F(a_{(s+1)m}, a_{(s+2)m-1}) \pm Z_{s+1} = \frac{a_{(s+1)m}, a_{(s+2)m-1}}{a_{(s+1)m+1}, a_{(s+2)m-1}} \pm Z_{s+1}.$$

Substituirt man diesen Werth in (5.), so hat man, nach gehöriger Reduction:

$$Z_3 = \frac{1}{a_{sm+1}, a_{(s+1)m-1}} \times$$

$$\left(\frac{b_{sm+1} \ldots . b_{(s+1)m} . a_{(s+1)m+1}, a_{(s+2)m-1}}{b_{(s+1)m} . a_{sm+1}, a_{(s+1)m-2} . a_{(s+1)m+1}, a_{(s+2)m-1} + a_{sm+1}, a_{(s+1)m-1} . [a_{(s+1)m}, a_{(s+2)m-1} \pm a_{(s+1)m+1}, a_{(s+2)m-1} . Z_{s+1}]}\right)$$

oder (nach §. 7. Form. *D.*):

$$7. \quad Z_s = \frac{1}{a_{sm+1}, a_{(s+1)m-1}} \left(\frac{b_{sm+1} \ldots . b_{(s+1)m} . a_{(s+1)m+1}, a_{(s+2)m-1}}{a_{sm+1}, a_{(s+2)m-1} \pm a_{(s+1)m+1}, a_{(s+2)m-1} . a_{sm+1}, a_{(s+1)m-1} . Z_{s+1}}\right).$$

Aus (6.) folgt

$$F(a, a_{m+n}) = F(a, a_{m-1}) + Z_0 = \frac{a, a_{m-1}}{a_1, a_{m-1}} + Z_0,$$

also, nach (7.):

$$F(a, a_{m+n}) = \frac{1}{a_1, a_{m-1}} \left(a, a_{m-1} \pm \frac{b_1 \ldots . b_m . a_{m+1}, a_{2m-1}}{a_1, a_{2m-1} \pm a_1, a_{m-1} . d_{m+1}, a_{2m-1} . Z_1}\right).$$

Für Z_1 kann man nun wieder seinen Werth aus (7.) substituiren, und man sieht, wie auf diese Weise der ganze Kettenbruch fortgesetzt werden kann. Man erhält alsdann:

$$8. \quad F(a, a_{m+n}) =$$

$$\frac{1}{a_1, a_{m-1}} \left(a, a_{m-1} \pm \cfrac{b_1 \ldots . b_m . a_{m+1}, a_{2m-1}}{a_1, a_{2m-1} \pm \cfrac{b_{m+1} \ldots . b_{2m} . a_1, a_{m-1} . a_{2m+1}, a_{3m-1}}{a_{m+1}, a_{3m-1} \pm \cfrac{b_{2m+1} \ldots . b_{3m} . a_{m+1}, a_{2m-1} . a_{3m+1}, a_{4m-1}}{a_{2m+1}, a_{4m-1} \pm \cfrac{b_{3m+1} \ldots . b_{4m} . a_{2m+1}, a_{3m-1} . a_{4m+1}, a_{5m-1}}{a_{3m+1}, a_{5m-1} \text{ etc.}}}}\right).$$

Wäre der erste Theilnenner $a = 0$, so wäre $a, a_{m-1} = b_1 . a_2, a_{m-1}$ und

$$F(a, a_{m+n}) = \frac{1}{a_1, a_{m-1}} (b_1 . a_2, a_{m-1} \pm a_1, a_{m-1} . Z_0),$$

woraus sich dann wieder der ganze gesuchte Kettenbruch entwickeln läfst.

Betrachtet man die Formel (8.) mit Aufmerksamkeit, so sieht man, dafs sie so viel Theilbrüche enthält als man Gruppen a_1, a_{m-1}; a_{m+1}, a_{2m-1} u. s. w. hat. Im ursprünglichen Bruche $F(a, a_{m+n})$ sind aber von a_1, bis a_{m+1}, letzteres nicht mit eingeschlossen, m Theilbrüche, eben so viel von a_{m+1} bis a_{2m} u. s. w. Der Kettenbruch (8.) enthält daher m mal weniger Glieder als der ursprüngliche, wenn man den ersten Theilnenner a nich mitzählt. Übrigens folgt aus §. 8., dafs man in den vorhergehenden For meln die positiven oder negativen Zeichen nehmen mufs, je nachdem die Anzahl der in a, a_{m-1} enthaltenen Theilzähler gerade oder ungerade, d. h. je nachdem m ungerade oder gerade ist.

Die Formel (8.) ist besonders dann bequem, wenn der Kettenbruch $F(a, a_{m+n})$ so beschaffen ist, daſs nach einer Anzahl von m Theilbrüchen dieselben Theilzähler und Theilnenner in derselben Ordnung wiederkehren, so daſs

$$a_1, a_{m-1} = a_{m+1}, a_{2m-1} = a_{2m+1}, a_{3m-1} \text{ etc.},$$
$$a_1, a_{2m-1} = a_{m+1}, a_{3m-1} = a_{2m+1}, a_{4m-1} \text{ etc.},$$
$$b_1 \ldots\ldots b_m = b_{m+1} \ldots\ldots b_{2m} = b_{2m+1} \ldots\ldots b_{3m} \text{ etc. ist.}$$

Alsdann ist

$$F(a, a_{m+n}) = \frac{1}{a_1, a_{m-1}}\left(a, a_{m-1} \pm \cfrac{b_1 \ldots b_m . a_1, a_{m-2}}{a_1, a_{2m-1} \pm \cfrac{b_1 \ldots b_m (a_1, a_{m-1})^2}{a_1, a_{2m-1} \pm \cfrac{b_1 \ldots b_m (a_1, a_{m-1})^2}{a_1, a_{2m-1} \text{ etc.}}}}\right).$$

Man bemerke ferner, daſs $a_1, a_{2m-1} = a_1, a_{m-1} . a_m, a_{2m-1} + b_m . a_1, a_{m-2} . a_{m+1}, a_{2m-1}$ ist (§. 7. *D.*), aber nach der Voraussetzung $a_1, a_{m-1} = a_{m+1}, a_{2m-1}$, also $a_1, a_{2m-1} = a_1, a_{m-1} (a_m, a_{2m-1} + b_m . a_1, a_{m-2}) = a_1, a_{m-1} . r$, wenn man $r = a_m, a_{2m-1} + b_m . a_1, a_{m-2}$ setzt. Hieraus folgt $F(a, a_{m+n}) =$

$$\frac{1}{a_1, a_{m-1}} F(a, a_{m-1} \pm b_1 \ldots b_m . a_1, a_{m-2} : r . a_1, a_{m-1} + b_1 \ldots b_m (a_1, a_{m-1})^2 : r . a_1, a_{m-1}$$
$$+ b_1 \ldots b_m (a_1, a_{m-1})^2 : r . a_1, a_{m-1} \text{ etc.})$$

oder (nach §. 18.)

$$9. \quad F(a, a_{m+n}) = \frac{1}{a_1, a_{m-1}} F(a, a_{m-1} \pm b_1 \ldots b_m : r \pm b_1 \ldots b_m : r \pm b_1 \ldots b_m : r \text{ etc.}).$$

Es sei z. B. der unendliche Kettenbruch $F(2:3+2:3+2:3$ etc.) gegeben, und man habe $m = 3$ gesetzt. Weil hier der erste Theilnenner $= 0$ ist, so ist $a, a_{m-1} = b_1 . a_2, a_{m-1}$, und a_1, a_{m-1} der Nenner, $b_1 . a_2, a_{m-1}$ der Zähler des Bruches $\cfrac{2}{3 + \cfrac{2}{3}}$, also $a_1, a_{m-1} = 11$, $b_1 . a_{m-1} = 6$, ferner ist $a_1, a_{m-2} = a_1, a_1 = a_1 = 3$, a_m, a_{2m-1} der Zähler des Bruches $3 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{2}{3}}$, also $= 39$, und $r = 45$, auch $b_1 \ldots b_m = b_1 . b_2 . b_3 = 8$, folglich $F(a, a_{m+n}) = \frac{1}{11} F(6 + 8:45 + 8:45 + 8:45$ etc.). Würde man für m eine andere Zahl annehmen, so würde man natürlich einen andern Ausdruck erhalten. Man kann aber auch für den Werth $m = 3$ noch andere Ausdrücke erhalten. Man verwandle z. B. zuerst den Kettenbruch $F(3+2:3+2:3$ etc.) nach Formel (8.), so erhält man $\frac{1}{11} F(39 + 8:45 + 8:45$ etc.), also

$$F(2:3+2:3+2:3 \text{ etc.}) = 2 : \tfrac{1}{11} F(39 + 8:45 + 8:45 \text{ etc.}) =$$
$$F(22:39 + 8:45 + 8:45 \text{ etc.}),$$

und es lieſsen sich auf ähnliche Weise noch ähnliche Verwandlungen des

Kettenbruchs $F(2:3+2:3+2:3$ etc.) bewerstelligen, der, wie später erhellen wird, eine Wurzel der Gleichung $x^3+3x-2=0$ ist.

Noch ist der Fall merkwürdig, wenn die Theilzähler und Theilnenner in derselben Ordnung wiederkehren, jedoch mit Ausnahme von $a, a_m, a_{2m} \ldots a_{sm}$ und $b_m, b_{2m} \ldots b_{sm}$, die unter einander ungleich sein sollen. Ist also $l < m$, so hat man auch in diesem Falle allgemein $a_l, a_{m-1} = a_{l+m}, a_{2m-1} = a_{l+2m}, a_{3m-1}$ etc. Ferner ist (§. 7. Form. *D.*)

$$a_{rm+1} \cdot a_{(r+2)m-1} =$$

$$a_{rm+1}, a_{(r+1)m-1} \cdot a_{(r+1)m}, a_{(r+2)m-1} + b_{(r+1)m} \cdot a_{rm+1}, a_{(r+1)m-2} \cdot a_{(r+1)m+1}, a_{(r+2)m-1},$$

und, da nach der Voraussetzung

$$a, a_{m-1} = a_{rm+1}, a_{(r+1)m-1} = a_{(r+1)m+1}, a_{(r+2)m-1} \text{ ist, } a_{rm+1}, a_{(r+2)m-1} =$$

$$a_{rm+1}, a_{(r+1)m-1}(a_{(r+1)m}, a_{(r+2)m-1} + b_{(r+1)m} \cdot a_{rm+1}, a_{(r+1)m-2}) = a_1, a_{m-1} \cdot Q_r,$$

wenn man den in den Klammern eingeschlossenen Ausdruck $= Q_r$ setzt; folglich geht der Ausdruck (7.) in folgenden über:

$$10. \quad F(a, a_{m+n}) = \frac{1}{a_1, a_{m-1}}\left(a, a_{m-1} \pm \frac{b_1 \ldots . b_m}{Q_0} \pm \frac{b_{m+1} \ldots . b_{2m}}{Q_1 \pm \text{etc.}}\right).$$

Es ist auch

$$a_{(r+1)m}, a_{(r+2)m-1} = a_{(r+1)m} \cdot a_{(r+1)m+1}, a_{(r+2)m-1} + b_{(r+1)m+1} \cdot a_{(r+1)m+2}, a_{(r+2)m-1}$$

$$= a_{(r+1)m} \cdot a_1, a_{m-1} + b_{(r+1)m+1} \cdot a_2, a_{m-1}, \text{ also}$$

$$Q_r = a_{(r+1)m} \cdot a_1, a_{m-1} + b_{(r+1)m+1} \cdot a_2, a_{m-1} + b_{(r+1)m} \cdot a_1, a_{m-2}.$$

Setzt man $b_{(r+1)m} = b_{(r+1)m+1}$, so bleibt der Werth von Q_r derselbe, wenn man die wiederkehrenden Theilzähler und Theilnenner in umgekehrter Ordnung nimmt *), da $a_1, a_{m-1} = a_{m-1}, a_1$; statt a_2, a_{m-1} hätte man $a_{m-2}, a_1 = a_1, a_{m-2}$ und statt a_1, a_{m-2} hätte man $a_{m-1}, a_2 = a_2, a_{m-1}$ (§. 4. Form. *C.*).

Setzt man also $F(a, a_{m+n}) = \frac{1}{a_1, a_{m-1}}(a, a_{m-1} \pm S)$, so wird der unendliche Kettenbruch, in welchem die wiederkehrenden Theilzähler und Theilnenner in umgekehrter Ordnung vorkommen,

$$= \frac{1}{a_{m-1}, a_1}(a \cdot a_{m-1}, a_1 + b_1 \cdot a_{m-2}, a_1 \pm S),$$

also der Unterschied der zwei unendlichen Kettenbrüche

$$= \frac{b_1}{a_1, a_{m-1}}(a \cdot a_1, a_{m-1} + b_1 \cdot a_2, a_{m-1} - a \cdot a_{m-1}, a_1 + b_1 \cdot a_{m-2}, a_1)$$

$$= \frac{b_1}{a_1, a_{m-1}}(a_2, a_{m-1} - a_1, a_{m-2}) = \frac{b_1}{F(a_1, a_{m-1})} - \frac{b_1}{F(a_{m-1}, a_1)}.$$

---

*) D. h. dafs man statt $F(a + b_1 : a_1 + b_2 : a_2 + \ldots . + b_{m-1} : a_{m-1} + b_m : a_m$ etc.) alsdann $F(a + b_1 : a_{m-1} + b_{m-1} : a_{m-2} + \ldots . + b_2 : a_1 : b_m : a_m$ etc.) hat.

Der Unterschied der beiden unendlichen Kettenbrüche
$F(a+b_1:a_1+b_2:a_2+\ldots.b_{m-1}:a_{m-1}+b_m:a_m+b_1:a_1+\ldots..b_{m-1}:a_{m-1}$ etc.)
und $F(a+b_1:a_{m-1}+b_{m-1}:a_{m-2}+\ldots+b_2:a_1+b_m:a_m+b_1:a_{m-1}+\ldots+b_2:a_1$ etc.)
ist also dem Unterschiede der zwei endlichen Kettenbrüche
$F(a+b_1:a_1+\ldots+b_{m-1}:a_{m-1})$ und $F(a+b_1:a_{m-1}+b_{m-1}:a_{m-2}+\ldots+b_2:a_1)$
gleich, und von den veränderlichen Theilnennern unabhängig *).

25.

Bei allen im Vorigen gezeigten Verwandlungen der Kettenbrüche in andere, wurde der Kunstgriff angewandt, dafs man einen Theil des Kettenbruchs als summirt betrachtete, diese Summe durch einen Buchstaben ausdrückte, und durch die Verbindung dieses Buchstabens mit den übrigen Gliedern des Kettenbruchs neue Ausdrücke fand. Auf ähnliche Weise lassen sich Kettenbrüche vielfältig in andere verwandeln; hier sollen nur noch folgende Verwandlungen erwähnt werden. Es sei der Kettenbruch $F(a, a_m)$ gegeben; man setze $F(a_2, a_m) = R$, so ist

$$F(a, a_m) = a + \frac{b_1}{a_1} - \frac{b_1 . b_2}{a_1 . b_2 + a_1^2 . R},$$

wie man durch Reduction leicht findet. Nun sei $F(a_5, a_m) = R_1$, $F(a_8, a_m) = R_2$ etc., so ist

$$F(a, a_m) = a + \frac{b_1}{a_1} - \frac{b_1 . b_2}{a_1 . b_2 + a_1^2 a_2 + \cfrac{a_1^2 . b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \cfrac{b_5}{R_1}}}};$$

$$\text{aber } \frac{b_4}{a_4 + \frac{b_5}{R_1}} = \frac{b_4}{a_4} - \frac{b_4 . b_5}{a_4 . b_5 + a_4^2 . R_1},$$

$$\text{also } F(a, a_m) = a + \frac{b_1}{a_1} - \frac{b_1 . b_2}{a_1 . b_2 + a_1^2 . a_2 + \cfrac{a_1^2 . b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4} - \cfrac{b_4 . b_5}{a_4 . b_5 + a_4^2 . R_1}}}.$$

Eben so könnte man wieder R_1 durch Hülfe des Ausdrucks R_2 verwandeln. Befreit man alsdann den erhaltenen Kettenbruch von gebrochenen Theilnennern (nach §. 18.), so hat man

$$F(a, a_m) =$$

$$F(a + \frac{b_1}{a_1} - b_1^1 . b_2 : (a_1 . b_2 + a_1^2 . a_2) + a_1^2 . a_4 . b_3 : (a_3 . a_4 + b_4) - b_4 . b_5 : (b_5 + \text{etc.}).$$

Aus §. 18. folgt, dafs man jeden Kettenbruch in einen anderen verwandeln kann, dessen Theilzähler alle $= 1$ sind. Denn hat man den Ket-

---

*) Man vergl. Euler in den *Comm. acad. Petrop. T. IX.* p. 123 ff., und Moebius in Crelle's Journ. für d. Math. Bd. VI. p. 226 ff.

tenbruch $F(a, a_m) = F(a + b_1 : a_1 + b_2 : F(a_2 . a_m))$, so ist dieser $=$
$F\left(a + 1 : \frac{a_1}{b_1} + \frac{b_2}{b_1} : F(a_2, a_m)\right) = F\left(a + 1 : \frac{a_1}{b_1} + 1 : \frac{a_2 . b_1}{b_2} + \frac{b_3 . b_1}{b_2} : F(a_3, a_m)\right)$,
da $F(a_2, a_m) = F(a_3 + b_3 : F(a_3, a_m)$ ist. Es ergiebt sich hieraus von selbst, auf welche Weise diese Verwandelung fortgesetzt werden kann.

Aus §. 19. folgt

$$a_{m-1} + \frac{1}{1} + \frac{b_m}{a_m + R_1} = a_{m-1} + 1 - \frac{b_m}{a_m + b_m + R_1}.$$

Man kann also nach dieser Formel den Theilbruch $\frac{1}{1}$ aus jedem Kettenbruche wegschaffen. Durch Wiederholung desselben Verfahrens kann man auch mehrere solcher Theilbrüche, die aufeinander folgen, wegschaffen, jedoch läſst sich die Reduction alsdann bequemer nach §. 24. ausführen.

Man bemerke noch folgenden Ausdruck:

$$\frac{a}{c - b} = -a + \frac{a}{1} + \frac{1}{b - c - 1},$$

von dessen Richtigkeit man sich durch Reduction überzeugen kann.

26.

Aus $F(a, a_m)$ kann leicht der Werth von $\frac{1}{F(a, a_m)}$ gefunden werden, denn es ist

$$F(a, a_m) = a + \frac{b_1}{F(a_1, a_m)}, \text{ also } \frac{1}{F(a, a_m)} = \frac{1}{a} + \frac{b_1}{F(a_1, a_m)};$$

ist $a = 0$, so ist

$$\frac{1}{F(a, a_m)} = \frac{F(a_1, a_m)}{b_1},$$

oder, weil $F(a_1, a_m) = a_1 + \frac{b_2}{F(a_2, a_m)}$,

$$\frac{1}{F(a, a_m)} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{b_2}{b_1 . F(a_2, a_m)} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{b_2}{b_1 . a_2} + \frac{b_1 . b_2}{F(a_2, a_m)}.$$

27.

Die zwei unendlichen Kettenbrüche

$F(a : \alpha + \alpha : a_1 + \alpha_1 : a_2 + a_2 : \alpha_3$ etc.) und $F(a_1 : a_1 + a_2 : a_2 + a_3 : a_3$ etc.),
die bezüglich A, B heiſsen sollen, sind für jeden Werth von a, a_2, a_3 etc. einander gleich. Denn nach §. 18. ist

$$A = F\left(a . \frac{a_1}{a} : \alpha . \frac{a_1}{a} + a . \frac{a_1}{a} : a_2 + \alpha_1 : a_2 + \alpha_2 : a_3 \text{ etc.}\right) = F(a_1 : \alpha_1 + \alpha_1 : \alpha_1 + a_2 : a_2 + a_2 : a_3 \text{ etc.})$$

$$= F\left(a_1 : a_1 + a_2 . \frac{a_2}{a_1} : a_1 . \frac{a_2}{a_1} + a_1 \frac{a_2}{a_1} : a_2 + a_2 : a_3 \text{ etc.}\right) = F(a_1 : a_1 + a_2 : a_2 + a_2 : a_2 + a_2 : a_3 \text{ etc.})$$

$$= F\left(a_1 : a_1 + a_2 : a_2 + a_3 . \frac{a_3}{a_2} : a_2 . \frac{a_3}{a_2} + a_2 . \frac{a_3}{a_2} : a_3 \text{ etc.}\right) = F(a_1 : a_1 + a_2 : a_2 + a_3 : a_3 + a_3 : a_3 \text{ etc.}),$$

Man sieht, wie auf diese Weise allmählig der Kettenbruch A in den Kettenbruch B verwandelt wird *).

Andere Verwandelungen werden sich noch später darbieten.

C. Verwandelung der Kettenbrüche in Reihen.

28.

Oft kann es nützlich sein, einen Kettenbruch in eine Reihe zu verwandeln, besonders wenn man den Werth des ersteren erforschen will. Die einfachste Methode, eine solche Verwandelung zu bewerkstelligen, ist folgende. Es sei der endliche oder unendliche Kettenbruch $F(a, a_m)$ gegeben. Man setze

$$F(a, a_m) = a + F(a, a_1) - a + F(a, a_2) - F(a, a_1) + F(a, a_3) - F(a, a_2) \ldots$$
$$\ldots + F(a, a_{m-1}) - F(a, a_{m-2}) + F(a, a_m) - F(a, a_{m-1}).$$

Nun ist

$$F(a, a_1) - a = \frac{b_1}{a_1}; \quad F(a, a_2) - F(a, a_1) = -\frac{b_1 \cdot b_2}{a_1 \cdot a_1, a_2};$$
$$F(a, a_3) - F(a, a_2) = \frac{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3}{a_1, a_2 \cdot a_1, a_3} \text{ etc. } (\S. 8.),$$

also

$$A. \quad F(a, a_m) = a + \frac{b_1}{a_1} - \frac{b_1 \cdot b_2}{a_1 \cdot a_1, a_2} + \frac{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3}{a_1, a_2 \cdot a_1, a_3}.$$

Diese Reihe wird endlich oder unendlich sein, je nachdem es der Kettenbruch ist. Nimmt man statt der ganzen Reihe nur einen Theil der zuerst hervortretenden Glieder, z. B. bis zum Gliede $\pm \frac{b_1, b_2 \ldots b_l}{a_1, a_{l-1} \cdot a_1, a_l}$, so folgt aus der Darstellung, durch welche die Reihe gefunden wurde, daſs man alsdann statt $F(a, a_m)$ den Werth von $F(a, a_l)$ findet. Die angenommene Reihe wird also um eben so viel von $F(a, a_m)$ unterschieden sein, wie $F(a, a_l)$, und man findet diesen Unterschied nach §. 8.

Ist $F(a, a_m)$ ein Kettenbruch von der in §. 11. angegebenen Beschaffenheit, so ist jeder spätere Näherungsbruch dem wahren Werthe näher als ein vorhergehender, folglich wird auch die entsprechende Reihe sich dem wahren Werthe desto mehr nähern, je mehr Glieder derselben **) man zusammen nimmt, das heiſst: die Reihe wird convergiren.

---

*) Einzelne hierher gehörende Fälle, wie z. B. $F(1{:}1 + 1{:}2 + 2{:}3 \text{ etc.}) = F(2{:}2 + 3{:}3 \text{ etc.})$ hat schon Euler auf verschiedenen Wegen gefunden.

**) Und die hierdurch entstehenden Werthe werden abwechselnd gröſser oder kleiner als der Werth der ganzen unendlichen Reihe sein (§. 11.).

Der Unterschied der aufeinander folgenden Näherungsbrüche wird immer kleiner, je weiter man in der Rechnung fortgeht, folglich wird auch der Werth der Glieder in der Reihe immer unbedeutender.

Zur Erläuterung diene folgendes Beispiel, welches zugleich zeigt, wie man durch solche Verwandlungen den Werth eines Kettenbruchs finden kann.

Es sei der Kettenbruch $F(1:1+1:1+4:1+9:1+16:1 \text{ etc.})$ (wo die Theilzähler die Quadrate aller ganzen Zahlen, die Theilnenner alle $=1$ sind) gegeben, so ist $a=0$, $a_1=1$; $a_1, a_2=2$; $a_1, a_3=6$; $a_1, a_4=24$; .... $b_1=1$; $b_2=1$; $b_3=4$; .... $b_m=(m-1)^2$ und $F(a, a_m)=1-\frac{1}{2}+\frac{4}{12}-\frac{4.9}{6.24}\ldots\ldots=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots\ldots$ Dies ist bekanntlich der Anfang der Reihe, die den Logarithmen von 2 ausdrückt; daſs aber der gegebene Kettenbruch wirklich $=\log 2$ ist, läſst sich, wie folgt, zeigen. Es ist allgemein $a_1, a_m=a_m.a_1, a_{m-1}+b_m.a_1, a_{m-2}$ (§. 6.), also im vorliegenden Falle $a_1, a_m=a_1, a_{m-1}+(m-1)^2(a_1, a_{m-2})$. Ist daher $a_1, a_{m-1}=(m-1)(a_1, a_{m-2})$, so ist auch $a_1, a_m=m.a_1, a_{m-1}$; nun ist aber wirklich $a_1, a_3=3.a_1, a_2=3.2$; $a_1, a_4=4.a_1, a_3=4.3.2$, also überhaupt $a_1, a_m=1.2.3\ldots\ldots m$. Das $m$te Glied der entstehenden Reihe ist also

$$=\pm\frac{b_1.b_2\ldots\ldots b_m}{a_1, a_{m-1}.a_1, a_m}=\pm\frac{1.2^2.3^2\ldots\ldots(m-1)^2}{(1.2.3\ldots\ldots m-1)^2.m}=\pm\frac{1}{m},$$

welches auch das m^{te} Glied der Reihe, die den $\log 2$ ausdrückt, ist.

Wäre der Kettenbruch $F(1:1+1:2+9:2+25:2 \text{ etc.})$, wo die Theilzähler vom zweiten an die Quadrate der ungraden Zahlen nach ihrer Folge, die Theilnenner vom zweiten an, alle $=2$ sind *), gegeben, so hat man hier $b_1=1$, $b_2=1$, $b_3=(1+1.2)^2$, $b_4=(1+2.2)^2$ und allgemein $b_m=(1+m-2.2)^2=(2m-3)^2$. Ferner ist $a=0$, $a_1=1$; $a_1, a_2=3$; $a_1, a_3=3.5$; $a_1, a_4=3.5.7$; ....; allgemein ist, weil $a_m=2$ und $b_m=(2m-3)^2$, $a_1, a_m=2.a_1, a_{m-1}+(2m-3)^2.a_1, a_{m-2}$. Ist daher $a_1, a_{m-1}=(2m-3).a_1, a_{m-2}$, so ist auch $a_1, a_m=(2m-1).a_1, a_{m-1}$; nun ist

---

*) Bei dem häufigen Gebrauch solcher Kettenbrüche, deren Theilglieder einem bestimmten Gesetze folgen, wäre es gut, sie durch eine besondere Bezeichnung anzudeuten, durch die das Gesetz sogleich erkannt würde. So z. B. könnte man den vorliegenden Kettenbruch durch $\underset{0-\infty}{x} F[1:1+(2x+1)^2:2]$ andeuten; eben so könnte der Kettenbruch $F(1:1+1:1+4:1+9:1+16:1 \text{ etc.})$ durch $\underset{1-\infty}{x} F[1:1+x^2:1]$ angedeutet werden, indem hierdurch gesagt wird, daſs man im ersten Falle für x nach einander die Werthe 0, 1, 2, 3, ... im zweiten die Werthe 1, 2, 3, ... setzen soll.

aber $a_1, a_4 = 3$; $a_1, a_3 = 5 . a_1, a_2$; $a_1, a_4 = 7 . a_1, a_3$, also überhaupt $a_1, a_m = 3 . 5 . 7 \ldots . (2m-1)$; das m^{te} Glied der dem Kettenbruch entsprechenden Reihe ist daher $\frac{3^2 . 5^2 \ldots . (2m-3)^2}{(2m-1).(3^2 . 5^2 \ldots . (2m-3))^2} = \frac{1}{2m-1}$, und die ganze Reihe $= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ etc. $= \frac{\pi}{4}$, wo π die Ludolphische Zahl bedeutet, wie bekannt.

Mann kann die Reihe (A.) auch in eine andere verwandeln, die nur positive Glieder hat, wenn man immer zwei auf einander folgende Glieder, deren erstes das $+$ Zeichen vor sich hat, addirt. Die Reihe wird alsdann $=$

$$a + \frac{b_1 (a_1, a_2 - b_2)}{a_1 . a_1, a_2} + \frac{b_1 . b_2 . b_3 (a_1, a_4 - b_4 . a_1, a_2)}{a_1, a_2 . a_1, a_3 . a_1, a_4} \ldots .$$

Andere Methoden, Kettenbrüche in Reihen zu verwandeln, wird das folgende Capitel darbieten.

29.

Jede Reihe, die unter die Form der Reihe (A.) gebracht werden kann, so dafs $a_1, a_2 \ldots . b_1, b_2 \ldots .$ ganze positive Zahlen sind, wird convergiren, weil man jede Summe eines Theils ihrer ersten Glieder als den Werth eines convergirenden Kettenbruchs betrachten kann. Sind daher $x, x_{,}, x_{,,}, y, y_{,}, y_{,,}$, ganze positive Zahlen, und man setzt $y' . y + x_{,} . m_{,} = A$, so wird jede Reihe convergiren, deren n^{tes}, $n + 1^{tes}$, $n + 2^{tes}$ Glied bezüglich $= \frac{m . x}{m_1 . y}$, $\frac{m . x x_{,}}{y . A}$, $\frac{m . x x_{,} x_{,,}}{A (y_{,,} . A + x_{,,} . y)}$ ist, vorausgesetzt, dafs das Vorzeichen des $n + 1^{ten}$ Gliedes dem des n^{ten} und $n + 2^{ten}$ entgegengesetzt ist.

(Die Fortsetzung folgt.)

11.

Mémoire sur la résolution des équations algébriques dont les racines ont entre elles un rapport donné, et sur l'intégration des équations différentielles linéaires dont les intégrales paticulières peuvent s'exprimer les unes par les autres *).

(Par Mr. *G. Libri* de Florence.)

Lu à l'Académie Royale des sciences de Paris le 30. Septembre 1830.

Lorsque Mr. Gauss publia (en 1801) sa mémorable découverte de la résolution des équations à deux termes, il annonça que sa méthode pouvait servir aussi à la division en parties égales de l'arc de la Lemniscate. Ce géomètre celèbre n'ayant jamais fait connaître son analyse, je pensai, il y a quelques années, que la résolution de ce problème pouvait offrir quelqu'intérêt, et je m'y appliquai. Dans un mémoire présenté en 1825 à l'Académie Royale des sciences de Paris, j'exposai une méthode nouvelle, fort simple, pour résoudre les équations à deux termes, et pour trouver directement les *équations auxiliaires*. J'indiquai en même tems de quelle manière on pouvait généraliser ma méthode et l'appliquer à une classe d'équations algébriques qui comprennent celle d'où dépend la multisection de la Lemniscate. Le mémoire dont nous venons de parler

*) On a averti les lecteurs de ce journal, tome 7. pag. 57., que le mémoire No. 7., qui commence à l'endroit cité, ainsi que plusieurs autres, qui suivraient, et qui ont Mr. G. Libri de Florence pour auteur, n'ont point été publiés, Mr. Libri s'étant borné, à en faire imprimer à ses frais, en 1829, à Florence, un petit nombre d'exemplaires, destinés uniquement à être distribués à quelques amis; que l'auteur a bien voulu permettre la réimpression dans ce journal de ces excellents morceaux; que d'autres mémoires inédits suivraient, et que, lorsqu'on serait arrivé à ces mémoires inédits, on en avertirait les lecteurs.

Les mémoires No. 7., 15. et 25. tome 7., No. 3. tome 9. continué sous les numéro 14. et 20. du même tome, puis le mémoire No. 21. tome 9., et enfin le mémoire No. 26. tome 9. sont ceux qui ont été imprimés autrefois à Florence, et réimprimés dans ce journal. Le présent mémoire, qui était resté inédit jusqu'à ce jour, s'imprime ici pour la première fois; il en sera de même des mémoires de Mr. G. Libri qu'on trouvera dans la suite. Note de l'éditeur.

est toujours resté dans les Archives de l'Institut, et doit paraître dans le Recueil des *Savans Etrangers* *).

L'illustre Abel, dont les géomètres regretteront toujours la perte prématurée, publia en 1829 un travail très-remarquable sur une classe d'équations résolubles algébriquement, mais il périt avant d'avoir pu appliquer son analyse aux belles formules qu'il avait déjà données pour la multiplication des fonctions elliptiques. Il est inutile de dire qu'Abel ne connaissait pas les recherches que j'avais faites précédemment sur le même sujet. Son génie n'avait pas besoin de connaître les idées des autres, pour

---

*) La résolution des équations à deux termes que j'avais trouvée en 1825, a paru dans un mémoire précédent *sur la théorie des nombres*. Quant à la multisection de la Lemniscate, voici un passage que Mr. Arago a bien voulu extraire de mon mémoire de 1825: passage qui prouve que à cette époque j'avais déjà résolu la classe d'équations dont je publie maintenant la résolution.

„*Institut de France; Académie Royale des sciences.*"

„Le sécrétaire perpétuel de l'Académie pour les sciences mathématiques certifie „que ce qui suit est extrait du mémoire que Mr. Guillaume Libri a présenté à „l'Académie, le 13. Juin 1825, *sur la théorie des nombres.*"

„Soit proposée l'équation $x^n - 1 = 0$, et soit s une racine primitive du nombre „premier n; si l'on exprime par r_1, r_2, ... r_{n-1}, les $n-1$ racines de l'équation „$\frac{x^n-1}{x-1} = 0$, il est clair qu'on aura

$$„r_2 = r_1^s, \quad r_3 = r_2^s, \quad r_4 = r_3^s, \quad \text{etc.};$$

„maintenant si l'on suppose que l'équation $x^m + a_1 x^{m-1} \ldots + a_m = 0$ a les m ra„cines r_1, r_2, ... r_m telles, qu'en exprimant par $\varphi(y)$ une fonction rationnelle „quelconque de y, on ait toujours

$$„r_2 = \varphi(r_1), \quad r_3 = \varphi(r_2), \quad r_4 = \varphi(r_3), \quad \text{etc.},$$

„on pourra encore résoudre complètement l'équation $x^m + a_1 x^{m-1} \ldots + a_m = 0$ „(lorsqu'elle n'a pas de facteurs rationnels) en employant la même méthode dont „Lagrange s'est servi (dans les notes de la IIe édition de la *Résolution des équa„tions numériques*) pour résoudre l'équation à deux termes."

„Certifié conforme
„à l'original déposé dans les archives.
J. Arago."

On verra dans la suite de ce mémoire, que c'est précisément par la méthode de Lagrange, que je résous les équations dont je m'occupe ici.

Paris le 7. Aout 1832.

Guillaume Libri.

Le rédacteur du présent journal a eu sous les yeux l'original du dit certificat, qui atteste que, dans les objets dont il s'agit, la priorité des idées appartient à Mr. Libri. D'un autre coté il a aussi la conviction la plus intime, fondée sur sa connaissance détaillée des travaux de Mr. Abel, que celui-ci n'a pas eu la moindre connaissance des travaux antérieurs de Mr. Libri sur les mêmes objets.

Note de l'éditeur.

faire des découvertes. D'ailleurs la diversité de nos méthodes montre assez que nous avons travaillé indépendamment l'un de l'autre.

A l'époque à laquelle j'ai entrepris premièrement ces recherches, on ne connaissait pas encore les nouvelles formules d'Abel pour la transformation des fonctions elliptiques. Je suis donc parti des équations, que Fagnani avait trouvées le premier et dont Euler s'était occupé sans pouvoir les résoudre, et qui servent à la multisection de la Lemniscate. J'ai montré que par la nature même de leur formation, ces équations sont décomposables en plusieurs facteurs rationnels, chacun desquels sert à la division de la Lemniscate en un nombre différent de parties; et j'ai prouvé que dans chaque facteur les racines ont entre elles un rapport donné. La multisection de la Lemniscate m'ayant conduit à considérer des équations dont les racines avaient entre elles un rapport donné, j'ai généralisé ensuite la question, et j'ai supposé que ce rapport était quelconque. A l'aide de la méthode par laquelle Lagrange avoit résolu, après Mr. Gauss, les équations à deux termes, je suis parvenu à résoudre complètement les équations dont toutes les racines peuvent s'exprimer rationnellement par une seule d'entre elles. Si les racines ont des rapports donnés entre elles, sans qu'on puisse cependant les ramener toutes à être des fonctions d'une seule, alors en général le degré de l'équation proposée pourra être abaissé. On doit observer qu'il n'est pas nécessaire que le rapport existant entre deux racines soit linéaire par rapport à une racine et rationnel par rapport à l'autre, comme Abel l'avait supposé. Ce rapport peut être aussi exprimé par une fonction irrationnelle des deux racines, et dans un grand nombre de cas la résolution s'effectuera de la même manière. Cette généralisation n'est pas une vaine spéculation; elle m'a été indiquée par la question speciale qui m'avait occupée d'abord. Car dans l'équation de Fagnani, les racines sont liées entre elles par une équation qui, quoique très simple, contient des radicaux. D'ailleurs de cette manière on parvient à résoudre une classe d'équations qui échappaient aux méthodes connues.

Dans le problème qui m'avait occupé d'abord (la multisection de la Lemniscate) c'est d'après les rapports existans entre les racines qu'on formait l'équation; mais ordinairement c'est l'équation qui est donnée, sans que l'on sache s'il existe des rapports entre les racines. Il était donc nécessaire de pouvoir reconnaître *a priori* l'existence de ces rapports, d'après la forme et les valeurs des coefficiens de l'équation proposée. J'ai

cherché, par conséquent, pour chaque degré, quelles étaient les équations qui admettaient des rapports rationnels entre leurs racines: et j'ai déterminé les conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficiens de ces équations afin qu'elles soient résolubles par les principes précédens. Ces conditions sont exprimées par des équations indéterminées qu'il s'agit de résoudre en nombres entiers. On voit que la détermination de ces conditions complète la théorie qu'Abel a publiée: car il n'avoit fait qu'indiquer une propriété des racines qui rendait résolubles les équations dans lesquelles elle se trouvait, mais (pour compléter la résolution de cette question) il fallait déterminer *vice versa*, quelles étoient les équations dont les racines jouissaient de cette propriété; et c'est ce que j'ai fait dans ce mémoire.

Les racines des équations, dont les coefficiens sont des nombres rationnels, doivent avoir de tels rapports entre elles, qu'en les élevant toutes à une même puissance quelconque, leur somme soit toujours une quantité rationnelle. On peut satisfaire à cette condition de différentes manières: en les discutant successivement, je trouve la résolution d'une classe assez générale d'équations algébriques, et plusieurs théorèmes nouveaux sur la comparaison des diverses puissances des racines irrationnelles des équations. Puis j'indique les conditions auxquelles les coefficiens d'une équation numérique doivent satisfaire, afin que ses racines puissent être déterminées à l'aide d'autres équations de degrés moins élevés. La recherche de ces conditions conduit encore à des problèmes d'analyse indéterminée.

Dans la seconde partie de ce mémoire, je considère les intégrales particulières des équations différentielles linéaires, comme des quantités analogues aux racines des équations algébriques, et j'en déduis une démonstration fort simple du Theorème de Lagrange. Je donne une formule générale pour exprimer l'intégrale d'une équation différentielle linéaire (dont le dernier terme est une fonction de x) en fonction de ce dernier terme, et des intégrales particulières qu'aurait cette même équation, si son dernier terme était égal à zéro. Cette formule me parait utile pour obtenir l'intégrale cherchée sans effectuer les nombreuses éliminations successives qu'exige la variation des constantes arbitraires. Je montre ensuite comment on peut exprimer les coefficiens d'une équation différentielle linéaire en fonction de ses intégrales particulières, et je trouve des théo-

rèmes analogues à ceux qui ont été donnés par Newton sur les rapports qui existent entre les coefficiens et les racines d'une équation algébrique. Enfin je fais voir comment on peut intégrer, ou réduire au moins à des équations d'ordre moins élevé, les équations différentielles dont les intégrales particulières ont entre elles des rapports donnés. Ces considérations trouvent une application importante dans l'analyse de l'action réciproque des corps semblables, soumis à des forces de la même nature; et spécialement dans l'action mutuelle des corps échauffés.

J'avais eu l'intention d'ajouter ici une troisième partie, contenant l'application des mêmes principes aux équations indéterminées; mais comme ces recherches exigent de longs développemens, je réserverai pour un autre mémoire cette partie de mon travail.

Premier article.

Equations algébriques.

Etant donnée une Lemniscate, on sait *) que pour la diviser en cinq parties égales, on devra résoudre l'équation qui résultera de l'élimination d'une des inconnues, entre les deux équations

$$1.\quad u = \frac{2z\sqrt{(1-z^4)}}{1+z^4};\quad z = \frac{2u\sqrt{(1-u^4)}}{1+u^4}.$$

En effectuant l'élimination et chassant les radicaux, on trouvera l'équation

$$Z = (z^{16}+20z^{12}-26z^8+20z^4+1)^2+$$
$$16(z^{28}-11z^{24}+25z^{20}+37z^{16}-37z^{12}-25z^8+11z^4-1) = 0,$$

qui peut se réduire au huitième degré, en fesant $z^4 = v$.

Si l'on voulait diviser l'arc de la Lemniscate en un nombre 2^n+1 de parties égales, on aurait à résoudre une équation en z, qui résulterait de l'élimination des inconnues entre les équations

$$2.\quad z_1 = \frac{2z_2\sqrt{(1-z_2^4)}}{1+z_2^4},\quad z_2 = \frac{2z_3\sqrt{(1-z_3^4)}}{1+z_3^4},\quad \ldots\ldots z_n = \frac{2z_1\sqrt{(1-z_1^4)}}{1+z_1^4}.$$

On peut satisfaire aux deux équations (1.) en fesant $z^4 = \pm u^4$, et on tirera de cette supposition les deux facteurs

$$(1+z^4)^2-4(1-z^4) = 0;\quad z^8-2z^4+5 = 0;$$

---

*) Fagnani, *produzioni matematiche.* 1750. 2 *Vol. in 4to. Tom.* 1. *p.* 363.

qui diviseront l'équation $Z = 0$, laquelle prendra la forme

$$Z = (z^3 - 2z^4 + 5)(z^8 + 6z^4 - 3)(z^{16} + 52z^{12} - 26z^8 - 12z^4 + 1) = 0.$$

Nous avons obtenu l'équation $Z = 0$, en éliminant u entre les deux équations (1.), mais on aurait obtenu une équation de la même forme en u si l'on avait éliminé z entre ces mêmes équations (1.). Il résulte de là que les racines de l'équation en u devront être égales aux racines de l'équation en z, et que si l'équation $Z = 0$ a une racine $z^4 = r^4$, elle en devra avoir aussi une autre de la forme $\frac{16r^4(1-r^4)^2}{(1+r^4)^4}$. Lorsqu'on suppose que cette seconde racine soit égale à la première, on a l'équation

$$(1+r^4)^4 - 16(1-r^4)^2,$$

qui donne les deux facteurs du huitième degré que nous avons déjà trouvés. Mais si l'on suppose qu'elle est différente de la première, alors on a le rapport

$$r_2^4 = \frac{16r_1^4(1-r_1^4)^2}{1+r_1^4)^4},$$

qui doit exister entre deux racines $z = r_2$, $z = r_1$ du facteur

$$z^{16} + 52z^{12} - 26z^8 - 12z^4 + 1 = 0.$$

En général on voit comment on peut appliquer les mêmes principes aux équations (2.) qui donnent la division de la Lemniscate en 2^n+1 parties égales.

Si au lieu des équations

$$z = \frac{2u\sqrt{(1-u^4)}}{1+u^4}, \quad u = \frac{2z\sqrt{(1-z^4)}}{1+z^4},$$

on considère en général les deux équations simultanées

$$z = \varphi(x), \quad x = \varphi(z),$$

on aura en éliminant:

$$z = \varphi(\varphi(z)), \quad x = \varphi(\varphi(x));$$

et il est clair que l'on pourra faire $z = \varphi(z)$, $x = \varphi(x)$, et que l'on aura

$$\varphi(\varphi(z)) - z = (\varphi(z) - z)F_1(z) = 0,$$
$$\varphi(\varphi(x)) - x = (\varphi(x) - x)F_1(x) = 0.$$

Il faut observer ici que dans l'équation $F_1(z) = 0$, ou $F_1(x) = 0$, s'il y a une racine $z = r_1$, il y en aura toujours une autre $z = r_2$ de la forme $r_2 = \varphi(r_1)$.

Etant données les deux équations

$$z = \varphi(x), \quad x = F(z),$$

si l'on a en général $\varphi(F(x)) = F(\varphi(x))$, on aura d'abord les deux équations $z = \varphi(x)$, $z = F(z)$, qui devront diviser l'équation $z = \varphi(F(z))$, et

puis l'équation
$$\frac{\varphi(F(z))-z}{(\varphi(z)-z)(F(z)-z)}=0$$
sera telle qu'étant donnée une racine $z=r_1$, il y en aura toujours une autre $\partial z=r_2$ telle qu'on ait $r_2=\varphi(r_1)$, et une troisième $z=r_3$ qui donnera $r_3=F(r_1)$.

Si l'on avait les deux équations $\Phi(x,y)=0$, $\Phi(y,x)=0$, on en déduirait deux équations de la forme $y=\psi(x)$, $x=\psi(y)$, et on serait dans le cas que nous avons déjà considéré.

Il faut observer que tout ce que nous venons de dire, est vrai quelle que soit la forme des fonctions Φ et F.

Maintenant nous allons voir comment on peut résoudre l'équation $F_1(x)=0$.

Lagrange a démontré*), que si l'on représente par $x_1, x_2 \ldots . x_m$, les m racines de l'équation
$$X=x^m+\alpha_1 x^{m-1}\ldots . +\alpha_m=0,$$
et par $1, \alpha, \alpha^2, \ldots . \alpha^{m-1}$, les m racines de l'équation $y^m-1=0$, on pourra exprimer les racines de $X=0$, de la manière suivante.

D'abord on considérera la fonction
$$t=x_1+\alpha x_2+\alpha^2 x_3\ldots . +\alpha^{m-1}x_m,$$
qui est une fonction invariable des quantités
$$\alpha^0 x_1,\ \alpha x_2,\ \alpha^2 x_3\ldots . \alpha^{m-1}x_m;$$
et dans laquelle, par conséquent, le résultat des permutations des racines $x_1, x_2, x_3, \ldots .$ etc. entre elles, sera le même que celui des puissances de α entre elles. La quantité t est ce que Lagrange appelle *la racine de l'équation résolvante.*

Il faut observer que αt sera le résultat des permutations simultanées de x_1 en x_2, de x_2 en $x_3, \ldots .$ et de x_m en x_1 à cause de $\alpha^m=1$. De même $\alpha^2 t$ sera le résultat des permutations simultanées de x_1 en x_3, de x_2 en x_4, et ainsi de suite. Donc si t est une racine de l'équation résolvante, les produits $\alpha t, \alpha^2 t, \alpha^3 t, \ldots . \alpha^{m-1}t$, seront aussi des racines de la même équation. Par conséquent une équation de la forme
$$F=t^p+A_1 t^{p-1}\ldots . +A_p=0,$$
dont les racines fournissent les valeurs de t, ne devra pas changer en y

*) Mémoires de Berlin pour lannée 1770. Traité de la résolution des équations numériques 2de édition. Note 12.

changeant t en αt, t en $\alpha^2 t$, t en $\alpha^3 t$, et ainsi de suite. D'où il est facile de conclure qu'elle ne devra contenir que des puissances de t dont les exposans soient multiples de m, à cause de $\alpha^m = 1$. Par conséquent si dans l'équation $F = 0$, on fait $t^m = \theta$, on aura une équation en θ, dont les racines seront les différentes valeurs de θ résultantes des permutations des racines $x_2, x_3, \ldots, x_m$, entre elles. Maintenant à cause de $\alpha^m = \alpha^{2m} \ldots = 1$, l'expression de θ sera de la forme

$$\theta = \xi_0 + \alpha\xi_1 + \alpha^2\xi_2 \ldots + \alpha^{m-1}\xi_{m-1}$$

dans laquelle les quantités $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ etc., seront des fonctions inconnues de $x_1, x_2, x_3, \ldots$ etc. qui auront en général la propriété d'être invariables pour les permutations simultanées de x_1 en x_2, de x_2 en x_3, et de x_m en x_1; puis de x_1 en x_3, de x_2 en x_4 et ainsi de suite.

Les quantités ξ_0, ξ_1, ξ_2, etc. étant connues, on aurait tout de suite les valeurs de x_1, x_2, x_3, etc. Car puisque $\theta = t^m$, on a $t = \sqrt[m]{\theta}$, et si on dénote par $1, \alpha, \beta, \gamma$, etc. les racines de l'équation $y^m - 1 = 0$, et que l'on représente par $\theta_0, \theta_1, \theta_2$, etc. les valeurs de θ qui répondent à la substitution successive de $1, \alpha, \beta, \gamma$, etc. à la place de α dans la valeur de θ, on aura (à cause de $t = x_1 + \alpha x_2, \ldots + \alpha^{m-1}x_m$) les équations suivantes

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \ldots + x_m &= \sqrt[m]{\theta_0}, \\ x_1 + \alpha x_2 + \alpha_2 x_3 \ldots + \alpha_{m-1} x_m &= \sqrt[m]{\theta_1}, \\ x_1 + \beta x_2 + \beta_2 x_3 \ldots + \beta_{m-1} x_m &= \sqrt[m]{\theta_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots \text{ etc.} \end{aligned}$$

qui par addition donneront

$$x_1 = \frac{\sqrt[m]{\theta_0} + \sqrt[m]{\theta_1} + \sqrt[m]{\theta_2} \ldots + \sqrt[m]{\theta_{m-1}}}{m},$$

et par suite on obtiendra les autres racines.

Maintenant soit proposé de résoudre l'équation

$$X_1 = \frac{x^{m+1} - 1}{x - 1} = x^m + x^{m-1} \ldots + x + 1 = 0,$$

du degré m, en supposant que $m + 1$ soit un nombre premier. Si l'on représente par r l'une des racines de cette équation et par a l'une des racines primitives du nombre premier $m + 1$, il est clair que toutes les racines de l'équation $X_1 = 0$ seront exprimées par les quantités

$$r, r^a, r^{a^2} \ldots r^{a^{m-1}};$$

et si l'on compare l'équation $X_1 = 0$, à l'équation $X = 0$, que nous avons considérée précédemment, on devra, dans la valeur de

$$t = x_1 + \alpha x_2 \dots + \alpha^{m-1} x_m,$$

substituer r au lieu de x_1, r^a au lieu de x_2, r^{a^2} au lieu de x_3, et ainsi de suite, et l'on aura

$$t = r + \alpha r^a + \alpha^2 r^{a^2} \dots + \alpha^{m-1} r^{a^{m-1}},$$

α étant l'une des racines de l'équation $y^m - 1 = 0$.

A présent si l'on fait $\theta = t^m$, et que dans le developpement de t^m on rabaisse les puissances de α et de r au dessous de α^m et de r^{m+1} par les équations $\alpha^m = 1$, $r^{m+1} = 1$, en ordonnant θ par les puissances ascendantes de α, on aura l'équation

$$\theta = t^m = \xi_0 + \alpha \xi_1 + \alpha^2 \xi_2 \dots + \alpha^{m-1} \xi_{m-1},$$

dans laquelle les quantités ξ_0, ξ_1, ξ_2, etc. seront des fonctions rationnelles et entières de r telles qu'elles ne changeront pas par la substitution de r^a à la place de r, de r^{a^2} à la place de r^a, de r^{a^3} à la place de r^{a^2}, et ainsi de suite; ou bien (ce qui est la même chose) d'abord par la substitution de r^a à la place de r, et puis par celle de r^{a^2} à la place de r et ainsi de suite.

Maintenant, toute fonction rationnelle et entière de r dans laquelle $r^{m+1} = 1$, peut toujours se réduire à la forme

$$A + Br + Cr^2 \dots + Nr^m,$$

(les quantités A, B, C, ... N, étant des nombres donnés indépendans de r); mais comme les puissances r, r^2, ... r^m, peuvent être représentées, dans le cas actuel, par les puissances r, r^a, r^{a^2}, etc. (quoique dans un autre ordre), il en résulte que toute fonction ξ, rationnelle et entière de r, pourra se réduire à la forme

$$\xi = A + Br + Cr^a \dots + Nr^{a^{m-1}},$$

en prenant pour A, B, C, ... N, des coefficiens quelconques indépendans de r.

A présent si l'on suppose que la fonction ξ représente l'une quelconque des fonctions ξ_0, ξ_1, ξ_2, etc. comprise dans la valeur de θ, on sait qu'elle doit rester la même en y substituant r^a à la place de r; et il faudra que l'on ait (en opérant cette substitution):

$$\xi = A + Br^a + Cr^{a^2} \dots + Nr,$$

d'où l'on déduira

$$B = C, \ C = D, \ D = E, \dots N = B,$$

et par suite

$$\xi = A + B(r + r^a + r^{a^2} \dots + r^{a^{m-1}})$$

et enfin

$$\xi = A + B(r + r^2 \dots + r^m) = A + Bs,$$

(en appelant s la somme des racines de l'équation $x^m + x^{m-1} \dots$ $\dots + x + 1 = 0$), ce qui donnera $s = -1$; et les quantités ξ_0, ξ_1, ξ_2, etc. qui entrent dans la valeur de θ seront toutes de la forme $A + Bs = A - B$.

Les coefficiens A et B se déterminent par le développement actuel de la fonction $\theta = t^m$, et puisque les quantités ξ_0, ξ_1, ξ_2, etc. comprises dans la fonction θ, sont toutes de la forme $A - B$, elles seront toutes connues immédiatement sans dépendre d'aucune équation (exceptée l'équation $y^m - 1 = 0$, qui est semblable à l'équation proposée, mais de degré inférieur). De sorte qu'en indiquant par 1, α, β, γ, etc. les racines de l'équation $y^m - 1 = 0$, et par θ_0, θ_1, θ_2, etc. les valeurs de θ qui répondent à la substitution de ces racines à la place de α, on obtiendra

$$r = \frac{\sqrt[m]{\theta_0} + \sqrt[m]{\theta_1} + \sqrt[m]{\theta_2} \dots + \sqrt[m]{\theta_{m-1}}}{m}.$$

Ayant trouvé la valeur de la racine r, on aura toutes les autres par les puissances r^a, a^{a^2}, $\dots$ $r^{a^{m-1}}$, et l'équation $x^{m+1} - 1 = 0$, sera résolue complètement à l'aide de l'équation $y^m - 1 = 0$.

En représentant par r_1, r_2, r_3, $\dots$ r_m, les m racines de l'équation

$$x^m + x^{m-1} \dots + x^2 + x + 1 = 0,$$

on a vu qu'elles pouvaient toutes se représenter par la série

$$r_1, \; r_1^a, \; r_1^{a^2}, \; \dots \; r_1^{a^{m-1}},$$

dans laquelle a est une racine primitive du nombre premier $m+1$, on aura par conséquent

$$r_2 = r_1^a, \; r_3 = r_2^a, \; \dots \; r_1 = r_m^a;$$

et on a montré comment l'on pouvait trouver toutes ces racines. A présent si en généralisant cette question, on suppose qu'étant proposée l'équation

$$F(x) = X_2 = x^m + a_1 x^{m-1} \dots + a_m = 0,$$

(qui n'a point de facteur rationnel) et qu'en indiquant ses racines par r_1, r_2, $\dots$ r_m, elles soient liées entre elles par les équations

$$r_2 = \varphi(r_1), \; r_3 = \varphi(r_2), \dots r_m = \varphi(r_{m-1}), \; r_1 = \varphi(r_m),$$

dans lesquelles $\varphi(r_s)$ exprime en général une fonction rationnelle et entière de r_s, nous allons voir que par une méthode analogue à celle dont Lagrange s'est servi pour résoudre l'équation $x^m + x^{m-1} \dots + x + 1 = 0$,

et que nous venons d'exposer, on pourra trouver toutes les racines de l'équation

$$F(x) = 0.$$

En effet si l'on répète le raisonnement dont nous nous sommes servis pour la résolution de l'équation $x^m + x^{m-1} \ldots + x + 1 = 0$, on trouvera que la fonction

$$t = x_1 + \alpha x_2 \ldots + \alpha^{m-1} x_m$$

deviendra (pour le cas de l'équation $X_2 = 0$) de la forme suivante:

$$t = r_1 + \alpha \varphi(r_1) + \alpha^2 \varphi(\varphi(r_1)) \ldots + \alpha^{m-1} \varphi(\varphi(\ldots \varphi(r_1)) \ldots),$$

et si l'on fait pour abreger

$$\varphi(r_1) = \varphi_1(r_1), \quad \varphi(\varphi(r_1)) = \varphi_2(r_1), \quad \varphi(\varphi(\varphi(r_1))) = \varphi_3(r_1),$$

et ainsi de suite, on trouvera

$$t = r_1 + \alpha \varphi_1(r_1) + \alpha^2 \varphi_2(r_1) \ldots + \alpha^{m-1} \varphi_{m-1}(r_1),$$

α étant l'une des racines de l'équation $y^m - 1 = 0$, qui est toujours résoluble d'après ce qui précède.

Maintenant si l'on fait $\theta = t^m$, et que dans le développement de t^m on rabaisse les puissances de α au dessous de α^m, et les puissances de r_1 au dessous de r_1^m, à l'aide des deux équations $\alpha^m = 1$, $F(r_1) = 0$; on aura, en ordonnant θ par les puissances ascendantes de α, l'équation

$$\theta = t^m = \xi_0 + \alpha \xi_1 + \alpha^2 \xi_2 \ldots + \alpha^{m-1} \xi_{m-1},$$

dans laquelle les quantités $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{m-1}$, seront des fonctions rationnelles et entières de r_1 telles qu'elles ne changeront pas par la substitution de $\varphi_1(r_1)$ à la place de r_1, de $\varphi_2(r_1)$ à la place de $\varphi_1(r_1)$, de $\varphi_3(r_1)$ à la place $\varphi_2(r_1)$, et ainsi de suite; ou bien en général on pourra dire que ces fonctions ne changeront pas par la substitution complète de $\varphi_1(r_1)$ à la place de φr_1, et qu'elles ne changeront pas non plus en mettant $\varphi_2(r_1)$, ou $\varphi_3(r_1)$, à la place de r_1 et ainsi de suite.

A présent, à cause de l'équation $F(r_1) = 0$, il est évident que d'une fonction rationnelle et entière de r_1 quelconque, on peut toujours éliminer toutes les puissances de r_1 supérieures à r_1^m, et qu'elle pourra se réduire à la forme

$$A + Br_1 + Cr_1^2 \ldots + Nr_1^m;$$

on aura pas conséquent les équations

$$r_2 = \varphi_1(r_1) = A_1 + B_1 r_1 + C_1 r^2 \ldots + N_1 r_1^m,$$
$$r_3 = \varphi_2(r_1) = A_2 + B_2 r_1 + C_2 r^2 \ldots + N_2 r_1^m,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r_1 = \varphi_m(r_1) = A_m + B_m r_1 + C_m r^2 \ldots + N_m r_1^m.$$

Mais comme toutes les racines r_1, r_2, r_3, etc., sont inégales, puisque par hypothèse l'équation $X_2=0$, n'a point de facteur rationnel, on ne pourra pas avoir deux de ces équations dont les coefficiens soient égaux. Alors en considérant chacune des puissances r_1, r_1^2, r_1^3, ... r_1^m, comme des inconnues différentes, dans les équations précédentes, il est clair que par l'élimination on obtiendra

$$r_1 = A_1 + B_1\varphi_1(r_1) + C_1\varphi_2(r_1) \ldots\ldots + N_1\varphi_m(r_1),$$
$$r_1^2 = A_2 + B_2\varphi_1(r_1) + C_2\varphi_2(r_1) \ldots\ldots + N_2\varphi_m(r_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et par conséquent toute fonction ξ rationnelle et entière de r_1 pourra s'exprimer de cette manière:

$$\xi = t + t_1\varphi_1(r_1) + t_2\varphi_2(r_1) \ldots\ldots + t_m\varphi_m(r_1).$$

Si au lieu de la fonction ξ on prend une quelconque des fonctions ξ_0, $\xi_1 \ldots\ldots \xi^{m-1}$, qui doivent rester les mêmes en changeant r_1 en $\varphi_1(r_1)$, on trouvera les deux équations

$$\xi_0 = t + t_1\varphi_1(r_1) + t_2\varphi_2(r_1) \ldots\ldots + t_m\varphi_m(r_1),$$
$$\xi_0 = t + t_1\varphi_2(r_1) + t_2\varphi_3(r_1) \ldots\ldots + t_m\varphi_1(r_1),$$

d'où il résulte $t_1=t_m$, $t_2=t_3$, etc. et par suite

$$\xi_0 = t + t_1(\varphi_1(r_1) + \varphi_2(r_1) \ldots\ldots + \varphi_m(r_1)) = t - t_1 a_1,$$

car $(\varphi(r_1) + \varphi_2(r_1) \ldots\ldots + \varphi_m(r_1))$ exprime la somme des racines de l'équation $X_2=0$, et par conséquent est égale à $-a_1$. On trouvera de même pour ξ_1, ξ_2, etc. des valeurs semblables; et l'on aura les valeurs de $t-t_1a_1$ par le développement actuel de la fonction $\theta=t^m$. Maintenant si l'on appelle 1, α, β, γ, etc. les racines de l'équation $y^m-1=0$, et par θ_0, θ_1, θ_2, etc., les valeurs de θ qui répondent à la substitution de ces valeurs à la place de α, on aurra

$$r_1 = \frac{\sqrt[m]{\theta_0} + \sqrt[m]{\theta_1} \ldots\ldots + \sqrt[m]{\theta_{m-1}}}{m},$$

et l'équation $X_2=0$, sera complètement résolue, car toutes les autres racines se déduiront de celle-ci à l'aide des équations $r_2=\varphi_1(r_1)$, $r_3=\varphi_2(r_1)$, etc.

Nous avons supposé que toutes les racines de l'équation $X_2=0$ étaient liées entre elles par un même équation $r_2=\varphi(r_1)$, $r_3=\varphi(r_2)$ etc. Mais si cette condition n'était pas remplie, et que cette relation n'existât qu'entre quelques unes de ces racines seulement, l'équation proposée aurait

un facteur rationnel, qu'on pourrait trouver aisément en cherchant une transformée $X_3 = 0$ telle que ses racines fussent des fonctions φ des racines de l'équation $X_2 = 0$. Car il est clair qu'en cherchant le plus grand commun diviseur $\Delta = 0$, entre $X_2 = 0$, et $X_3 = 0$, l'équation $\Delta = 0$ ne contiendrait que les racines liées entre elles par le rapport $r_2 = \varphi(r_1)$, $r_3 = \varphi(r_2)$, etc., et pourrait se résoudre complètement par la méthode précédente. En général si toutes les racines d'une équation algébrique peuvent être exprimées rationnellement par l'une d'elle, de manière qu'on ait, par exemple:

$$\begin{array}{ll} r_2 = \varphi(r_1), & r_3 = \varphi(r_2) \ldots . \\ r_s = f(r_1), & r_{s+1} = f(r_s) \ldots . \\ r_t = \psi(r_1), & r_{t+1} = \psi(r_t) \ldots . \\ \ldots & \ldots \end{array}$$

on pourra toujours décomposer l'équation proposée en autant de facteurs rationnels qu'il y a de fonctions φ, f, ψ, etc., à l'aide d'une équation dont le degré sera égal au moindre nombre de racines qui entre dans une des periodes

$$\begin{array}{l} r_2, r_3, \text{ etc.} \\ r_s, r_{s+1}, \text{ etc.} \\ r_t, r_{t+1}, \text{ etc.,} \end{array}$$

que nous venons de trouver.

Soit $X_n = 0$, une équation du degré $n = mp$, et soient

$$\begin{array}{l} r_1, r_2, r_3, \ldots . r_m, \\ r_{m+1}, r_{m+2}, r_{m+3}, \ldots . r_{2m}, \\ \ldots \ldots \text{ etc.,} \end{array}$$

ses racines, de manière que l'on ait

$$r_2 = \varphi_1(r_1),\ r_3 = \varphi_1(r_2) = \varphi_2(r_1),\ \ldots .\ r_m = \varphi_1(r_{m-1}) = \varphi_m(r_1),\ r_1 = \varphi(r_m),$$
$$r_{m+2} = \varphi_1(r_{m+1});\ r_{m+3} = \varphi_1(r_{m+2}),\ \ldots . \text{ etc.}$$

(en exprimant toujours par φ_1 une fonction rationelle et entière) mais de sorte qu'aucune équation semblable ne puisse exister entre les racines des différens groupes. Alors on cherchera une transformée $X_r = 0$, telle que les racines soient égales à la somme des racines de $X_n = 0$, prises m à la fois. Et en même tems on cherchera une autre transformée $X_t = 0$, telle que si l'on fait

$$\varphi_1(y) + \varphi_2(y) + \varphi_3(y) \ldots . + \varphi_m(y) = F(y),$$

les racines de $X_t = 0$ soient une fonction F des racines de l'équation $X_n = 0$. Les deux équations $X_r = 0$, $X_t = 0$, auront un facteur com-

mun D du degré p, et en fesant $D=0$, les racines de $D=0$ fourniront la résolution complète de $X_n=0$. Car à l'aide des racines de $D=0$, on pourra décomposer l'équation $X_n=0$, en p équations du degré m, qui auront pour racines

$$\begin{array}{lllll} r_1, & \varphi_1(r_1), & \varphi_2(r_1), & \ldots\ldots & \varphi_{m-1}(r_1), \\ r_{m+1}, & \varphi_1(r_{m+1}), & \varphi_2(r_{m+1}), & \ldots\ldots & \varphi_{m-1}(r_{m+1}), \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

et ces équations pourront être résolues de la même manière que l'équation $X_2=0$ que nous avons considéré précédemment.

Si dans l'équation que nous venons de résoudre, les périodes des racines n'étaient pas toutes composées d'un même nombre de m termes, l'équation proposée aurait des facteurs rationnels qu'on pourrait trouver séparément.

L'analyse précédente montre comment l'on peut résoudre les équations qui résultent de l'élimination des inconnues entre les deux équations $\Phi(x,y)=0$, $\Phi(y,x)=0$, et on déduit de la même analyse la résolution complète des équations (2.) (que nous avons considérées au commencement de ce mémoire) desquelles dépend la division en parties égales de l'arc de la Lemniscate.

Nous avons supposé dans tout ce qui précède, que la fonction φ ou Φ_1 qui exprime le rapport entre deux racines, est une fonction *entière;* mais si elle était fractionnaire, on pourrait (pourvu qu'elle restât rationnelle) la réduire toujours à une fonction entière, en multipliant le numérateur et le dénominateur par un polynome convenable *).

Nous avons vu que si $x-r_1$ et $x-\varphi(r_1)$ divisent l'équation

$$X_n = x^n + a_1 x^{n-1} \ldots\ldots + a_n = 0,$$

sa résolution se réduira à celle d'équations de degré moins élevé. Maintenant supposons que l'équation $X_n=0$, ayant une racine $x=r_1$, ait aussi un diviseur de la forme

$$x^m + F_1(r_1)x^{m-1} + F_2(r_1)x^{m-2} \ldots\ldots + F_m(r_1) = 0,$$

(les fonctions $F_1, F_2, \ldots\ldots F_m$ étant des fonctions rationnelles et entières de r_1), et supposons encore que l'on ait $n=ma$, et que l'on puisse diviser l'équation $X_n=0$ (du degré n), en a facteurs semblables de la forme

---

*) Lagrange, résolution des équations numériques 2de, édition p. 216.

$$x^m + F_1(r_1)x^{m-1} \ldots\ldots + F_m(r_1) = 0,$$
$$x^m + F_1(r_2)x^{m-1} \ldots\ldots + F_m(r_2) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x^m + F_1(r_a)x^{m-1} \ldots\ldots + F_m(r_a) = 0,$$

dans lesquels les quantités $r_1, r_2, \ldots\ldots r_a$, sont des racines de l'équation $X_n = 0$: si l'on cherche une transformée $X_1 = 0$, telle que ses racines soient des fonctions F_m des racines de l'équation $X_n = 0$; et si en fesant

$$\psi(r_1 r_1) = r^m + F_1(r_1)r^{m-1} \ldots\ldots + F_m(r_1) - F_m(r_1),$$

on cherche une autre transformée $X_2 = 0$, telle que ses racines soient des fonctions ψ de deux racines quelconques de l'équation proposée, et en cherchant le plus grand commun diviseur entre $X_1 = 0$ et $X_2 = 0$, on auroit le facteur commun $\Delta = 0$, dont les racines seraient successivement

$$F_m(r_1),\ F_m(r_2),\ \ldots\ldots F_m(r_a),$$

et qui serviraient à découvrir les valeurs de $r_1, r_2, \ldots\ldots r_a$ par le moyen d'équations de degré moindre que l'équation $X_n = 0$. Car l'équation $\Delta = 0$, est de degré inférieur à l'équation proposée, et la fonction $F_m(r_1)$ peut se réduire toujours à ne contenir que des puissances de r_1 moindres que r_1^n, à l'aide de l'équation $r_1^n + a_1 r^{n-1} \ldots\ldots + a_n = 0$.

Si l'équation $X_n = 0$, n'était pas décomposable entièrement en facteurs de la forme

$$x^m + F_1(r_1)x^{m-1} \ldots\ldots + F_m(r_1),$$

on procéderait encore de la même manière, et l'équation $\Delta = 0$, serait toujours d'un degré égal au nombre des facteurs semblables par lesquels elle pourrait être divisée. Si $F_m(r_1)$ était une constante indépendante de r_1, on fera $x = x_1 + a$ dans le facteur

$$x^m + F_1(r_1)x^{m-1} \ldots\ldots + F_m(r_1) = 0,$$

et on déterminera a de manière que le dernier terme contienne r_1.

En résolvant l'équation

$$x^m + F_1(r_1)x^{m-1} \ldots\ldots + F_m(r_1) = 0$$

(dont nous appellerons les racines $x = s_1, s_2, \ldots\ldots s_m$), on trouve en général $s_1 = f(r_1)$; et comme en général f est une fonction irrationnelle, on voit qu'on peut résoudre aussi des équations dont deux racines ont une relation irrationelle entre elles.

Etant donnée une équation $X_n = 0$, du degré n, qui n'ait pas de facteurs rationnels, on pourra toujours supposer que les coefficiens de cette équation soient des nombres entiers; car s'ils étaient fractionnaires ou

irrationnels, on pourrait toujours les réduire entiers. Dans les problèmes algébriques ce n'est que très rarément que l'on connait les relations qui doivent exister entre les racines; et même l'on ne sait pas si ces relations existent: mais l'on connait seulement les coefficiens et le degré de l'équation. Pour s'assurer si les méthodes précédentes peuvent s'appliquer à l'équation $X_n = f(x) = 0$, que nous considérons, on supposera que, r_1 et r_2 étant deux racines de cette équation, l'on ait

$$\Phi(r_1, r_2) = a_{n-1} r_1^{n-1} + a_{n-2} r_1^{n-2} \ldots + a_1 r_1 + a_0 = 0,$$

les coefficiens $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$, étant donnés par des équations de la forme

$$a_{n-1} = b_0 + b_1 r_2 \ldots + b_{n-1} r_2^{n-1},$$
$$a_{n-2} = c_0 + c_1 r_2 \ldots + c_{n-1} r_2^{n-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dans les équations précédentes les plus grandes puissances de r_1 et r_2 seront r_1^{n-1} et r_2^{n-1}; car s'il y en avait de plus élevées, on les abaisserait à l'aide des équations $f(r_1) = 0$, $f(r_2) = 0$, qui résultent de l'équation $f(x) = 0$.

Les coefficiens

$$b_0, b_1, \ldots b_{n-1},$$
$$c_0, c_1, \ldots c_{n-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

peuvent toujours être supposés des nombres rationnels: car s'ils étaient irrationnels, on les rendrait rationnels par des élévations à puissance et par d'autres moyens connus; et après avoir effectué les opérations nécessaires on pourrait encore, dans l'équation $\Phi(r_1, r_2) = 0$, réduire les plus grandes puissances de r_1 et de r_2, à être moindres que r_1^n et r_2^n, à l'aide des équations $f(r_1) = 0$, $f(r_2) = 0$. D'où il résulte enfin que l'équation $\Phi(r_1, r_2) = 0$, ne peut contenir tout au plus que un nombre n^2 de termes.

Maintenant si on élimine r_1 entre $f(r_1) = 0$, et $\Phi(r_1, r_2) = 0$, on trouvera une équation de la forme

$$\psi(r_2, a_0, a_1 \ldots\ldots a_{n-1}) = 0,$$

qui, à l'aide de l'équation $f(r_2) = 0$, pourra se réduire à la forme

$$f_1(r_2) = B_{n-1} r_2^{n-1} + B_{n-2} r_2^{n-2} \ldots + B_1 r_2 + B_0 = 0,$$

et on cherchera pour B_0, B_1, B_1, ... B_{n-1}, les valeurs rationnelles qui permettent aux deux équations $f_1(r_2) = 0$, $f(r_2) = 0$, d'exister ensemble, et d'avoir un facteur commun.

Les valeurs rationnelles de $B_0, B_1, \ldots B_{n-1}$, serviront à déterminer les valeurs également rationnelles d'a_0, a_1, a_{n-1}, et par suite à

trouver les valeurs également rationnelles de $b_0, b_1, \ldots. b_{n-1}$; $c_0, c_1, \ldots.$ $\ldots. c_{n-1}$; etc. On voit que cette détermination dépendra d'un problème d'analyse indéterminée.

Outre les équations dont nous venons de nous occuper, il y en a beaucoup d'autres qui peuvent être résolues, et que nous allons considérer maintenant.

Soit $X_n = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \ldots. + a_n = 0$, une équation du degré n à coefficiens rationnels; nommons $r_1, r_2, \ldots. r_n$ ses n racines et soit

$$S_1 = r_1 + r_2 \ldots. + r_n = \sum_{z=1}^{z=n+1} r_z,$$
$$S_2 = r_1^2 + r_2^2 \ldots. + r_n^2 = \sum_{z=1}^{z=n+1} r_z^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_m = r_1^m + r_2^m \ldots. + r_n^m = \sum_{z=1}^{z=n+1} r_z^m.$$

On sait d'abord que toutes les quantités $S_1, S_2, \ldots. S_m$, sont rationnelles; mais cela peut arriver de plusieurs manières. Si parmi les racines r_1, $r_2, \ldots. r_n$, il y en a de rationelles, on les trouvera séparement par des méthodes connues; ainsi nous ne considérons pas ce cas. Mais en supposant toutes les racines de l'équation $X_n = 0$, irrationnelles, la quantité S_1 peut être rationnelle de deux manières. D'abord on peut supposer que parmi ces racines, il y en a un nombre $p < n$, tel que tandis qu'elles sont toutes irrationnelles, leur somme soit une quantité rationnelle; et puis on peut supposer que cela est imposible lorsque $p < n$.

Dans le premier cas de $p < n$, on fera $r_1 + r_2 \ldots. r_p = R$, ($R$ étant une quantité rationnelle quelconque) et on cherchera une transformée $X_1 = 0$, de l'equation $X_n = 0$, telle que les racines de $X_1 = 0$ soient la somme des racines de $X_n = 0$, prises p a la fois; et il est clair que l'équation $X_1 = 0$ aura au moins une racine rationnelle R, que l'on pourra trouver directement. A présent on cherchera une seconde transformée $X_2 = 0$, telle que ses racines soient égales à R moins la somme de $p - 1$ des racines de l'équation $X_n = 0$, et il est clair qu'en cherchant le plus grand commun diviseur Δ entre $X_n = 0$, et $X_2 = 0$, l'équation $\Delta = 0$ sera du degré p et aura pour racines les quantités $r_1, r_2, \ldots. r_p$. D'où il résulte que dans ce premier cas, l'équation proposée aura un facteur rationnel du degré p que l'on savait déjà déterminer par les méthodes connues.

Si la somme $r_1 + r_2 \ldots + r_p$ est toujours une quantité irrationnelle lorsque $p < n$, les méthodes connues ne sont plus d'aucune utilité; mais il est clair que l'on pourra trouver encore la valeur de $r_1 + _2 \ldots + r_p$, lorsque $X_1 = 0$, au lieu d'avoir une racine rationnelle, a un facteur rationnel du second degré. Alors l'équation $X_n = 0$ pourra être décomposée en deux équations de degré moindre, à l'aide d'une équation de second degré. En général si le facteur rationnel de l'équation $X_1 = 0$, était du degré t, on aurait décomposé l'équation $X_n = 0$, en t facteurs, à l'aide d'une équation du degré t.

Cette théorie renferme la résolution des équations à deux termes de M. Gaufs: elle repose sur ce principe que les racines irrationnelles d'une équation à coefficiens rationnels peuvent, avec leur somme, donner une quantité rationnelle de plusieurs manières.

I°. En formant une quantité rationnelle par la somme de quelques unes d'entre elles seulement.

II°. En formant, par la somme de quelques unes d'entre elles, une quantité rationnelle d'un ordre donné; ou bien en formant une quantité rationnelle qui soit racine d'une équation à coefficiens rationnels, d'un degré moins élevé que l'équation proposée.

III°. En formant toujours par leur somme des quantités irrationnelles du même ordre que l'équation proposée.

Dans les deux premiers cas, l'équation $X_n = 0$, pourra se réduire à d'autres équations de degrés moins élevés.

Si l'équation $X_1 = 0$, n'a point de facteurs rationnels, on pourra lui appliquer la même méthode dont nous nous sommes servis pour ramener l'équation $X_n = 0$, à d'autres équations de degré moindre. Et de même au lieu de considérer la fonction S_1, on aurait pû prendre S_2, S_3, etc., et en général, une fonction quelconque des racines de l'équation $X_n = 0$, pour tâcher de déterminer la même fonction d'une partie seulement des racines.

On peut déterminer *à priori* quelles sont les équations à coefficiens rationnels dont la résolution peut se ramener à celle d'une équation du second degré, et de deux équations de degré moitié de celui de l'équation proposée. La détermination des coefficiens de cette équation dépendent de la résolution d'équations indéterminées.

Les principes précédens servent à résoudre un grand nombre d'équations qu'on ne pouvait pas traiter par les méthodes connues; on peut facilement les généraliser, et nous ne croyons pas nécessaire d'y insister d'avantage.

Second article.

Equations différentielles linéaires.

Etant donnée l'équation différentielle linéaire de l'ordre n

$$\Phi(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \dots + a_n y = 0,$$

à coefficiens constans ou variables, si l'on désigne par $y_1, y_2, \dots y_n$, les n intégrales particulières de l'équation $\Phi(y) = 0$, on aura en général $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \dots + C_n y_2$. Ces quantités $y_1, y_2 \dots y_n$ sont inconnues; mais si l'on suppose que l'une d'elles (y_1 par exemple) soit connue, on fera $y = y_1 \int z\,dx$, (z étant une nouvelle variable) et en substituant cette valeur de y dans l'équation $\Phi(y) = 0$, on aura

$$\left.\begin{array}{r} \Phi\left(y\int z\,dx\right) = y_1 \frac{d^{n-1}z}{dx^n} + n\frac{dy_1}{dx}\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} \dots + \frac{d^n y_1}{dx^n}\int z\,dx \\ + a_1 y_1 \frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} \dots + a_1 \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-2}}\int z\,dx \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + a_n y_1 \int z\,dx \end{array}\right\} = 0.$$

Mais dans cette dernière équation la somme de tous les derniers termes équivaut à $\Phi(y_1)\int z\,dx$, et comme $y = y_1$, satisfait à l'équation $\Phi(y_1) = 0$, il en résulte que tous les termes multipliés par $\int z\,dx$ s'évanouiront, et on aura une équation en z, de l'ordre $n-1$, de la forme

$$\left.\begin{array}{r} \Phi\left(y_1\int z\,dx\right) = y_1 \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + n\frac{dy_1}{dx}\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} \dots + \text{etc.} \\ + a_1 y_1 \frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} \dots + \text{etc.} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{etc.} \end{array}\right\} = 0;$$

en divisant par y_1, et en exprimant par $b_1, b_2 \dots$ etc. les coefficiens de $\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}}, \frac{d^{n-3}z}{dx^{n-3}}$, etc., on aura

$$\frac{1}{y_1}\Phi\left(y_1\int z\,dx\right) = \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + b_1\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}}\ldots\ldots + b_{n-1}z = 0;$$

d'où il résulte que si l'on connait une intégrale particulière de l'équation différentielle linéaire de l'ordre n, $\Phi(y) = 0$, on pourra toujours la réduire à une autre équation linéaire $\frac{1}{y_1}\Phi\left(y_1\int z\,dx\right) = 0$, de l'ordre $n-1$. Et en répétant le même raisonnement on prouvera que si dans l'équation linéaire $\Phi(y) = 0$, de l'ordre n, on connait m intégrales particulières, on pourra toujours réduire l'équation $\Phi(y) = 0$, à une autre équation linéaire de l'ordre $n-m$.

Soit proposé l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\ldots\ldots + a_n y = 0;$$

si l'on fait $y = zu$, (z et u étant deux nouvelles variables) on aura

$$\left.\begin{array}{r} u\frac{d^n z}{dx^n} + n\frac{du}{dx}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \text{etc.} \\ + a_1 u\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} = 0,$$

et comme l'équation $n\frac{du}{dx} + au = 0$, peut toujours s'intégrer, il en résulte qu'une équation différenticlle qui est linéaire *même dans les deux premiers termes seulement*, peut se réduire à une autre équation du même ordre dont le coefficient du second terme sera zéro. En général étant donnée une équation différentielle dont les premiers $m+1$ termes sont linéaires, on pourra toujours faire disparaître le terme $m+1^{me}$ à l'aide d'un équation linéaire de l'ordre m; et si les $m+1$ premiers coefficiens de l'équation proposée sont constans, on pourra toujours faire disparaître le terme $m+1^{me}$

Etant donnée l'équation linéaire

$$3.\quad \frac{d^n y}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\ldots\ldots + a_n y = X,$$

dans laquelle X est une fonction de x, si l'équation

$$\frac{d^n z}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\ldots\ldots + a_n z = 0,$$

a les n intégrales particulières $z_1, z_2 \ldots\ldots z_n$, en fesant $y = z_1\int y_1\,dx$, dans l'équation (3.), on aura une équation de la forme

$$4.\quad \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + b_1\frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}}\ldots\ldots + b_{n-1}y_1 = \frac{X}{z_1};$$

maintenant l'équation

$$\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+b_1\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}\ldots\ldots+b_{n-1}u=0,$$

a les $n-1$ integrales particulières

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{z_2}{z_1}\right),\ \frac{d}{dx}\left(\frac{z_3}{z_1}\right),\ \ldots\ldots\frac{d}{dx}\left(\frac{z_n}{z_1}\right),$$

et en fesant dans l'équation (4.) $y_1=\left(\frac{d}{dx}\cdot\frac{z_2}{z_1}\right)\int y_2\,dx$, on aura une équation de la forme

$$\frac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}}+c_1\frac{d^{n-3}y_2}{dx^{n-3}}\ldots\ldots+c_{n-2}y_2=\frac{X}{z_1\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}.$$

En répétant successivement des opérations semblables, on parviendrait enfin à une équation de la forme

$$y_n=\frac{X}{z_1\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{d\left(\frac{z_3}{z_1}\right)}{d\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}\right)\ldots\ldots}$$

d'où l'on deduirait l'expression

$$y=z_1\int d\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\int d\left(\frac{d\left(\frac{z_3}{z_1}\right)}{d\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}\right)\ldots\ldots\int\frac{X\,dx}{z_1\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{d\left(\frac{z_3}{z_1}\right)}{d\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}\right)\ldots\ldots}$$

(dans laquelle les signes d'intégration $\int$ comprennent tous les facteurs qui les suivent) et cette dernière formule donne l'intégrale générale de l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\ldots\ldots+a_ny=X,$$

en fonction des n intégrales particulières de l'équation

$$\frac{d^nz}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\ldots\ldots+a_nz=0.$$

Pour appliquer cette formule à un exemple, soit proposé l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2}-y=x,$$

l'équation $\frac{d^2z}{dx^2}-z=0$, a les deux intégrales particulières $z_1=e^x$, $z_2=e^{-x}$; et partant en substituant ces valeurs dans l'expression

$$y = z_1 \int d\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \int \frac{X\,dx}{z_1 \frac{d}{dx}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)},$$

on aura

$$y = e^x \int d(e^{-2x}) \int \frac{x\,dx}{e^x \frac{d}{dx}(e^{-2x})} = e^x \int (-2e^{-2x}dx) \int \frac{x\,dx}{e^x(-2e^{-2x})}$$

$$= e^x \int e^{-2x} dx \int x e^x dx = e^x \int e^{-2x} dx (e^x x - e^x + C_1)$$

$$= e^x \left(\int C_1 e^{-2x} dx + \int e^{-x} dx (x-1)\right) = \frac{-C_1 e^{-x}}{2} + Ce^x - x,$$

et enfin (en fesant $C = A$, $\frac{-C_1}{2} = A_1$) on obtiendra $y = Ae^x + A_1 e^{-x} - x$, qui est l'intégrale complète de l'équation proposée.

Il faut observer ici que si $y = \varphi(x)$ est une intégrale particulière de l'équation

$$5. \quad \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \ldots\ldots + a_n y = X,$$

et si $z_1, z_2, \ldots\ldots z_n$, sont n intégrales particulières de l'équation

$$\frac{d^n z}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} \ldots\ldots + a_n z = 0,$$

l'intégrale complète de l'équation (5.) sera $y = C_1 z_1 + C_2 z_2 \ldots + C_n z_n + \varphi(\psi)$.

La valeur de y que nous avons trouvée précédemment

$$y = z_1 \int d\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \int d\left(\frac{d\left(\frac{z_3}{z_1}\right)}{d\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}\right) \ldots \int \frac{X\,dx}{z_1 \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{d\left(\frac{z_3}{z_1}\right)}{d\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}\right) \ldots\ldots}$$

renferme n intégrations successives; et quoiqu'on sache d'ailleurs (par la méthode de la variation des constantes arbitraires) qu'on peut toujours réduire y à ne contenir que des intégrales simples, cependant on ne voit pas, par l'analyse précédente, comment on parviendrait à ce résultat. Voici maintenant comment on peut obtenir cette simplification. Soit, pour abréger,

$$d\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = du_n, \quad d\left(\frac{d\left(\frac{z_3}{z_1}\right)}{d\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}\right) = du_{n-1}, \ldots\ldots$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\ldots\ldots \frac{X\,dx}{z_1 \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{d\frac{z_3}{z_1}}{d\frac{z_2}{z_1}}\right) \ldots\ldots}$$

on aura

$$\frac{y}{z_1} = \int du_n \int du_{n-1} \int du_{n-2} \ldots\ldots \int du_4 \int du_3 \int du_2 \int du_1,$$

(en observant que chaque signe d'intégration renferme tous les termes qui le suivent); et par suite, en intégrant par parties, on obtiendra

$$\frac{y}{z_1} = \int du_n \int du_{n-1} \int du_{n-2} \ldots\ldots \int du_4 \int du_3 \left(u_2 u_1 - \int u_2\, du_1\right)$$

$$= \int du_n \int du_{n-1} \int du_{n-2} \ldots \int du_4 \left(u_3\left(u_2 u_1 - \int u_2\, du_1\right) - \int u_3\, d\left(u_2 u_1 - \int u_2\, du_1\right)\right)$$

. . . .

et enfin

$$\frac{y}{z_1} = \left\{\begin{array}{l} \Big(\ldots\Big(\Big(\big((u_1 u_2 - \int du_1 u_2)u_3 - \int d(u_1 u_2 - \int du_1 u_2)u_3\big)u_4 \\ \qquad - \int d\big((u_1 u_2 - \int du_1 u_2)u_3 - \int d(u_1 u_2 - \int du_1 u_2)u_3\big)u_4\Big)u_5 \ldots\Big)u_n \\ - \int d\Big(\Big(\Big(\ldots\big(((u_1 u_2 - \int du_1 u_2)u_3 - \int d(u_1 u_2 - \int du_1 u_2)u_3\big)u_4 \\ \qquad - \int d\big((u_1 u_2 - \int du_1 u_2)u_3 - \int d(u_1 u_2 - \int du_1 u_2)u_3\big)u_4\Big)u_5 \ldots\Big)u_n \end{array}\right\}.$$

Lorsqu'on connait toutes les intégrales particulières d'une équation différentielle (qui n'a pas de terme indépendant de y) on pourra toujours former les coefficiens de cette équation par des opérations analogues à celles qui servent à former les coefficiens des équations algébriques, en fonctions symétriques des racines. En effet soit proposée l'équation linéaire de l'ordre n

$$Y = \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \ldots\ldots + a_n y = 0,$$

et soient $y_1, y_2, \ldots\ldots y_n$, ses n intégrales particulières, dont la somme est égale à y; si l'on fait $y = y_1 \int z\,dx$, on aura

$$Y = \left.\begin{array}{r} y_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + n \frac{dy_1}{dx} \cdot \frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} \ldots\ldots + \frac{d^n y_1}{dx^n} \int z\,dx \\ + a_1 y_1 \frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} \ldots\ldots + a_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} \int z\,dx \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + a_n y_1 \int z\,dx \end{array}\right\} = 0,$$

et comme la somme des termes multipliés par $\int z\,dx$ se réduit à zéro,

en divisant par y_1 l'équation $Y=0$, on pourra la mettre sous la forme

$$Z=\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+b_1\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}}\dots\dots+b_{n-1}z=0;$$

et on aura $n\frac{dy_1}{dx}+a_1y_1=b_1y_1$; et par suite $a_1=-\frac{ndy_1}{y_1dx}+b_1$. Maintenant l'équation $Z=0$, a pour intégrales particulières les $n-1$ quantités $\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{y_3}{y_1}\right)$, ... $\frac{d}{dx}\left(\frac{y_n}{y_1}\right)$: et si l'on répète sur l'équation $Z=0$, la même opération que nous avons faite sur l'équation $Y=0$, nous trouverons

$$b_1=\frac{-(n-1)\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}+c_1.$$

On trouverait des transformations semblables pour c_1, d_1, etc.: mais comme les équations $Y=0$, $Z=0$, etc. diminuent toujours d'un terme, après n transformations on parviendra à une équation dont le coefficient du second terme sera égal à zéro. Alors la série des termes a_1, b_1, c_1, d_1, etc. s'arrêtera à ce terme là et on aura, en substituant,

$$6.\quad a_1=-\frac{ndy_1}{y_1dx}-\frac{(n-1)\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}-\frac{(n-2)\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d.\frac{y_3}{y_1}}{d.\frac{y_2}{y_1}}\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{d.\frac{y_3}{y_1}}{d.\frac{y_2}{y_1}}\right)}-\text{etc.}$$

Pour appliquer cette formule à un exemple, soit proposée l'équation $\frac{d^2y}{dx^2}-m^2y=0$, dans laquelle si l'on fait $y=y_1+y_2$, on aura $y_1=C_1e^{mx}$, $y_2=C_2e^{-mx}$. D'abord on a $n=2$: et par suite, en substituant dans la formule précédente (dans laquelle il faut considérer les deux premiers termes seulement parceque il n'y a que deux intégrales particulières) on aura:

$$a_1=\frac{2dy_1}{y_1dx}+\frac{\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}=\frac{2mC_1e^{mx}}{C_1e^{mx}}+\frac{\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{C_1e^{-2mx}}{C_2}\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{C_1e^{-2mx}}{C_2}\right)}$$

$$=2m+\frac{4m^2}{-2m}=2m-2m=0,$$

et partant $a_1=0$; ce qui résulte de l'inspection de l'équation proposée.

Dans la formule (6.) on peut permuter y_1 en y_2 et *vice versa*, car a_1 est une fonction symétrique des intégrales particulières; en fesant toutes les permutations et ajoutant les résultats on obtiendra

$$n a_1 = -n\left(\frac{dy_1}{y_1\,dx} + \frac{dy_2}{y_2\,dx} \dots + \frac{dy_n}{y_n\,dx}\right)$$
$$-(n-1)\left(\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)} + \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{y_3}{y_1}\right)\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{y_3}{y_1}\right)} + \text{etc.}\right)$$
$$-\text{etc.}$$

et par suite en intégrant

$$\int a_1 dx = -\log(y_1 . y_2 \dots y_n) - \left(\frac{n-1}{n}\right)\log\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) . \frac{d}{dx}\left(\frac{y_3}{y_1}\right) \dots \frac{d}{dx}\left(\frac{y_1}{y_n}\right)\right) - \text{etc.}$$

On pourrait obtenir par une analyse semblable tous les coefficiens a_2, a_3, ... a_n, en fonction des intégrales particulières y_1, y_2, ... y_n; et en général étant données n fonctions de x de la forme

$$F_1(x),\ F_2(x),\ \dots\ F_n(x),$$

on peut déterminer les coefficiens de l'équation différentielle linéaire de l'ordre n qui aura pour intégrales particulières ces n fonctions; et il n'existera qu'une seule équation différentielle linéaire de l'ordre n qui satisfasse à cette condition, comme il n'y a qu'une équation algébrique d'un degré determiné, qui ait n racines données. Cependant on peut determiner plus facilement les valeurs de a_2, a_3, etc., de la maniere suivante. — Si on élimine successivement les quantités a_2, a_3, ... a_n entre les n équations

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} \dots + a_n y_1 = 0,$$
$$\frac{d^n y_2}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} \dots + a_n y_2 = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{d^n y_n}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} \dots + a_n y_n = 0,$$

considérant les différentielles $\frac{d^n y_1}{dx^n}$, $\frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}$, etc. comme des coefficiens connus, on aura la valeur de a_1 telle que nous l'avons déjà donnée. Pour déduire de là la valeur de a_2 il est clair qu'il suffit (dans l'expression de a_1) de changer $\frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}$ en $\frac{d^{n-2} y_1}{dx^{n-2}}$ et *vice versâ*, de même que $\frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}}$ en $\frac{d^{n-2} y_2}{dx^{n-2}}$, et *vice versâ;* et ainsi pour les autres termes semblables en y_3,

$y_4, \ldots y_n$; sans changer aucun des termes qui contiennent d'autres différentielles. On obtiendrait par des permutations analogues les valeurs de a_3, a_4, etc.

Il faut observer que les intégrales particulières $y_1, y_2, \ldots y_n$ seront comprises dans l'expression des coefficiens $a_1, a_2, \ldots a_n$, sous la forme de différentielles logarithmiques, comme dans la formule (6.), pour faire disparaître les constantes arbitraires qui se trouvent comme facteurs dans les quantités $y_1, y_2, \ldots y_n$, et qui ne doivent pas se trouver dans les coefficiens $a_1, a_2, \ldots a_n$.

Les quantités $y_1, y_2, \ldots y_r, \ldots y_n$, forment une espèce particulière de fonctions symétriques: car non seulement on peut permuter ces quantités entre elles d'une manière quelconque (comme les racines des équations algébriques) dans la formation des coefficiens a_1, a_2, a_3, etc.; mais en général on peut écrire au lieu de y_r la somme ou la différence d'un nombre quelconque de ces intégrales particulières; et la valeur des coefficiens $a_1, a_2, \ldots a_n$ ne sera pas altérée. Ainsi par exemple dans l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = m^2 y$, nous avons vu qu'en fesant $y_1 = C_1 e^{mx}$, $y_2 = C_2 e^{-mx}$, on obtenait

$$a_1 = -\frac{2\,dy_1}{y_1\,dx} + \frac{\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)} = 0.$$

Mais si l'on fesait $y_1 = C_1 e^{mx} - e^{mx}$, $y_2 = C_2 e^{-mx}$, on aurait encore, en effectuant le calcul,

$$a_1 = -\frac{2\,dy_1}{y_1\,dx} + \frac{\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)} = 0.$$

Ce nouveau genre de fonctions symétriques nous parait mériter l'attention des géomètres.

Etant proposée l'équation différentielle linéaire

$$Y = \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \ldots + a_n y = 0,$$

si deux de ses intégrales particulières (y_1 et y_2 par exemple) sont liées entre elles de manière que l'on ait $y_2 = \varphi(y_1)$, on substituera $\varphi(y)$ à la place de y dans l'équation $Y = 0$, et l'équation $Y_1 = 0$ qui résultera de cette substitution, étant combinée avec l'équation $Y = 0$, servira à l'élimi-

nation des différentielles successives de y de manière à n'avoir pour résultat qu'une équation différentielle linéaire du premier ordre. Ainsi par exemple si l'on savait d'une manière quelconque que dans l'équation $\frac{d^2y}{dx^2}=y$, ses deux intégrales particulières y_1 et y_2 sont liées entre elles par l'équation $y_2=\frac{1}{y_1}$, on ferait $y=\frac{1}{z}$, dans l'équation $Y=0$, et on obtiendrait

$$\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{2dy^2}{ydx^2}+z=0,$$

et en éliminant $\frac{d^2y}{dx^2}$ entre $Y=0$ et

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2dy^2}{ydx^2}+y=0,$$

on obtiendrait

$$\frac{dy^2}{dx^2}=y^2,$$

et par suite $\frac{dy}{dx}=\pm y$, ce qui donne enfin $y=Ce^{\pm x}$, et les deux intégrales particulières seront $y_1=Ce^x$, $y_2=Ce^{-x}$, comme on le savait d'ailleurs.

En général étant proposées deux équations différentielles linéaires des ordres n et m que nous exprimerons par $Y_n=0$, $Y_m=0$, si l'on suppose qu'elles ont p intégrales particulières communes, on éliminera les différentielles successives entre $Y_n=0$ et $Y_m=0$, et on obtiendra une équation différentielle linéaire $Y_p=0$ de l'ordre p qui ne contiendra que les p intégrales particulières communes aux deux équations $Y_n=0$, $Y_m=0$.

Les rapports qui existent entre les intégrales particulières pourraient aussi être exprimés par des équations différentielles linéaires et on pourrait encore réduire l'équation différentielle linéaire proposée à une équation différentielle linéaire d'ordre inférieur.

Soient proposées les deux équations différentielles linéaires simultanées

$$Y=\frac{d^2y}{dx^2}+a_1\frac{dy}{dx}+a_2y=a_3v,$$

$$V=\frac{d^2v}{dx^2}+a_1\frac{dv}{dx}+a_2v=a_3y,$$

il est clair qu'en éliminant yv entre ces deux équations, on aura une équation différentielle linéaire du 4me ordre, qui sera de la forme

$$Y_1=\frac{d^4y}{dx^4}+A_1\frac{d^3y}{dx^3}+A_2\frac{d^2y}{dx^2}+A_3\frac{dy}{dx}+A_4=0;$$

mais si l'on élimine y entre ces deux mêmes équations, on aura précisément

la même équation en v,

$$V_1 = \frac{d^4 v}{dx^4} + A_1 \frac{d^3 v}{dx^3} + A_2 \frac{d^2 v}{dx^2} + A_3 \frac{dv}{dx} + A_4 = 0,$$

d'où il résulte que les quatre intégrales particulières dont la somme forme la valeur complète de y sont les mêmes que celles qui forment la valeur de v. Maintenant si l'on fait $v = y$ dans les deux équations $V = a_3 y$, $Y = a_3 v$, on aura les deux équations

$$Y_2 = \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + (a_2 . a_3) y = 0,$$

$$V_2 = \frac{d^2 v}{dx^2} + a_1 \frac{dv}{dx} + (a_2 . a_3) v = 0,$$

qui serviront à connaitre deux des quatre intégrales particulières que nous cherchons. Quand nous aurons trouvé les deux intégrales particulières de l'équation $Y_2 = 0$, nous nous en servirons pour réduire l'équation $Y_1 = 0$ au second ordre; et l'on voit que les deux intégrales particulières z_1, z_2, de cette équation réduite du second ordre, auront entre elles un rapport exprimé par l'équation

$$\frac{d^2 z_1}{dx^2} + a_1 \frac{dz_1}{dx} + a_2 z_1 = a_3 z_2,$$

et ce rapport servira pour trouver directement z_1 et z_2 à l'aide d'une équation linéaire du premier ordre.

On pourrait généraliser beaucoup ces considérations et les appliquer à un plus grand nombre d'équations simultanées: mais nous avons le projet de traiter beaucoup plus amplement ce sujet dans un autre Mémoire; d'ailleurs nous montrerons bientôt l'application de ces principes à l'intégration des équations différentielles qui expriment l'action réciproque des corps échauffés.

12.

Sur les intégrales de la forme $\int \frac{dx\, P\sqrt[3]{p}}{c-x}$, p et P étant deux polynomes entiers.

(Par Mr. *E. F. A. Minding.*)

Quoique l'objet de l'article suivant ne soit qu'un cas très-spécial, choisi parmi une infinité d'autres dans un champ de recherches d'une immense étendue; j'espère cependant qu'il y aura des géomètres qui prendront quelque intérêt à des dévéloppemens qui se rattachent aux théories importantes créées par le grand Abel, ces dévéloppemens fussent-ils même restreints à des cas particuliers. Peut-être dans quelque tems serai-je en état, de publier quelque chose de plus général sur la sommation des transcendantes à différentielles algébriques.

En conservant les notations mises en usage par l'illustre fondateur de cette théorie analytique, je designerai par p un polynome rationnel et entier à coefficiens constans, et par q_0, q_1, q_2 des polynomes de même espèce à coefficiens variables, tous ces polynomes étant ordonnés suivant les puissances d'une même quantité variable x. Actuellement je me bornerai à traiter les transcendantes, qui se rapportent au système des équations suivantes:

$$1. \quad y^3 + p = 1,$$

$$2. \quad q_2 y^2 + q_1 y + q_0 = 0.$$

En éliminant y entre ces deux équations, je trouve:

$$3. \quad Fx = q_0^3 + 3p q_0 q_1 q_2 - p q_1^3 + p^2 q_2^3 = 0.$$

De ces mêmes équations on tire une expression rationelle de y, savoir:

$$4. \quad y = \frac{q_0 q_1 + p q_2 q_2}{q_0 q_2 - q_1 q_1}.$$

Soit μ le dégré de Fx, par rapport à x, et désignons par x_1, x_2, ... x_μ ses μ racines, de sorte qu'on ait:

$$5. \quad Fx = A(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots . (x - x_\mu),$$

A étant indépendant de x. On peut supposer données un certain nombre ν de ces racines, égal à celui des coefficiens indéterminés et variables

des polynomes q_0, q_1, q_2, qu'il sera facile de déterminer convenablement. Il est à remarquer, que cette détermination ne conduit même dans le cas le plus général qu'à des équations du premier degré par rapport aux coefficiens cherchés. Les racines restantes de l'équation $Fx = 0$ seront données en fonctions des ν premières racines à l'aide d'une équation algébrique du dégré $\mu - \nu$. Mais à présent je ne m'attacherai pas à suivre les conséquences de cette distinction entre les racines de l'équation $Fx = 0$, que je me bornerai aussi à régarder comme inégales entre elles.

On voit aisément, que chacune des racines x_1, x_2 .... donne une valeur correspondante de y, qu'on doit, en suivant l'analogie, désigner par y_1, y_2, ... y_μ.

Maintenant pour former une expression rationelle équivalente à l'intégrale proposée, différentions l'équation $Fx = 0$ par rapport à x et aux coefficiens variables de q_0, q_1, q_2. La première différentiation sera desiguée par d, la seconde par δ, la dérivée de Fx par rapport à x seul par $F'x$. On trouvera:

$$6. \quad F'x\,dx + 3(q_0^2\,\delta q_0 + p\,\delta(q_0 q_1 q_2) - p q_1^2\,\delta q_1 + p^2 q_2^2\,\delta q_2) = 0.$$

A l'aide de cette équation on pourra exprimer la fonction $y\,dx$, en substituant au lieu de y sa valeur donnée par l'équation (4.). On trouve:

$$y\,dx = \frac{3(q_0^2\,\delta q_0 + p\,\delta(q_0 q_1 q_2) - p q_1^2\,\delta q_1 + p^2 q_2^2\,\delta q_2)(q_0 q_1 + p q_2 q_2)}{(q_1 q_1 - q_0 q_2)F'x};$$

équation que nous exprimerons brièvement par

$$y\,dx = \frac{8\,\theta x}{F'x}.$$

Cela posé je ferai voir que θx est une fonction entière par rapport à x. Mettons la valeur de $(q_1 q_1 - q_0 q_2)\,\theta x$ sous la forme:

$$p\,[\delta(q_0 q_1 q_2) - q_1^2\,\delta q_1 + p q_2^2\,\delta q_2]\,[q_0 q_1 + p q_2 q_2] + p q_0^2 q_2^2\,\delta q_0 + q_0^2 q_1\,\delta q_0,$$

et substitions dans cette expression au lieu de q_0^2 sa valeur tirée de l'équation 3); nous obtiendrons:

$$p[\delta(q_0 q_1 q_2) - q_1^2\,\delta q_1 + p q_2^2\,\delta q_2][q_0 q_1 + p q_2 q_2] + p q_0^2 q_2^2\,\delta q_0 + p q_1[q_1^2 - 3 q_0 q_1 q_2 - p^2 q_2^2]\,\delta q_0.$$

Cette formule ordonnée par rapport aux différentielles δq_0, δq_1, δq_2 donne

$$7. \quad (q_1 q_1 - q_0 q_2)\,\theta x =$$
$$p(q_0 q_2 - q_1 q_1)^2\,\delta q_0 + p(q_0 q_2 - q_1 q_1)(q_0 q_1 + p q_2 q_2)\,\delta q_1 + p(q_0 q_1 + p q_2 q_2)^2\,\delta q_2.$$

On s'assurera aisément, qu'en vertu de l'équation (3.) on a la relation suivante:

$$8. \quad (q_0 q_1 + p q_2 q_2)^2 = (q_1 q_1 - q_0 q_2)(q_0 q_0 + p q_1 q_2).$$

En substituant cette valeur de $(q_0 q_1 + p q_2 q_2)^2$ dans le multiplicateur de δq_2 en (6.), on voit que tout devient divisible par $q_1 q_1 - q_0 q_2$, et on obtient:

$$\theta x = p[(q_1 q_1 - q_0 q_2)\delta q_0 - (q_0 q_1 + p q_2 q_2)\delta q_1 + (q_0 q_0 + p q_1 q_2)\delta q_2].$$

Multiplions la différentielle $y\,dx$ par un facteur $\frac{P}{c-x}$, c étant une constante et P un polynome rationnel et entier à coefficiens constans, nous aurons:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{P y\,d x}{c-x} = \frac{P\theta x}{F'x . c-x}.$$

Cette équation ayant lieu séparément, pour chaque racine de l'équation $Fx = 0$, équivaut évidement à μ équations différentes, telles que:

$$9. \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{P_1 y_1 d x_1}{c-x_1} = \frac{P_1 \theta x_1}{F' x_1 . c - x_1},$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{P_2 y_2 d x_2}{c-x_2} = \frac{P_1 \theta x_2}{F' x_1 . c - x_2}, \quad \text{etc.}$$

Ajoutons ensemble toutes ces équations, et supposons d'abord le dégré de la fonction $P.\theta x$ inférieur à celui de Fx. Dans ce cas, on aura par la théorie connue des fractions simples:

$$10. \quad \frac{P_1 \theta x_1}{F' x_1 . c - x_1} + \frac{P_2 \theta x_2}{F' x_2 . c - x_2} + \ldots + \frac{P_\mu \theta x_\mu}{F' x_\mu . c - x_\mu} = \frac{Pc.\theta c}{Fc}.$$

en désignant par Pc la valeur qu'obtient le polynome P, en y changeant x en c.

Maintenant il s'agit d'intégrer par rapport à q_0, q_1, q_2, la fonction $\frac{\theta c}{Fc}$, Pc étant une constante. On a

$$11. \quad \frac{\theta c}{Fc} = \frac{p((q_1 q_1 - q_0 q_2)\delta q_0 - (q_1 q_1 + p q_2 q_2)\delta q_2 + (q_0^2 + p q_1 q_2)\delta q_2)}{q_0^3 + 3 p q_0 q_1 q_2 - p q_1^3 + p^2 q_2^3},$$

pourvu qu'on ait mis c à la place de x dans tous les polynomes p, q_0, q_1, q_2. Pour faciliter l'intégration, mettons l'équation 10. sous la forme:

$$\frac{\theta c}{Fc} = \frac{p((q_1 \delta q_0 - q_0 \delta q_1) q_1 + (q_0 \delta q_2 - q_2 \delta q_0) q_0 + p q_2 (q_1 \delta q_2 - q_2 \delta q_1))}{q_0^3 + 3 p q_0 q_1 q_2 - p q_1^3 + p^2 q_2^3}.$$

En divisant par q_1^3 le numérateur et le dénominateur de cette expression (pourvu toutefois qu'on n'ait pas $q_1 = 0$, hypothèse qui ne présenterait aucune difficulté), posant ensuite $\frac{q_0}{q_1} = u$, $\frac{q_2}{q_1} = v$, on obtiendra:

$$13. \quad \frac{\theta c}{Fc} = p . \frac{(1 - uv)\delta u + (u^2 + pv)\delta v}{u^3 + 3puv - p + p^2 v^3}.$$

Les variables u et v de cette expression devant être régardees comme indépendantes l'une de l'autre, il sera facile de s'assurer, que la valeur

proposée de $\frac{\theta c}{Fc}$ est une différentielle exacte, ce qui au reste peut être démontré à priori à l'égard de toutes les formules analogues, qui servent à exprimer une certaine somme de transcendantes algébriques, dont les variables sont supposées être les racines d'une équation algébrique.

Considérons maintenant le second cas, dans lequel le dégré de la fonction $P.\theta x$ n'est pas inférieur à celui de Fx. Dans ce cas on pourra diviser le produit $P.\theta x$ par Fx; soit fx le quotient de la division, λx le reste, dont le dégré est inférieur à celui de Fx. On a donc

$$14.\quad P.\theta x = fx.Fx + \lambda x,$$

équation qui donne pour une racine quelconques x_1 de l'équation 3.:

$$P_1.\theta x_1 = fx_1.Fx_1 + \lambda x_1;$$

ou bien, Fx_1 étant égal à zero,

$$P_1 \theta x_1 = \lambda x_1.$$

De là on tire:

$$15.\quad \frac{1}{3}.\frac{P_1 y_1 dx_1}{c-x_1} = \frac{\lambda x_1}{F'x_1.c-x_1}.$$

En ajoutant ensemble toutes les équations semblables; correspondantes aux diverses racines de l'équation $Fx = 0$, on a:

$$16.\quad \frac{1}{3}.\frac{P_1 y_1 dx_1}{c-x_1} + \frac{1}{3}.\frac{P_2 y_2 dx_2}{c-x_2} + \ldots + \frac{1}{3}.\frac{P_\mu y_\mu dx_\mu}{c-x_\mu}$$
$$= \frac{\lambda x_1}{F'x_1.c-x_1} + \ldots + \frac{\lambda x_\mu}{F'x_\mu.c-x_\mu} = \frac{\lambda c}{Fc}.$$

Remarquons qu'on a, en vertu de 14.,

$$Pc.\theta c = fc.Fc + \lambda c,$$

ce qui donne la somme proposée dans l'équation 15. égale à $\frac{Pc\,\theta c}{Fc} - fc$. Donc on a généralement:

$$17.\quad \int \frac{1}{3}\left\{\frac{P_1 y_1 dx_1}{c-x_1} + \ldots + \frac{P_\mu y_\mu dx_\mu}{c-x_\mu}\right\} = \int\left(\frac{Pc.\theta c}{Fc} - fc\right) + \text{const.}$$

De cette formule on peut tirer un grand nombre de corollaires. Designons, pour abréger, par $\int\psi c$ la partie à droite de l'équation 17. Qu'on développe ψc suivant les puissances descendantes de c; soit r le coefficient de $\frac{1}{c}$ dans ce développement. On aura:

$$18.\quad \tfrac{1}{3}\int[P_1 y_1 dx_1 + P_2 y_2 dx_2 + \ldots + P_\mu y_\mu dx_\mu] = \int r.$$

En différentient l'équation 17. par rapport à c, on trouvera:

$$19.\quad \tfrac{1}{3}\int\left[\frac{P_1 y_1 dx_1}{(c-x_1)^2} + \ldots + \frac{P_\mu y_\mu dx_\mu}{(c-x_\mu)^2}\right] = -\int\frac{d\psi c}{dc}.$$

En répétant autant de fois qu'on voudra, la différentiation par rapport à c, on parviendra à trouver une somme composée de transcendantes de la forme: $\int\frac{Py\,dx}{(c-x)^n}$, n étant entier et positif.

Généralement il est clair, que les principes exposés s'étendent aux transcendantes de la forme

$$\int y\partial x\left[P+\frac{A}{a-x}+\frac{A_1}{(a-x)^2}+\frac{A_2}{(a-x)^3}+\ldots+\frac{B}{b-x}+\frac{B'}{(b-x)^2}+\ldots+\frac{C}{c-x}+\ldots\right],$$

P étant un polynome entier, et les lettres A, B, C, ... a, b, c désignant des constantes. Cette intégrale se reduit, comme on voit, à la forme $\int y\,dx\frac{M}{N}$, M et N étant deux polynomes entiers quelconques. Les variables des u intégrales de cette forme qu'il s'agit de sommer, seront les u racines de l'équation $Fx=0$, et leur somme sera composée en termes dépendans des intégrales $\int\psi a$, $\int\psi b$, $\int\psi c$, ... et de leurs différentielles prises par rapport à a, b, c .... et multipliés respectivement par les coefficiens A, A', ... B, B', ... avec des signes déterminés par l'ordre des différentiations.

La valeur de la formule $\frac{\theta c}{Fc}$ se simplifie extrêmement, en fesant $\varphi_1=0$. Dans ce cas v étant zéro, on a, en vertu de 13.

$$\frac{\theta c}{Fc}=\frac{p\partial u}{u^2-p}.$$

Druckfehler im neunten Bande.

Pag. 1. lin. 13. loco „neque" — „neque" leg. „haud"
— 3. — 10. l. unde leg. inde
— 4. — antep. l. quos leg. quas
— 5. — 4. l. 2^{m+1} leg. 2^m+1
— — — 29. l. primae leg. primorum
— 13. — 21. l. (64, 3) leg. (64, 9)
— 16. — ult. l. esse leg. est
— 19. — 15. l. potestatem leg. potestatum
— 20. — 20. l. priorum leg. priorem
— 146. — 9. l. exprimantur leg. exprimatur
— 147. — 28. l. p^2 leg. p_0^2
— 155. — 4. l. essent leg. sunt
— — — 14. l. (6.) leg. ex (6.)
— 161. — 12. loco 7 ubique legendum est r
— 216. — 24. 25. 30. 31. loco 9 leg. q
— — lin. ultima delendum est „positis"
— 218. — 4. l. $5R$ leg. $5R$
— — — 5. l. $2) R^8 + R^{20} + R^{40} + R^{44} + R^{60} - R^2 - R^{30} - R^{32}$ legas:
$2(R^8 + R^{20} + R^{40} + R^{44} + R^{50} - R^2 - R^{20} - R^{62})$
— — — 7. l. $R^{60} + R$ leg. $R^{60} + R^{61}$
— — — 10. l. $R^{62} + R^{13}$ leg. $R^{62} + R^{63}$
— 219. — 31. l. quam leg. quem
— 220. — 17. l. commutant l. commutat
— — — 19. l. rero leg. vero
— 225. — 4. l. $-\cos\frac{x\pi}{64}$ leg. $+\cos\frac{x\pi}{64}$
— 230. — 5. l. f_{10} leg. f_{11}
— 351. — 26. l. numeris leg. numeri

13.
Bemerkungen über die Bildung der Primzahlen aus einander.

(Vom Herrn Prof. *H. F. Scherk* in Halle.)

Eine geometrische, mit der Theorie der Primzahlen scheinbar nur in sehr entfernter Verbindung stehende Untersuchung veranlaſste mich vor längerer Zeit zu dem Versuche, die Primzahl 17 aus allen kleineren Primzahlen und der Zahl 1 auf möglichst einfache Weise zusammenzusetzen. Hier ergab sich denn bald, daſs $17 = 1+2-3-5+7-11+2.13$, d. h. daſs 17 durch bloſse Addition und Subtraction aus allen kleineren Primzahlen, wenn die Zahl 1 der Kürze halber mit zu diesen gerechnet wird, zusammengesetzt werden könne, wobei jedoch die nächstvorhergehende Primzahl 13 zweimal genommen werden müsse. Dies führte zu der Vermuthung, daſs dieselbe Eigenschaft vielleicht allen Primzahlen von der Form $4n+1$ zukommen möchte. Aber diese Vermuthung bewährte sich nicht; denn es ist z. B. $13 = 1+2-3-5+7+11$, so daſs die der 13 nächstvorhergehende Primzahl bloſs Einmal genommen zu werden braucht, dahingegen $19 = 1-2+3+5-7-11+13+17$ und $23 = 1-2+3-5+7+11-13-17+2.19$. Da nun 13 wie 17 von der Form $4n+1$, 19 wie 23 von der Form $4n+3$ sind, das Bildungsgesetz aber bei keiner in diesen beiden Paaren sich befindenden Primzahl in der Hinsicht dasselbe bleibt, ob die nächstvorhergehende Primzahl einfach oder doppelt genommen werden muſs, so bot sich die Idee dar, von der Form der Primzahlen ganz zu abstrahiren, und vielmehr auf die Stelle zu sehen, welche sie in der natürlichen Reihe der Primzahlen einnehmen, da unter den aufeinander folgenden Primzahlen 13, 17, 19, 23 dasselbe Bildungsgesetz für 13 und 19, und für 17 und 23 Statt findet.

Auf diese Weise gelangte ich durch eine nicht bewiesene Induction zu folgenden Sätzen. Trennt man in der natürlichen Reihe der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13 etc. die in ungerader Stelle stehenden 2, 5, 11 etc. von den in gerader Stelle stehenden 3, 7, 13 etc., so kann

Erstens. Jede geradstellige Primzahl aus allen kleineren und der Zahl 1 durch bloſse Addition und Subtraction, so daſs jede von ihnen nur Einmal genommen wird, zusammengesetzt werden.

Zweitens. Jede ungeradstellige Primzahl kann aus allen kleineren und der Zahl 1 auf dieselbe Weise gebildet werden, mit dem Unterschiede jedoch, daſs die nächstvorhergehende Primzahl doppelt genommen werden muſs.

Was hierbei auſser der einfachen Bildungsart besonders merkwürdig scheint, ist der, so viel mir bekannt ist, sonst noch nirgends hervorgetretene Unterschied zwischen denjenigen Primzahlen, die in der natürlichen Reihe aller Primzahlen eine gerade, und derjenigen, die in derselben Reihe eine ungerade Stelle einnehmen. Daſs keine Primzahl der einen Art nach dem Formationsgesetz der anderen Art gebildet werden könne (die Zahl 3 ausgenommen, auf welche wir jedoch sogleich besonders zurückkommen werden), liegt am Tage. Denn jeder geradstelligen Primzahl geht 1 und eine ungerade Menge von Primzahlen vorher; da sich nun unter diesen die einzige gerade Zahl 2 findet, so ist klar, daſs die algebraische Summe aller dieser Zahlen, wenn sie nach Belieben positiv oder negativ genommen werden, stets eine ungerade Zahl sein wird, und folglich auch vielleicht die verlangte Primzahl sein kann; wenn aber eine von ihnen, die von der 2 verschieden ist, doppelt, oder überhaupt eine gerade Anzahl mal genommen wird, so ist das Resultat eine gerade Zahl, und kann folglich der verlangten Primzahl nicht gleich sein. Demnach kann keine geradstellige Primzahl nach dem zweiten Satze gebildet werden. Ganz auf dieselbe Weise läſst sich zeigen, daſs keine ungeradstellige Primzahl nach dem ersten Satze zusammengesetzt werden kann. Dieses Raisonnement ist aber offenbar dann nicht anwendbar, wenn diejenige Primzahl, welche eine gerade Anzahl mal genommen wird, die 2 ist; und demnach ist es möglich, daſs die Primzahl 3, bei deren Formation 2 die einzige in Betracht kommende Primzahl ist, sowohl nach der einen, als nach der andern Regel gebildet werden kann, wie denn in der That $3 = 1 + 2$ und $= -1 + 2.2$ ist.

Man kann jedoch den obigen Sätzen noch einige nähere Bestimmungen hinzufügen, die zwar an sich willkürlich sind, die aber nicht bloſs bewirken, daſs auch die beiden ersten Primzahlen der allgemeinen

Regel unterworfen sind, sondern auch in die Bildungsart der folgenden Primzahlen aus den vorhergehenden eine gewisse Einförmigkeit hineinbringen. Es ist nämlich zuvörderst offenbar, daſs nicht alle Primzahlen aus allen vorhergehenden durch bloſse Addition und Substraction auf eine einzige Weise zu bilden seyen. So ist z. B.

$$13 = 1+2-3-5+7+11,$$

und auch

$$13 = -1+2+3+5-7+11,$$

und namentlich wird dies zuerst bei jeder geradstelligen Primzahl Statt finden, die sich von der nächstvorhergehenden um 2 unterscheidet, und bei deren Zusammensetzung aus den kleineren Primzahlen 2 positiv genommen werden muſste. Denn da, wie sogleich genauer gezeigt werden wird, bei allen geradstelligen Primzahlen die nächstvorhergehende positiv genommen werden kann, so ist, wenn M eine solche geradstellige, L die nächstvorhergehende ungeradstellige Primzahl, und $M-L=2$ ist, M von der Form

$$M = \pm 1+2\pm 3\pm 5\pm \ldots\ldots \pm K+L.$$

Setzt man nun

$$x = \mp 1+2\mp 3\mp 5\mp \ldots\ldots \mp K+L,$$

so ist

$$M+x = 4+2L$$

und folglich

$$x = M,$$

so daſs also eine solche Primzahl aus allen vorhergehenden durch bloſse Addition und Subtraction mindestens auf zwei verschiedene Weisen zusammengesetzt werden kann. Sodann aber sieht man auch, daſs bei jeder Primzahl, in deren Bildung die Form $1+2-3$ oder $2+P-Q$ vorkömmt, wo P, Q zwei beliebige auf einander folgende Primzahlen vorstellen, deren Unterschied $=2$ ist, für diese Formen die ihnen resp. gleichgeltenden $-1-2+3$ oder $-2-P+Q$ gesetzt werden können. So ist z. B.

$$\begin{aligned} 17 &= 1+2-3-5+7-11+2.13, \\ &= -1-2+3-5+7-11+2.13, \\ &= -1+2+3+5-7-11+2.13, \end{aligned}$$

und auf dieselbe Art werden eine Menge, wo nicht die meisten Primzahlen auf mehrere verschiedene Weisen aus allen kleineren Primzahlen zusammenzusetzen sein. Um nun die Anzahl dieser verschiedenen Bildungsarten zu beschränken, scheint es zweckmäſsig, die Vorzeichen noch an

ein besonderes Gesetz zu binden, welches sie erfüllen sollen. Wäre es eine Möglichkeit, ein solches zu finden, welches sich auf die **Aufeinanderfolge** der Vorzeichen bezöge, so wäre dies offenbar von der höchsten Wichtigkeit, da man hierdurch ein directes Mittel hätte, jede Primzahl aus den vorhergehenden zusammenzusetzen. Da sich mir jedoch kein solches darbot, so richtete ich mein Augenmerk zuerst nur auf die **Anzahl** der positiven und der negativen Glieder, und hier hat sich denn durch Beobachtung desjenigen Gesetzes, welches bei den Primzahlen Statt findet, die nur auf eine einzige Weise aus den vorhergehenden gebildet werden können, gleichfalls durch Induction gefunden, dafs es jedesmal möglich ist,

bei der Bildung der geradstelligen Primzahlen die beiden nächtvorhergehenden positiv, von den andern aber **gleich viele** positiv und negativ, bei der Bildung der ungeradstelligen Primzahlen die nächstvorhergehende positiv, und, wie schon erwähnt, doppelt, von den anderen aber gleichfalls gleich viele positiv und negativ zu nehmen.

Aber auch jetzt ist die Bildungsart der Primzahlen noch nicht auf eine einzige eingeschränkt. Denn man sieht zum z. B., dafs wenn $Q-P = a_1$, $Q'-P' = a$ ist, für die Form $P-Q-P'+Q'$ die ihr gleichgeltende $-P+Q+P'-Q'$ gesetzt werden kann, ohne dafs die Anzahl der positiven und der negativen Glieder eine Veränderung erleidet. So ist z. B.

$$23 = 1-2+3-5+7+11-13-17+2.19,$$

und auch

$$23 = 1-2+3+5-7-11+13-17+2.19.$$

Um also endlich zu einer einzigen Bildungsart zu gelangen, verfahre man auf folgende Weise. Soll eine geradstellige Primzahl aus allen vorhergehenden und der Zahl 1 durch blofse Addition und Subtraction zusammengesetzt werden, so nehme man zuerst 1 und alle kleineren geradstelligen Primzahlen positiv, alle kleineren ungeradstelligen aber negativ, mit Ausnahme der letzten ungeradstelligen Primzahl, welche positiv genommen werden mufs; zieht man dann die zweite Summe von der ersten ab, so ist das Resultat jedesmal eine Zahl, welche **gröfser** ist, als die zu bildende Primzahl (nur bei 3 und 7 ist es der zu bildenden Zahl **gleich**). Um nun den Unterschied des Resultats und der zu bildenden Primzahl, welcher nothwendig eine gerade Zahl ist, wegzuschaffen, versetze man so oft als nöthig eine positive Primzahl und eine kleinere negative mit

einander, und man wird im Allgemeinen am schnellsten zum gewünschten Ziele gelangen, wenn man, mit Ausnahme der beiden gröfsten positiv zu nehmenden Primzahlen, stets die möglichst gröfste positive mit einer möglichst kleinen negativen Zahl versetzt, immer jedoch das Princip festhält, durch keine Versetzung ein Resultat hervorzubringen, welches kleiner ist, als die verlangte Primzahl. Ganz auf dieselbe Weise wird jede ungeradstellige Primzahl gebildet, nur mit dem Unterschiede, dafs man gleich Anfangs blofs die einzige nächstvorhergehende Primzahl positiv, aber diese dann doppelt zu nehmen hat.

Beisp. 1. Es soll die 10te Primzahl 29 aus den vorherigen gebildet werden. Es ist

$$\begin{array}{l} 1-2 \\ +3-5 \\ +7-11 \\ +13-17 \\ +19 \\ +23 \\ \hline =66-35=31. \end{array}$$

Demnach der Unterschied $31-29$ durch Versetzung wegzuschaffen, welches geschieht, wenn $+2-3$ statt $-2+3$ gesetzt wird.

2. Es soll die 17te Primzahl 59 aus den vorhergehenden gebildet werden. Es ist

$$\begin{array}{r} 1-2 \\ +2-5 \\ +7-11 \\ +13-17 \\ +19-23 \\ +29-31 \\ +37-41 \\ +43-47 \\ +2.53=+106 \\ \hline =258-177=81. \end{array}$$

Folglich ist $81-59=22$ durch Versetzung wegzuschaffen. Da nun $43-11=32$, durch Versetzung von 43 mit 31 also das Resultat kleiner als 59 würde, so kann man 43 nur mit 41 versetzen; eben so ist $37-9=26$,

also mufs 37 mit 31 versetzt werden; $29-3=26$, also kann 29 nicht versetzt werden; $19-3=16$, folglich müssen 19 und 17 ihre Stellen vertauschen, und die noch übrigbleibende 1 wird durch Versetzung von 3 und 2 fortgeschafft, so dafs

$$59=1+2-3-5+7-11+13+17-19-23+29+31-37+41-43-47+2.53.$$

Nach diesen Regeln ist die diesem Hefte angefügte, mit II. bezeichnete Tafel berechnet, und bis zur Primzahl 499 ausgedehnt worden.

Diese Tafel enthält die Coefficienten, mit welchen die über denselben stehenden Primzahlen multiplicirt werden müssen, um die zu Anfang jeder Horizontalreihe als Argument stehende Primzahl zum Resultat zu geben, so dafs z. B. $11=+1-2+3-5+2.7$ u. s. w. Aufser den angegebenen habe ich noch die Primzahl 5003 nach denselben Gesetzen berechnet.

Ein Gesetz der Vorzeichen ist in dieser Tafel auf keine Weise zu erkennen; ein solches liefs sich aber auch bei der angegebenen durchaus willkürlichen Bildungsart gar nicht erwarten. Nur dies kann man bemerken: je weiter die zu bildende Primzahl hinaus liegt, eine desto geringere Anzahl von Primzahlen hat man aus der ursprünglichen Anordnung zu versetzen, so dafs mit Ausnahme der Zahlen 2 und 3, welche häufig ihr Vorzeichen vertauschen, die Vorzeichen immer mehr abwechselnd plus und minus sind. So ist z. B. für 5003 die Summe der ursprünglichen positiven Glieder $=781969$, der negativen $=774388$, also ihr Unterschied 7581, demnach noch wegzuschaffen $7581-5003=2578$, welches durch die Versetzung von 4973 mit 3691, von 4937 mit 4933, von 4789 mit 4787 und von 3 mit 2 bewirkt wird, so dafs, mit Ausnahme vor 2 und 3, die Vorzeichen bis zu 3677 abwechselnd positiv und negativ sind.

Eine sehr einfache Folgerung aus den aufgestellten Sätzen ist, dafs die natürliche Reihe der Primzahlen, wenn diese von 1 bis zu einer beliebigen hin, abwechselnd positiv und negativ genommen werden, ein Resultat giebt, welches gröfser ist (nur bei den 5 ersten Primzahlen ist es nicht gröfser, sondern gleich), als die nächstfolgende Primzahl, wobei jedoch zu bemerken ist, dafs die letzte Primzahl der Reihe positiv genommen werden mufs, wenn die vorhergehende positiv, und doppelt, wenn die vorhergehende negativ ist. So z. B. ist

$2.1 = 2$
$1 + 2 = 3$
$1 - 2 + 2.3 = 5$
$1 - 2 + 3 + 5 = 7$
$1 - 2 + 3 - 5 + 2.7 = 11$
$1 - 2 + 3 - 5 + 7 + 11 > 13$
$1 - 2 + 3 - 5 + 7 - 11 + 2.13 > 17$
$1 - 2 + 3 - 5 + 7 - 11 + 13 + 17 > 19$
etc.

Eine Bemerkung des Herrn Verfassers über Primzahlen, aus einem Briefe an den Herausgeber.

Die Primzahlen von der Form $4n+1$ unterscheiden sich von denen $4n+3$ auf so vielfache und entschiedene Weise, dafs man, da über das Bildungsgesetz der Primzahlen, vorausgesetzt, dafs ein solches überhaupt entweder für alle, oder nur für gewisse Gattungen der Primzahlen existirt, gar nichts bekannt ist, von vorn herein die Frage, ob bis zu einer gegebenen Zahl hin, gleichviele Primzahlen $4n+1$ und $4n+3$ sich finden, wie ich glaube, nicht leicht entschieden wird bejahen, aber eben so wenig verneinen wollen. Der einzige Grund für eine bejahende Antwort möchte der sein, dafs man nicht absehe, weswegen in der Reihe aller ungeraden Zahlen, von der Form $4n+1$, sich mehr oder weniger Primzahlen finden sollten, als in der Reihe aller ungeraden Zahlen $4n+3$, da doch beide Reihen gleichviel Zahlen enthalten. Aber selbst diesen Schlufs, dessen Schwäche übrigens einleuchtet, zugegeben, so schien es mir doch sicherer, einmal die Frage auf dem Wege der reinen Erfahrung, also durch blofses Abzählen bis zu einer nicht unbeträchtlichen Gränze hin, wenn auch nicht zur völligen, so doch zu einer Art von Entscheidung zu bringen. Auf diese Weise hat sich ergeben, dafs die Primzahlen sich auf folgende Weise eintheilen. Es finden sich:

bis	Primzahlen $4n+1$	Primzahlen $4n+3$	bis	Primzahlen $4n+1$	Primzahlen $4n+3$	bis	Primzahlen $4n+1$	Primzahlen $4n+3$
1000	81	87	18000	1023	1041	35000	1865	1867
2000	148	155	19000	1074	1084	36000	1908	1916
3000	212	218	20000	1131	1131	37000	1958	1964
4000	269	281	21000	1178	1182	38000	2007	2010
5000	331	338	22000	1229	1235	39000	2054	2053
6000	385	398	23000	1278	1286	40000	2096	2107
7000	444	456	24000	1332	1336	41000	2138	2153
8000	501	506	25000	1377	1385	42000	2190	2202
9000	556	561	26000	1428	1432	43000	2244	2250
10000	611	618	27000	1484	1477	44000	2288	2291
11000	661	674	28000	1527	1528	45000	2335	2340
12000	710	728	29000	1574	1579	46000	2384	2377
13000	769	778	30000	1618	1627	47000	2326	2325
14000	821	831	31000	1670	1670	48000	2476	2470
15000	869	885	32000	1714	1718	49000	2520	2515
16000	923	939	33000	1769	1769	50000	2566	2567
17000	972	988	34000	1822	1816			

Hieraus geht also, wie zu erwarten war, hervor, daſs man mit groſser Wahrscheinlichkeit annehmen kann, die Anzahl der Primzahlen $4n+1$ sei der Anzahl der Primzahlen $4n+3$ nicht bloſs im Allgemeinen, sondern auch bis zu einer gegebenen Grenze hin sehr nahe gleich.

14.

Über die Summirung gewisser Reihen.

(Von dem Herrn Dr. *Stern* zu Göttingen.)

Bekanntlich ist es leicht, Reihen zu summiren, die eine ähnliche Form wie die Reihe: $\frac{1}{a(a+b)(a+2b)}+\frac{1}{(a+b)(a+2b)(a+3b)}\dots$ haben *). Nicht so bekannt scheint aber die Summation der Reihen zu sein, die so beschaffen sind, dafs zwei auf einander folgende Nenner nur einen oder gar keinen gemeinschaftlichen Factor haben; wenigstens kennt der Verfasser dieses Aufsatzes kein Werk, in welchem allgemeine Methoden zur Summation solcher Reihen gegeben wären. Vielleicht möchten daher folgende Erörterungen manchem Leser nicht unwillkommen sein.

1. Summation der Reihe

$$S=\frac{1}{a(a+b)(a+2b)}+\frac{1}{(a+2b)(a+3b)(a+4b)}\dots\text{**)}.$$

Diese Reihe mufs für alle endlichen Werthe von a und b (ausgenommen wenn $a=-b$) convergiren, denn da

$$S_1=\frac{1}{a(a+b)(a+2b)}+\frac{1}{(a+b)(a+2b)(a+3b)}+\frac{1}{(a+2b)(a+3b)(a+4b)}\dots=\frac{1}{2ab(a+b)},$$

und $S<S_1$ ist, so folgt hieraus, dafs S immer kleiner als $\frac{1}{2ab(a+b)}$ ist. Man hat

$$\frac{1}{[a+mb][a+(m+1)b][a+(m+2)b]}=\frac{1}{2b^2}\left(\frac{1}{a+mb}-\frac{2}{a+(m+1)b}+\frac{1}{a+(m+2)b}\right).$$

Setzt man nach einander für m die Werthe 0, 2, 4, u. s. w., so erhält man die einzelnen Glieder der Reihe S, und es ist daher:

$$S=\frac{1}{2b^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{2}{a+b}+\frac{2}{a+2b}-\frac{2}{a+3b}\dots\right).$$

Setzt man daher

$$T=x^{a+b-1}-x^{a+2b-1}+x^{a+3b-1}\dots=\frac{x^{a+b-1}}{1+x^b},$$

---

*) Man vergl. Eytelwein's Analysis Bd. I. §. 386.

**) Andeutungen zur Summation dieser Reihe findet man in einer Preisschrift von Ed. Schrader: „*de summatione ser.* $\frac{1}{b(b+d)}+\frac{1}{(b+d)(b+2d)}\dots$

so ist

$$\int T\partial x = \frac{x^{a+b}}{a+b} - \frac{x^{a+2b}}{a+2b} + \frac{x^{a+3b}}{a+3b} \ldots\ldots = \int \frac{x^{a+b-1}\partial x}{1+x^b},$$

folglich hat man

$$\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+3b} \ldots\ldots = \int_0^1 \frac{x^{a+b-1}\partial x}{1+x^b}$$

und

$$S = \frac{1}{2ab^2} - \frac{1}{b^2}\int_0^1 \frac{x^{a+b-1}\partial x}{1+x^b} = \frac{1}{b^2}\int_0^1 \frac{x^{a-1}\partial x}{1+x^b} - \frac{1}{2ab^2}.$$

Ist z. B. $a = 1$, $b = 1$, so hat man

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{5.6.7} \ldots\ldots = \text{log.nat.}\,2 - \tfrac{1}{2};$$

ist $a = 2$, $b = 1$, so hat man

$$\frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8} \ldots\ldots = \tfrac{3}{4} - \text{log.nat.}\,2 \text{ *)}.$$

2. Summation der Reihe

$$S = \frac{1}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)} + \frac{1}{(a+3b)(a+4b)(a+5b)(a+6b)} \ldots\ldots$$

Man findet auf ähnliche Weise wie im vorigen Beispiele:

$$\frac{1}{[a+mb][a+(m+1)b][a+(m+2)b][a+(m+3)b]} =$$
$$\frac{1}{6b^3}\left(\frac{1}{a+mb} - \frac{3}{a+(m+1)b} + \frac{3}{a+(m+2)b} - \frac{1}{a+(m+3)b}\right),$$

also ist

$$S = \frac{1}{6b^3}\left(\frac{1}{a} - \frac{3}{a+b} + \frac{3}{a+2b} - \frac{3}{a+4b} + \frac{3}{a+5b} - \frac{3}{a+7b} \ldots\ldots\right).$$

Man setze

$$T = x^{a+b-1} + x^{a+4b-1} + x^{a+7b-1} \ldots\ldots = \frac{x^{a+b-1}}{1-x^{3b}},$$
$$T_1 = x^{a+2b-1} + x^{a+5b-1} + x^{a+8b-1} \ldots\ldots = \frac{x^{a+2b-1}}{1-x^{3b}},$$

so ist

$$\int_0^1 T\partial x = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+4b} + \frac{1}{a+7b} \ldots\ldots = \int_0^1 \frac{x^{a+b-1}\partial x}{1-x^{3b}},$$
$$\int_0^1 T_1\partial x = \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+5b} + \frac{1}{a+8b} \ldots\ldots = \int_0^1 \frac{x^{a+2b-1}\partial x}{1-x^{3b}},$$

und

$$S = \frac{1}{6b^3}\left(\frac{1}{a} - 3\int_0^1 \frac{x^{a+b-1}\partial x}{1-x^{3b}} + 3\int_0^1 \frac{x^{a+2b-1}\partial x}{1-x^{3b}}\right) = \frac{1}{6b^3}\left(\frac{1}{a} - 3\int_0^1 \frac{x^{a+b-1}\partial x}{1+x+x^2}\right).$$

---

*) Dieselbe Summe dieser zwei Reihen hat Littrow auf indirectem Wege gefunden. Vergl. *mém. de l'acd. de Petersb.* T. 7. pag. 138.

Setzt man $a = 1$, $b = 1$, so hat man

$$\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{4.5.6.7} + \frac{1}{7.8.9.10} \ldots\ldots = \tfrac{1}{6}\left(1 - 3\int_0^1 \frac{x\,\partial x}{1+x+x^2}\right);$$

Nun ist

$$\int \frac{x\,\partial x}{1+x+x^2} = \tfrac{1}{2}\,\text{log.\,nat.}\,(1+x+x^2) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arc tang}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right),$$

also

$$\int_0^1 \frac{x\,\partial x}{1+x+x^2} = \tfrac{1}{2}\,\text{log.\,nat.}\,3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\text{arc tang}\sqrt{3} - \text{arc tang}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

und daher, da $\text{arc tang}\sqrt{3} = 60^0$, $\text{arc tang}\frac{1}{\sqrt{3}} = 30^0$ die Summe der Reihe
$= \frac{1}{6} - \frac{1}{4}\,\text{log.\,nat.}\,3 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}$.

3. Nach diesen Erörterungen ist es leicht, auch die Summe der allgemeinen Reihe:

$$S = \frac{1}{a(a+b)(a+2b)\ldots\ldots(a+Rb)} + \frac{1}{(a+Rb)\ldots\ldots(a+2Rb)} \ldots\ldots$$

zu geben.

Man bemerke zuvörderst, dafs diese Reihe für alle endlichen positiven Werthe von a und b convergirt, weil ihr Werth immer kleiner ist als der Werth der Reihe

$$\frac{1}{a(a+b)\ldots(a+Rb)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)\ldots a+(R+1)b} + \ldots + \frac{1}{(a+b)\ldots(a+2Rb)}\ldots,$$

deren Summe durch einen endlichen Ausdruck bestimmt wird *).

Alle Glieder der Reihe sind in dem allgemeinen Ausdruck

$$\frac{1}{[a+mb][a+(m+1)b]\ldots[a+(m+R)b]}$$

enthalten, wenn man statt m nach einander die Werthe 0, R, $2R$ u. s. w. setzt. Dieser Ausdruck ist aber, wie sich leicht zeigen läfst =

$$\frac{1}{R!b^R}\left(\frac{1}{a+mb} - \frac{{}^R\overset{1}{\mathfrak{B}}}{a+(m+1)b} + \frac{{}^R\overset{2}{\mathfrak{B}}}{a+(m+2)b} - \ldots \mp \frac{{}^R\overset{1}{\mathfrak{B}}}{a+(m+R-1)b} \pm \frac{1}{a+(m+R)b}\right)\ldots(V),$$

wo $R!$ das Product $1.2\ldots.R$, und ${}^R\overset{r}{\mathfrak{B}}$ den cten zur Potenz R gehörenden Binomialcoefficienten bedeutet, und das obere oder untere Zeichen genommen werden mufs, je nachdem R eine gerade oder ungerade Zahl ist. Ist dieser Ausdruck für irgend einen Werth R richtig, so ist er es auch für den Werth $R+1$. Denn man erhält unmittelbar aus demselben

*) Man findet denselben z. B. bei Eytelwein a. a. O. §. 405. u. 411.

$$\frac{1}{[a+(m+1)b]\ldots.[a+(m+R+1)b]} =$$

$$\frac{1}{R!\,b^R}\left(\frac{1}{a+(m+1)b} - \frac{{}^{R}\overset{1}{\mathfrak{B}}}{a+(m+2)b} \ldots. \pm \frac{1}{a+(m+R+1)b}\right) \ldots.(V_1).$$

Es ist aber

$$\frac{1}{(a+mb)\ldots.[a+(m+R+1)b]}$$

$$= \frac{1}{b.(R+1)}\left(\frac{1}{(a+mb)\ldots.[a+(m+R)b]} - \frac{1}{[a+(m+1)b]\ldots.[a+(m+R+1)b]}\right)$$

$$= \frac{1}{b(R+1)}.(V-V_1).$$

Zieht man daher V_1 von V ab, indem man die Glieder, die gleiche Nenner haben, verbindet, und erinnert sich, dafs ${}^{R}\overset{r}{\mathfrak{B}} + {}^{R}\overset{r+1}{\mathfrak{B}} = {}^{R+1}\overset{r+1}{\mathfrak{B}}$ ist, so hat man

$$\frac{1}{(a+mb)\ldots.[a+(m+R+1)b]} =$$

$$\frac{1}{(R+1)!\,b^{R+1}}\left(\frac{1}{a+mb} - \frac{{}^{R+1}\overset{1}{\mathfrak{B}}}{a+(m+1)b} + \frac{{}^{R+1}\overset{2}{\mathfrak{B}}}{a+(m+2)b} \ldots. \mp \frac{1}{a+(m+R+1)b}\right).$$

Nun ist der Ausdruck (V), wie aus dem Früheren erhellt, wirklich für die Werthe $R=2$, $R=3$ richtig. Er gilt daher für alle Werthe von R in ganzen Zahlen. Hieraus folgt

$$S = \frac{1}{R!\,b^R}\Big[\frac{1}{a} - {}^{R}\overset{1}{\mathfrak{B}}\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+(R+1)b}\ldots.\right) + {}^{R}\overset{2}{\mathfrak{B}}\left(\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+(R+2)b}\ldots.\right)\ldots.$$
$$\ldots. + 2\left(\frac{1}{a+Rb} + \frac{1}{a+2Rb}\ldots.\right)\Big],$$

oder

$$S = \frac{1}{R!\,b^R}\Big[\frac{1}{a} - {}^{R}\overset{1}{\mathfrak{B}}\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+(R+1)b}\ldots.\right) + {}^{R}\overset{2}{\mathfrak{B}}\left(\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+(R+2)b}\ldots.\right)\ldots.$$
$$\ldots. + {}^{R}\overset{1}{\mathfrak{B}}\left(\frac{1}{a+(R-1)b} + \frac{1}{a+(2R-1)b}\ldots.\right)\Big],$$

je nachdem R eine gerade oder ungerade Zahl ist. Im ersten Falle ist daher

$$S = \frac{1}{R!\,b^R}\left[\frac{1}{a} - {}^{R}\overset{1}{\mathfrak{B}}\int_0^1 \frac{x^{a+b-1}\partial x}{1-x^{Rb}} + {}^{R}\overset{2}{\mathfrak{B}}\int_0^1 \frac{x^{a+2b-1}\partial x}{1-x^{Rb}} \ldots + 2\int_0^1 \frac{x^{a+Rb-1}\partial x}{1-x^{Rb}}\right];$$

im zweiten

$$S = \frac{1}{R!\,b^R}\left[\frac{1}{a} - {}^{R}\overset{1}{\mathfrak{B}}\int_0^1 \frac{x^{a+b-1}\partial x}{1-x^{Rb}} \ldots. + {}^{R}\overset{1}{\mathfrak{B}}\int_0^1 \frac{x^{a+(R-1)b-1}\partial x}{1-x^{Rb}}\right].$$

Ist z. B. $R=2$, so hat man

$$S = \frac{1}{2b^2}\left[\frac{1}{a} - 2\int_0^1 \frac{x^{a+b-1}\partial x}{1-x^{2b}} + 2\int_0^1 \frac{x^{a+2b-1}\partial x}{1-x^{2b}}\right] = \frac{1}{2ab^2} - \frac{1}{b^2}\int_0^1 \frac{x^{a+b-1}\partial x}{1-x^b},$$

wie schon gefunden wurde.

4. Summation der Reihe

$$S = \frac{1}{a(a+b)\ldots.(a+Rb)} - \frac{1}{(a+Rb)\ldots.(a+2Rb)} + \frac{1}{(a+2Rb)\ldots.(a+3Rb)} - \ldots.$$

Diese Reihe mufs gleichfalls für alle endliche positive Werthe von a und b convergiren, weil ihr Werth zwischen dem positiv und negativ genommenen Werthe der vorhergehenden Reihe liegt. Nach den Bemerkungen der vorhergehenden Nummer findet man

$$S = \frac{1}{R!b^R}\Big[\frac{1}{a} - {}^{R}\overset{1}{\mathfrak{B}}\Big(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+(R+1)b}\ldots.\Big) + {}^{R}\overset{2}{\mathfrak{B}}\Big(\frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+(R+2)b}\ldots.\Big)\ldots.$$
$$\ldots. - {}^{R}\overset{1}{\mathfrak{B}}\Big(\frac{1}{a+(R-1)b} - \frac{1}{a+(2R-1)b}\Big)\Big],$$

oder

$$S = \frac{1}{R!b^R}\Big[\frac{1}{a} - {}^{R}\overset{1}{\mathfrak{B}}\Big(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+(R+1)b}\ldots.\Big) + {}^{R}\overset{2}{\mathfrak{B}}\Big(\frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+(R+2)b}\ldots.\Big)\ldots.$$
$$\ldots. - 2\Big(\frac{1}{a+Rb} + \frac{1}{a+2Rb}\ldots.\Big)\Big],$$

je nachdem R eine gerade oder ungerade Zahl ist; also hat man im ersten Falle:

$$S = \frac{1}{R!b^R}\Big[\frac{1}{a} - {}^{R}\overset{1}{\mathfrak{B}}\int_0^1 \frac{x^{a+b-1}\partial x}{1+x^{Rb}} + {}^{R}\overset{2}{\mathfrak{B}}\int_0^1 \frac{x^{a+2b-1}\partial x}{1+x^{Rb}}\ldots. - {}^{R}\overset{1}{\mathfrak{B}}\int_0^1 \frac{x^{a+(R-1)b-1}\partial x}{1+x^{Rb}}\Big],$$

und im zweiten:

$$S = \frac{1}{R!b^R}\Big[\frac{1}{a} - {}^{R}\overset{1}{\mathfrak{B}}\int_0^1 \frac{x^{a+b-1}\partial x}{1+x^{Rb}} + \ldots. - 2\int_0^1 \frac{x^{a+Rb-1}\partial x}{1+x^{Rb}}\Big].$$

Ist z. B. $a=1$, $b=1$, $R=2$, so hat man:

$$S = \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{5.6.7}\ldots. = \frac{1}{2}\Big(1 - 2\int_0^1 \frac{x\,\partial x}{1+x^2}\Big) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 2;$$

ist $a=2$, $b=1$, $R=2$, so ist

$$S = \frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8}.\ldots = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2} - 2\int_0^1 \frac{x^2\partial x}{1+x^2}\Big) = \text{arc tang}\,1 - \frac{3}{4} = \frac{\pi-3}{4}\;{}^{*}).$$

5. Verbindet man die Reihen aus Nummer 3. und 4. durch Addition, so findet man sogleich die convergirende Reihe

$$\frac{1}{a(a+b)\ldots.(a+Rb)} + \frac{1}{(a+2Rb)\ldots.(a+3Rb)} + \frac{1}{(a+4Rb)\ldots.(a+5Rb)} =$$
$$\frac{1}{R!b^R}\Big[\frac{1}{a} - {}^{R}\overset{1}{\mathfrak{B}}\Big(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+(2R+1)b} + \frac{1}{a+(4R+1)b}\ldots.\Big)\ldots.$$
$$\ldots. - {}^{R}\overset{1}{\mathfrak{B}}\Big(\frac{1}{a+(R-1)b} + \frac{1}{a+(3R-1)b}\ldots.\Big) + \Big(\frac{1}{a+Rb} + \frac{1}{a+2Rb}\ldots.\Big)\Big];$$

---

*) Denselben Werth dieser Reihe hat auch **Littrow** a. a. O. auf indirectem Wege gefunden.

oder $= \quad \frac{1}{R!\,b^R}\Big[\frac{1}{a} - {}^{R}\overset{1}{\mathfrak{B}}\Big(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+(2R+1)b}\ldots\Big)\ldots$

$\ldots + {}^{R}\overset{1}{\mathfrak{B}}\Big(\frac{1}{a+(R-1)b} + \frac{1}{a+(3R-1)b}\Big) - \Big(\frac{1}{a+Rb} + \frac{1}{a+2Rb}\ldots\Big)\Big],$

je nachdem R eine gerade oder ungerade Zahl ist. Also ist im ersten Falle

$$S = \frac{1}{R!\,b^R}\Big[\frac{1}{a} - {}^{R}\overset{1}{\mathfrak{B}}\int_0^1 \frac{x^{a+b-1}\,\partial x}{1-x^{2Rb}} + \ldots - {}^{R}\overset{1}{\mathfrak{B}}\int_0^1 \frac{x^{a+(R-1)b-1}\,\partial x}{1-x^{2Rb}} + \int_0^1 \frac{x^{a+Rb-1}\,\partial x}{1-x^{Rb}}\Big]$$

und im zweiten

$$S = \frac{1}{R!\,b^R}\Big[\frac{1}{a} - {}^{R}\overset{1}{\mathfrak{B}}\int_0^1 \frac{x^{a+b-1}\,\partial x}{1-x^{2Rb}} \ldots + {}^{R}\overset{1}{\mathfrak{B}}\int_0^1 \frac{x^{a+(R-1)b-1}\,\partial x}{1-x^{2Rb}} - \int_0^1 \frac{x^{a+Rb-1}\,\partial x}{1-x^{Rb}}\Big].$$

Setzt man z. B. $a=2$, $b=1$, $R=2$, so hat man:

$$S = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{6.7.8} + \frac{1}{10.11.12}\ldots = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2} - 2\int_0^1 \frac{x^2\,\partial x}{1-x^4} + \int_0^1 \frac{x^3\,\partial x}{1-x^2}\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\text{ arc. tang. } 1 - \frac{1}{2}\text{ log. nat. } 2 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\text{ log. nat. } 2\ ^{*}).$$

6. Es ist nun leicht, auch die Summe der Reihe:

$$S = \frac{1}{a(a+b)\ldots(a+Rb)} + \frac{1}{[a+(R+1)b]\ldots[a+(2R+1)b]} + \frac{1}{[a+(2R+2)b]\ldots[a+(3R+2)b]}\ldots$$

zu finden. Diese Reihe convergirt ebenfalls, für alle endlichen positiven Werthe von a und b, was man eben so wie in 3. beweisen kann.

Man erhält alle Glieder dieser Reihe aus dem Ausdrucke

$$\frac{1}{(a+mb)\ldots a+(m+R)b},$$

wenn man statt m allmählig die Werthe 0, $R+1$, $2R+2$ u. s. w. substituirt. Es ist daher

$$S = \frac{1}{R!\,b^R}\Big[\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+(R+1)b} + \frac{1}{a+(2R+2)b}\ldots\Big) - {}^{R}\overset{1}{\mathfrak{B}}\Big(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+(R+2)b} + \frac{1}{a+(2R+3)b}\ldots\Big)$$

$$\ldots \mp {}^{R}\overset{1}{\mathfrak{B}}\Big(\frac{1}{a+(R-1)b} + \frac{1}{a+2Rb}\ldots\Big) \pm \Big(\frac{1}{a+Rb} + \frac{1}{a+(2R+1)b}\ldots\Big)\Big],$$

je nachdem R gerade oder ungerade ist, also unter denselben Umständen

$$S = \frac{1}{R!\,b^R}\Big[\int_0^1 \frac{x^{a-1}\,\partial x}{1-x^{(R+1)b}} - {}^{R}\overset{1}{\mathfrak{B}}\int_0^1 \frac{x^{a+b-1}\,\partial x}{1-x^{(R+1)b}}\ldots \mp {}^{R}\overset{1}{\mathfrak{B}}\int_0^1 \frac{x^{a+(R-1)b-1}\,\partial x}{1-x^{(R+1)b}} \pm \int_0^1 \frac{x^{a+Rb-1}}{1-x^{(R+1)b}}\Big].$$

Ist z. B. $a=1$, $b=1$, $R=2$, so ist $S = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{7.8.9}\ldots =$

$$\frac{1}{2}\Big[\int_0^1 \frac{\partial x}{1-x^3} - 2\int_0^1 \frac{x\,\partial x}{1-x^3} + \int_0^1 \frac{x^2\,\partial x}{1-x^3}\Big] = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1-x)\,\partial x}{1+x+x^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{6} - \frac{\text{log. nat. } 3}{4} \quad\text{oder}\quad = \frac{\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \text{log. nat. } 3}{4},$$

*) Auch diese Reihe hat Littrow am angeführten Orte gefunden.

weil $\int \frac{(1-x)\partial x}{1+x+x^2} = \sqrt{3}.\text{arc. tang.}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\text{log. nat.}(x^2+x+1)$ ist.

7. Hätte man hingegen die Reihe

$$S = \frac{1}{a(a+b)\ldots a+Rb} - \frac{1}{[a+(R+1)b]\ldots[a+(2R+1)b]} + \frac{1}{[a+(2R+2)b]\ldots[a+(3R+2)b]}\ldots,$$

so hätte man, je nachdem R eine gerade oder ungerade Zahl ist:

$$S = \frac{1}{R!b^R}\Big[\Big(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+(R+1)b} + \frac{1}{a+(2R+2)b}\ldots\Big) - {}^{R}\mathfrak{B}^{1}\Big(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+(R+2)b} + \frac{1}{a+(2R+3)b}\ldots\Big)$$
$$\ldots \mp {}^{R}\mathfrak{B}^{1}\Big(\frac{1}{a+(R-1)b} - \frac{1}{a+2Rb}\ldots\Big) \pm \Big(\frac{1}{a+Rb} - \frac{1}{a+(2R+1)b}\ldots\Big)\Big],$$

also

$$S = \frac{1}{R!b^R}\Big(\int_0^1 \frac{x^{a-1}\partial x}{1+x^{(R+1)b}} - {}^{R}\mathfrak{B}^{1}\int_0^1 \frac{x^{a+b-1}\partial x}{1+x^{(R+1)b}}\ldots \mp {}^{R}\mathfrak{B}^{1}\int_0^1 \frac{x^{a+(R-1)b-1}\partial x}{1+x^{(R+1)b}} \pm \int_0^1 \frac{x^{a+Rb-1}\partial x}{1+x^{(R+1)b}}\Big).$$

8. Durch ein ähnliches Verfahren kann die Summe einer Menge anderer Reihen gefunden werden, deren genauere Entwickelung ich jedoch übergehe, da sie unmittelbar aus den angegebenen Principien abgeleitet werden können. Ich bemerke nur noch, daſs auf dieselbe Weise auch die Summe von Reihen gefunden werden kann, bei welchen die Zähler der einzelnen Brüche nicht der Einheit gleich sind. Es sei z. B. die Reihe

$$S = \frac{1}{a(a+b)(a+2b)} + \frac{c^m}{(a+3b)(a+4b)(a+5b)} + \frac{c^{2m}}{(a+6b)(a+7b)(a+8b)} + \ldots$$

gegeben. Diese Reihe convergirt, sobald a und b endliche positive Zahlen sind, und c einen ächten Bruch bedeutet, wie aus 6. erhellt. Man setze

$$T = x^{a-1} + c^m.x^{a+3b-1} + c^{2m}.x^{a+6b-1}\ldots = \frac{x^{a-1}}{1-c^m.x^{3b}},$$
$$T_{,} = x^{a+b-1} + c^m.x^{a+4b-1} + c^{2m}.x^{a+7b-1}\ldots = \frac{x^{a+b-1}}{1-c^m.x^{3b}},$$
$$T_{,,} = x^{a+2b-1} + c^m.x^{a+5b-1} + c^{2m}.x^{a+8b-1}\ldots = \frac{x^{a+2b-1}}{1-c^m.x^{3b}}$$

und

$$\int T\partial x = \int \frac{x^{a-1}\partial x}{1-c^m.x^{3b}} = \frac{x^a}{a} + \frac{c^m.x^{a+3b}}{a+3b}\ldots$$
$$\int T_{,}\partial x = \int \frac{x^{a+b-1}\partial x}{1-c^m.x^{3b}} = \frac{x^{a+b}}{a+b} + \frac{c^m\,x^{a+4b}}{a+4b}\ldots$$
$$\int T_{,,}\partial x = \int \frac{x^{a+2b-1}\partial x}{1-c^m.x^{3b}} = \frac{x^{a+2b}}{a+2b} + \frac{c^m.x^{a+5b}}{a+5b}\ldots$$

Vermöge des Ausdrucks (V) in Nummer 3. findet man

$$S = \frac{1}{2b^2}\Big[\Big(\frac{1}{a} + \frac{c^m}{a+3b} + \frac{c^{2m}}{a+6b}\ldots\Big) - 2\Big(\frac{1}{a+b} + \frac{c^m}{a+4b} + \frac{c^{2m}}{a+7b}\ldots\Big)$$
$$+ \Big(\frac{1}{a+2b} + \frac{c^m}{a+5b} + \frac{c^{2m}}{a+8b}\ldots\Big)\Big],$$

folglich ist

$$S = \frac{1}{2b^2}\left(\int_0^1 \frac{x^{a-1}\partial x}{1-c^m.x^{3b}} - 2\int_0^1 \frac{x^{a+b-1}\partial x}{1-c^m.x^{3b}} + \int_0^1 \frac{x^{a+2b-1}\partial x}{1-c^m.x^{3b}}\right).$$

9. Eben so leicht kann man auf demselben Wege die Summe einer großen Anzahl von Reihen finden, die nach den Sinus und Cosinus vielfacher Bogen fortgehen. Als einfaches Beispiel wähle ich die Reihe

$$S = \frac{1}{a(a+b)(a+2b)}\sin 2A - \frac{1}{(a+b)(a+2b)(a+3b)}\sin 3A + \frac{1}{(a+2b)(a+3b)(a+4b)}\sin 4A \ldots.$$

Setzt man statt $\sin mA$ den gleichgeltenden Ausdruck $\frac{e^{mA\sqrt{-1}} - e^{-mA\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, und ruft die Formel ($V$) in Nummer 3. zu Hülfe, so findet man

$$S = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot\frac{1}{2b^2}\Big[\Big(\frac{1}{a}.e^{2A\sqrt{-1}} - \frac{1}{a+b}.e^{3A\sqrt{-1}} + \frac{1}{a+2b}.e^{4A\sqrt{-1}} \ldots\Big)$$

$$-2\Big(\frac{1}{a+b}.e^{2A\sqrt{-1}} - \frac{1}{a+2b}.e^{3A\sqrt{-1}} + \ldots\Big) + \Big(\frac{1}{a+2b}.e^{2A\sqrt{-1}} - \frac{1}{a+3b}.e^{3A\sqrt{-1}} + \ldots\Big)\Big]$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot\frac{1}{2b^2}\Big[\Big(\frac{1}{a}.e^{-2A\sqrt{-1}} - \frac{1}{a+b}.e^{-3A\sqrt{-1}} + \frac{1}{a+2b}.e^{-4A\sqrt{-1}} \ldots\Big)$$

$$-2\Big(\frac{1}{a+b}\,e^{-2A\sqrt{-1}} - \frac{1}{a+2b}.e^{-3A\sqrt{-1}} + \ldots\Big) + \Big(\frac{1}{a+2b}.e^{-2A\sqrt{-1}} - \frac{1}{a+3b}.e^{-3A\sqrt{-1}} + \ldots\Big)\Big].$$

Nun ist

$$x^{a-1}.e^{2A\sqrt{-1}} - x^{a+b-1}.e^{3A\sqrt{-1}} + x^{a+2b-1}.e^{4A\sqrt{-1}} \ldots = \frac{x^{a-1}.e^{2A\sqrt{-1}}}{1+x^b.e^{A\sqrt{-1}}},$$

$$x^{a+b-1}.e^{2A\sqrt{-1}} - x^{a+2b-1}.e^{3A\sqrt{-1}} + x^{a+3b-1}.e^{4A\sqrt{-1}} \ldots = \frac{x^{a+b-1}.e^{2A\sqrt{-1}}}{1+x^b.e^{A\sqrt{-1}}},$$

$$x^{a+2b-1}.e^{2A\sqrt{-1}} - x^{a+3b-1}.e^{3A\sqrt{-1}} + x^{a+4b-1}.e^{4A\sqrt{-1}} \ldots = \frac{x^{a+2b-1}.e^{2A\sqrt{-1}}}{1+x^b.e^{A\sqrt{-1}}},$$

also

$$S = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot\frac{1}{2b^2}\Big[\int_0^1 \frac{x^{a-1}.e^{2A\sqrt{-1}}\partial x}{1+x^b.e^{A\sqrt{-1}}} - 2\int_0^1 \frac{x^{a+b-1}.e^{2A\sqrt{-1}}\partial x}{1+x^b.e^{A\sqrt{-1}}} + \int_0^1 \frac{x^{a+2b-1}.e^{2A\sqrt{-1}}\partial x}{1+x^b.e^{A\sqrt{-1}}}\Big]$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot\frac{1}{2b^2}\Big[\int_0^1 \frac{x^{a-1}.e^{-2A\sqrt{-1}}\partial x}{1+x^b.e^{-A\sqrt{-1}}} - 2\int_0^1 \frac{x^{a+b-1}.e^{-2A\sqrt{-1}}\partial x}{1+x^b.e^{-A\sqrt{-1}}} + \int_0^1 \frac{x^{a+2b-1}.e^{-2A\sqrt{-1}}\partial x}{1+x^b.e^{-A\sqrt{-1}}}\Big].$$

Setzt man $a=1$, $b=1$, so hat man

$$S = \frac{1}{1.2.3}\sin 2A - \frac{1}{2.3.4}\sin 3A + \frac{1}{3.4.5}\sin 4A \ldots$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot\frac{1}{2}\Big[\int_0^1 \frac{e^{2A\sqrt{-1}}(1-x)^2\partial x}{1+x.e^{A\sqrt{-1}}} - \int_0^1 \frac{e^{-2A\sqrt{-1}}(1-x)^2\partial x}{1+x.e^{-A\sqrt{-1}}}\Big],$$

woraus man nach bekannten Regeln $S = \frac{A}{2}(1+\cos A) - \frac{3}{4}\sin A$ findet *).

Göttingen, im September 1831.

---

*) Denselben Werth dieser einzelnen Reihe hat Littrow a. a. O. auf ganz verschiedenem Wege gefunden.

15.

Analytisch-geometrische Aphorismen.

(Vom Herrn Prof. *Plücker* zu Berlin.)

I.

Einige Beispiele von der Anwendung allgemeiner Symbole und unbestimmter Coefficienten.

1. Ich habe schon bei mehreren Gelegenheiten hervorgehoben, wie solche Sätze über gerade Linien, welche von Gröfsen-Bestimmungen unabhängig sind, sich durch die Anwendung bloßser Symbole, die an die Stelle linearer Gleichungen treten, und unbestimmter Coefficienten, beweisen lassen. Beweise dieser Art scheinen mir besonders zierlich. So wie ein hierher gehöriger Satz vorliegt, können wir die Voraussetzungen desselben durch Symbole und unbestimmte Coefficienten ausdrücken, und dann ist der Weg für den Beweis desselben sogleich angezeigt. Man kann sagen, dafs ein solcher Beweis ein so rein synthetischer ist, wie man sonst derselben nicht leicht findet. Es war ursprünglich meine Absicht, eine dritte Abtheilung des zu Anfang dieses Jahres erschienenen zweiten und letzten Bandes meiner „analytisch-geometrischen Entwickelungen" diesem Gegenstande und namentlich der Verallgemeinerung desselben zu widmen. Ich will hier durch ein paar Beispiele den Charakter dieser Art von Beweisführungen noch in ein helleres Licht zu stellen suchen.

2. Der folgende Satz ist allgemein bekannt und gehört zu den wichtigeren der Situations-Geometrie.

Wenn drei in demselben Puncte (O) sich schneidende gerade Linien gegeben sind, und man legt von irgend einem Puncte (M) der dritten Linie zwei neue gerade Linien (MAA', MBB'), von welchen die erste gegebene in zwei Puncten (A und B), und die zweite in zwei andern Puncten (A' und B') geschnitten wird, so liegt der Durchschnitt von $A'B$ und AB', wo auch der Punct M auf der dritten gegebenen geraden Linie fortrücken mag, und wie auch die beiden durch diesen Punct gelegten geraden Linien ihre Richtung verändern

mögen, auf einer festen vierten geraden Linie, die ebenfalls durch den Punct O geht.

Indem wir Ausdrücke von der Form $(Ay+Bx+C)$ durch die Symbole c und c' bezeichnen, können wir die drei gegebenen, in demselben Puncte sich schneidenden, geraden Linien durch folgende Gleichungen darstellen:

$$c=0, \quad c'=0, \quad c+c'=0.$$

Wenn bei ähnlicher Bezeichnung, die beiden neuen durch M, einen Punct der geraden Linie: $c+c'=0$, gehenden geraden Linien durch

$$a=0, \quad b=0$$

dargestellt werden, so können wir, um die Bedingung des Satzes auszudrücken,

$$a+b=c+c'$$

setzen. Aus dieser identischen Gleichung ergeben sich folgende beiden:

$$a-c'=c-b,$$
$$a-c=c'-b.$$

Die beiden Gleichungen

$$a-c'=c-b=0,$$
$$a-c=c'-b=0$$

stellen folglich die geraden Linien $A'B$ und AB' dar. Denn, die erste dieser Gleichungen, zum Beispiel, stellt eine solche gerade Linie dar, die einerseits durch den Durchschnitt von $a=0$ und $c'=0$, oder den Punct A', und andererseits durch den Durchschnitt von $b=0$ und $c=0$, oder den Punct B, geht.

Wenn wir die beiden letzten Gleichungen von einander abziehen, so kömmt:

$$c-c'=0:$$

die Gleichung einer neuen geraden Linie, die, was diese Gleichung zeigt, durch den gemeinschaftlichen Durchschnitt der drei gegebenen geht. Aus dieser Gleichung sind die Symbole a und b ganz verschwunden, und somit ist der vorliegende Satz bewiesen.

Wir haben in dem Vorstehenden keiner unbestimmten Coefficienten bedurft, weil wir Ausdrücke von der Form $(Ay+Bx+C)$ durch Symbole bezeichnet haben. Ein solches Symbol enthält implicite schon einen unbestimmten Coefficienten, weil solche Ausdrücke einen Coefficienten mehr enthalten, als Coefficienten zur Bestimmung einer gegebenen geraden Linie nothwendig sind.

3. **Es seien in derselben Ebene sechs Puncte gegeben, von welchen drei auf einer, und die drei übrigen auf einer andern geraden Linie liegen. Man kann die drei Puncte der einen geraden Linie mit den drei Puncten der andern durch neun neue gerade Linien verbinden. Diese neun gerade Linien schneiden sich, paarweise genommen, in achtzehn neuen Puncten. Diese achtzehn Puncte liegen zu drei auf sechs geraden Linien vertheilt. Diese sechs geraden Linien gehen zu drei durch dieselben beiden Puncte.**

Wir wollen den Beweis ganz direct angreifen, und schrittweise vorwärtsgehen; also zuerst die Gleichungen derjenigen neun geraden Linien entwickeln, welche die drei Puncte (I, II, III) auf der ersten gegebenen geraden Linie (G) mit den drei Puncten (1, 2, 3) auf der zweiten geraden Linie (H) verbinden. Diese neun geraden Linien wollen wir durch (I, 1), (I, 2), (I, 3), (II, 1), (II, 2), (II, 3), (III, 1), (III, 2), (III, 3) bezeichnen. Wir erhalten die Gleichungen aller dieser geraden Linien durch Hülfe dreier Symbole und vier unbestimmter Coefficienten. Zu diesem Ende seien die Gleichungen der beiden gegebenen geraden Linien (G) und (H):

$$g = 0, \qquad h = 0,$$

und die Gleichung einer von jenen neun geraden Linien, für die wir (I, 2) nehmen wollen, sei

$$(\mathrm{I}, 2) \qquad a = 0.$$

Durch diese drei geraden Linien sind die beiden Puncte (I) und (2) bestimmt. Für (I, 3) erhalten wir alsdann eine Gleichung von folgender Form:

$$(\mathrm{I}, 3) \qquad a + \mu g = 0.$$

Durch den Coefficienten μ ist diese gerade Linie, und also auch ihr Durchschnitt mit (H), der Punct (3), bestimmt. Durch den Punct (3) geht die gerade Linie (II, 3); durch Einführung eines neuen unbestimmten Coefficienten erhält man für ihre Gleichung:

$$(\mathrm{II}, 3) \qquad a + \mu g + \nu h = 0.$$

Durch diese gerade Linie ist der Punct (II) bestimmt.

Ganz auf dieselbe Weise erhält man für (III, 2):

$$(\mathrm{III}, 2) \qquad a + \varrho h = 0,$$

und hiernach für (III, 1)

$$(\mathrm{III}, 1) \qquad a + \sigma g + \varrho h = 0.$$

29 *

Wir sind also ursprünglich von den beiden geraden Linien (G) und (H) und von (I, 2) ausgegangen. Hierdurch sind die beiden Puncte (1) und (2) gegeben. Durch (I) legen wir die gerade Linie (I, 3), wodurch auf (H) der Punct (3) bestimmt wird, durch (3) legen wir (II, 3), wodurch auf (G) der Punct (II) bestimmt wird. Durch (2) legen wir (III, 2) wodurch auf (G) der Punct (III), und durch (III) legen wir (III, 1), wodurch auf (H) der Punct (1) bestimmt wird. Um die Gleichung einer geraden Linie zu erhalten, deren Richtung nicht näher bestimmt ist, die aber durch den Durchschnitt zweier bekannter geraden Linien geht, bedarf man bloſs eines neuen unbestimmten Coefficienten. Die sechs Puncte (I), (II), (III) und (1), (2), (3) sind also durch die drei Symbole a, g, h und durch vier Coefficienten μ, ν, ϱ und σ gegeben. Den Voraussetzungen des vorstehenden Satzes gemäſs bedeuten a, g, h **beliebige** lineare Ausdrücke in y und x, und μ, ν, ϱ und σ bleiben ganz unbestimmt. Wenn wir nun aber die eben genannten sechs Puncte noch durch neue gerade Linien verbinden, so müssen sich diese nothwendig durch solche Gleichungen ausdrücken lassen, welche bloſs dieselben drei Symbole und dieselben vier unbestimmten Coefficienten enthalten. Ja noch mehr, wenn wir die Durchschnittspuncte der verschiedenen Verbindungs-Linien, paarweise genommen, durch neue gerade Linien verbinden, dann wieder neue gerade Linien durch neue Paare von Durchschnittspuncten legen, und auf diese Weise beliebig fortfahren, so erhalten wir für jede solche gerade Linie eine Gleichung von folgender Form:

$$Ma + Ng + Ph = 0,$$

in der M, N und P bestimmte Functionen der vier unbestimmten Coefficienten μ, ν, ϱ und σ sind.

Für die noch nicht bestimmten vier Verbindungs-Linien erhalten wir folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} &(\text{II}, 1) \quad & a + \sigma g + \nu h &= 0, \\ &(\text{I}, 1) & a + \sigma g &= 0, \\ &(\text{II}, 2) & a + \nu h &= 0, \\ &(\text{III}, 3) & a + \mu g + \varrho h &= 0. \end{aligned}$$

Bei einiger Übung können wir die vorstehenden Gleichungen, indem wir die frühern Gleichungen gehörig zusammenstellen, unmittelbar hinschreiben. Die erste derselben stellt diejenige gerade Linie dar, die einerseits durch den Durchschnitt von (II, 3) und (G) geht, deren Gleichungen:

$$a + \mu g + \nu h = 0, \qquad g = 0,$$

und andrerseits durch den Durchschnitt von (III, 1) und (H), deren Gleichungen

$$a + \sigma g + \varrho h = 0, \qquad h = 0$$

sind. Einerseits hat also die gesuchte Gleichung folgende Form:

$$a + \mu g + \nu h + p g = 0,$$

wobei p irgend einen unbestimmten Coefficienten bezeichnet, oder einfacher, indem wir μ mit dem unbestimmten Coefficienten zusammenfassen, folgende:

$$a + p g + \nu h = 0,$$

und andererseits hat dieselbe Gleichung folgende Form:

$$a + \sigma g + q h = 0,$$

wobei q einen neuen unbestimmten Coefficienten bedeutet. Wenn die letzten Gleichungen identisch werden sollen, so mufs, bei der Unabhängigkeit der Symbole a, g und h von einander, $p = \sigma$ und $q = \nu$ genommen werden, und es kommt:

$$a + \sigma g + \nu h = 0.$$

Auf ganz gleiche Weise ergeben sich die drei übrigen Gleichungen.

Drei Puncte, die nach dem ersten Theile des vorstehenden Satzes in gerader Linie liegen, sind die Durchschnitte folgender drei Linien-Paare:

$$A. \quad \left\{ \begin{array}{llll} (\mathrm{I}, 2) & a = 0, & (\mathrm{II}, 1) & a + \sigma g + \nu h = 0; \\ (\mathrm{II}, 3) & a + \mu g + \nu h = 0, & (\mathrm{III}, 2) & a + \varrho h = 0; \\ (\mathrm{III}, 1) & a + \sigma g + \varrho h = 0, & (\mathrm{I}, 3) & a + \mu g = 0. \end{array} \right.$$

Um diefs zu beweisen, wollen wir die Gleichung derjenigen geraden Linien entwickeln, welche durch den ersten und zweiten und durch den ersten und dritten Durchschnittspunct gehen. Weil solche zwei gerade Linien beide den ersten Durchschnittspunct enthalten, so haben ihre Gleichungen folgende Form:

$$1. \quad pa + \sigma g + \nu h = 0,$$

und der unbestimmte Coefficient p wird einmal durch die identische Gleichung

$$pa + \sigma g + \nu h = r(a + \mu g + \nu h) + s(a + \varrho h),$$

und das andere Mal durch

$$pa + \sigma g + \nu h = q(a + \sigma g + \varrho h) + t(a + \mu g)$$

bestimmt. r, s, q und t bezeichnen neue unbestimmte Coefficienten. Zu ihrer Bestimmung erhalten wir einmal folgende Gleichungen:

$$2. \quad p = r + s, \quad \sigma = r\mu, \quad \nu = r\nu + s\varrho,$$

und das andere Mal:

$$3. \quad p = q + t, \quad \sigma = q\sigma + t\mu, \quad \nu = q\varrho.$$

Wir erhalten aus den Gleichungen (2.) und den Gleichungen (3.) für p denselben Werth, nemlich:

$$p = \frac{\mu\nu + \sigma\varrho - \nu\sigma}{\mu\varrho},$$

und hiernach geht die Gleichung (1.) in folgende über:

$$4. \quad (\mu\nu + \sigma\varrho - \nu\sigma)a + \mu\varrho\sigma g + \mu\varrho\nu h = 0,$$

und stellt mithin eine solche gerade Linie dar, welche durch alle drei in Rede stehende Durchschnittspuncte geht.

Andere Gruppen dreier in gerader Linie liegende Durchschnittspuncte ergeben sich, wenn wir die Puncte (I), (II), (III), so wie die Puncte (1), (2), (3), beliebig untereinander vertauschen. Wenn wir insbesondere (II) mit (III), und (1) mit (3) gegenseitig vertauschen, so erhalten wir statt der drei Linien-Paare (A) nun folgende:

$$B. \begin{cases} (\text{I}, 2) & a = 0, & (\text{III}, 3) & a + \mu g + \varrho h = 0; \\ (\text{III}, 1) & a + \sigma g + \varrho h = 0, & (\text{II}, 2) & a + \nu h = 0; \\ (\text{II}, 3) & a + \mu g + \nu h = 0, & (\text{I}, 1) & a + \sigma g = 0. \end{cases}$$

Man sieht sogleich, daſs der Übergang von den Gleichungen (A) zu den Gleichungen (B) durch gegenseitige Vertauschung von σ mit μ und von ϱ mit ν geschieht. Aus (4.) ergiebt sich hiernach sogleich für diejenige gerade Linie, welche die drei neuen Durchschnittspuncte enthält, folgende Gleichung:

$$5. \quad (\mu\nu + \sigma\varrho - \mu\varrho)a + \mu\nu\sigma g + \sigma\varrho\nu h = 0.$$

Wenn wir ferner (III) mit (I), und (2) mit (3) gegenseitig vertauschen, so erhalten wir statt der geraden Linien (A) die folgenden:

$$C. \begin{cases} (\text{III}, 3) & a + \mu g + \varrho h = 0, & (\text{II}, 1) & a + \sigma g + \nu h = 0; \\ (\text{II}, 2) & a + \nu h = 0, & (\text{I}, 3) & a + \mu g = 0; \\ (\text{I}, 1) & a + \sigma g = 0, & (\text{III}, 2) & a + \varrho h = 0. \end{cases}$$

Die Gleichung derjenigen geraden Linie, welche diese drei neuen Durchschnittspuncte enthält, hat zugleich folgende Formen:

$$a + \mu g + p(a + \nu h) = 0, \quad q(a + \sigma g) + t(a + \varrho h) = 0.$$

p, q und t sind unbestimmte Coefficienten, die so angenommen werden können, daſs die ersten Theile dieser Gleichungen identisch werden. Dieſs giebt:

$$1 + p = q + t, \quad \mu = q\sigma, \quad p\nu = t\varrho.$$

Hieraus erhalten wir ohne Mühe für p:

$$p = \frac{\mu - \sigma}{\varrho - \nu} \cdot \frac{\varrho}{\sigma},$$

und mithin für die gesuchte Gleichung:

$$6. \quad (\mu\varrho - \nu\sigma)a + (\mu\varrho\sigma - \mu\nu\sigma)g + (\mu\varrho\nu - \sigma\varrho\nu)h = 0.$$

Wenn wir die Gleichung (5.) von der Gleichung (4.) abziehen, so erhalten wir die Gleichung (6.). Die drei bezüglichen geraden Linien gehen also durch denselben Punct.

Wir haben also in dem Vorstehenden nachgewiesen, dafs folgende dreimal drei Puncte:

(I, 2), (II, 1) (II, 3), (III, 2) (III, 1), (I, 3)
(I, 2), (III, 3) (III, 1), (II, 2) (II, 3), (I, 1)
(II, 1), (III, 3) (I, 3), (II, 2) (III, 2), (I, 1)

auf drei geraden Linien liegen, und diese drei geraden Linien in demselben Puncte sich schneiden. Die übrigen dreimal drei Durchschnittspuncte, welche auf drei geraden Linien liegen, die ebenfalls wieder in demselben Puncte sich schneiden, ergeben sich, wenn wir in dem letzten Schema irgend zwei lateinische oder irgend zwei arabische Ziffern mit einander vertauschen. Es gilt gleich, welche Vertauschung dieser Art wir hier vornehmen; wir erhalten immer, nur in verschiedener Aufeinanderfolge, dieselben Puncte. Vertauschen wir (1) und (2), so kommt:

(I, 1), (II, 2) (II, 3), (III, 1) (III, 2), (I, 3)
(I, 1), (III, 3) (III, 2), (II, 1) (II, 3), (I, 2)
(II, 2), (III, 3) (I, 3), (II, 1) (III, 2), (I, 2).

Der auf diese Weise bewiesene Satz ist vollständig, so viel ich weifs, zuerst von Hrn. Steiner in Gergonne's Annalen (Oct. 1828) zum Beweise vorgelegt worden. Man erkennt in demselben leicht einen besonderen Fall eines Satzes in Bezug auf solche Sechsecke, die sich in eine Linie zweiter Ordnung beschreiben lassen. (Vergl. das gegenw. Journal, V. Band, S. 280.). An die Stelle der Curve zweiter Ordnung tritt blofs ein System von zwei geraden Linien.

4. Mit dem eben bewiesenen Satze ist der folgende durch das „Princip der Reciprocität" verknüpft, und am angeführten Orte sogleich daneben gestellt.

Es seien in derselben Ebene sechs gerade Linien, von welchen drei in einem Puncte, und die drei übrigen in einem andern Puncte sich schneiden, gegeben. Die drei durch den einen Punct gehenden geraden Linien schneiden die durch den andern Punct gehenden noch in neun neuen Puncten. Diese Puncte bestimmen, paarweise, achtzehn neue gerade Linien, welche zu drei in denselben sechs Puncten zusam-

men laufen. Diese sechs Puncte liegen zu drei und drei auf zwei geraden Linien.

Es ergiebt sich dieser Satz wiederum aus einem allgemeinen Satze (gegenw. Journ. V., 280.), wenn man in diesem an die Stelle der Curve zweiter Classe ein System von zwei Puncten setzt. Wir können ferner denselben Satz als zugleich in dem Vorhergehenden bewiesen ansehen, wenn wir überall Puncte an die Stelle von geraden Linien setzen, und umgekehrt, und, statt durch die Gleichungen

$$g = 0, \quad h = 0, \quad a = 0,$$

gerade Linien darzustellen, nun durch dieselben diejenigen beiden festen Puncte, in welchen die sechs gegebenen geraden Linien zu drei und drei sich schneiden und sonst noch irgend einen beliebigen Durchschnittspunct dieser Linien darstellen. (Über diesen Gegenstand vergleiche man den 2. Band meiner „Entwicklungen" oder auch eine unvollkommene Vorarbeit hierzu im 6. Bande des gegenwärtigen Journals.) Wir wollen indefs den Beweis des vorliegenden Satzes durch die allgemeine Verbindung von Symbolen führen, die wiederum, wie früher, gleich Null gesetzt, gerade Linien darstellen, und bemerken zugleich, dafs der so angelegte Beweis des letzten Satzes in den Beweis des vorhergehenden übergeht, wenn wir den Symbolen eine andere Bedeutung unterlegen. Wir sehen, wie das „Princip der Reciprocität" für alle diejenigen Sätze, welche durch allgemeine Symbole bewiesen werden können, unmittelbar gerechtfertigt ist.

Ob der Beweis eines gegebenen Satzes oder des mit ihm durch das Princip der Reciprocität verbundenen, bei Zugrundelegung gewöhnlicher Punct-Coordinaten, einfacher sein werde, läfst sich so ziemlich im Voraus überschlagen. Einfacher ist es, im Allgemeinen, beim Gebrauche dieser Coordinaten, und also auch bei der Einführung von Symbolen, welche auf dieselben sich beziehen, zu beweisen, dafs drei gerade Linien in demselben Puncte sich schneiden, als dafs drei Puncte in gerader Linie liegen. Bestehen zwei zusammengehörige Sätze, wie die vorliegenden, aus mehreren sich aneinander anreihenden einzelnen Sätzen, so wird es im Allgemeinen leichter sein, denjenigen zu beweisen, nach welchem bestimmte Puncte in gerader Linie liegen, die dann ihrerseits wieder in demselben Puncte sich schneiden. Denn die schwierigern Operationen werden hierbei im Allgemeinen mit einfachern, und die leichtern mit zusammengesetztern Gleichungen unternommen. Der oben gegebene

Beweis des ersten Satzes wird hiernach, wenn nicht etwa besondere Kunstgriffe angewandt werden können, einfacher sein als der nachfolgende. Die Sache verhält sich gerade umgekehrt, wenn wir uns der neuen Linien-Coordinaten bedienen.

Die Gleichungen der nach dem letzten Satze gegebenen drei geraden Linien, von welchen die drei ersten und die drei letzten in demselben Puncte sich schneiden mögen, seien:

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0; \qquad a' = 0, \quad b' = 0, \quad c' = 0.$$

Wir wollen nachweisen, daſs die drei geraden Linien

$$(A) \qquad (a, b'; a', b), \qquad (a, c'; a', c), \qquad (b, c'; b', c)$$

in demselben Puncte sich schneiden.

Wenn wir für die Gleichung der geraden Linie, welche durch diejenigen beiden Puncte geht, in welchen die gegebenen geraden Linien zu drei und drei sich schneiden, folgende einführen:

$$g = 0,$$

so können wir die Bedingungen des Satzes folgendergestalt durch Hülfe unbestimmter Coefficienten ausdrücken:

$$a + \mu g = b, \qquad a + \mu' g = b',$$
$$a + \nu g = c, \qquad a + \nu' g = c'.$$

Die Gleichung von $(a, b'; a'b)$ ergiebt sich alsdann sogleich, indem man zwei unbestimmte Coefficienten p und q in folgenden Gleichungen so bestimmt, daſs diese Gleichungen identisch werden:

$$\left.\begin{aligned} a + \mu g + pa' &= 0, \\ a' + \mu' g + qa &= 0, \end{aligned}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{aligned} \mu' a + \mu\mu' g + \mu' p a' &= 0, \\ \mu q a + \mu\mu' g + \mu a' &= 0. \end{aligned}\right.$$

Man erhält auf den ersten Blick:

$$\mu' a + \mu a' + \mu\mu' g = 0.$$

Indem man μ und ν vertauscht, ergiebt sich sogleich für $(a, c'; a', c)$ folgende Gleichung:

$$\nu' a + \nu a' + \nu\nu' g = 0.$$

Wir erhalten endlich die Gleichung von $(b, c'; b', c)$, indem wir die beiden Gleichungen:

$$a + \mu g + p(a' + \nu' g) = 0,$$
$$a + \nu g + q(a' + \mu' g) = 0,$$

durch Hülfe der unbestimmten Coefficienten p und q identisch machen. Auf diese Weise kommt:

$$3. \qquad (\mu' - \nu')a + (\mu - \nu)a' + (\mu\mu' - \nu\nu')g = 0.$$

Man gelangt zur Gleichung (3.), wenn man die Gleichung (2.) von der Gleichung (1.) abzieht. Die bezüglichen drei geraden Linien schneiden sich also in demselben Puncte.

Für folgende drei gerade Linien:

$$(B) \quad (a, a'; b, c'), \quad (a, b'; c, c'), \quad (b, b'; c, a'),$$

erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \nu' a - \mu a' &= 0, \\ (\mu' - \nu') a + \nu a' + \nu \mu' g &= 0, \\ \mu' a + (\nu - \mu) a' + \nu \mu' g &= 0, \end{aligned}$$

und sehen, dafs auch diese drei gerade Linien in demselben Puncte sich schneiden.

Indem wir (b) und (c), und dem entsprechend, μ und ν gegenseitig mit einander vertauschen, erhalten wir folgende drei neue gerade Linien, die in demselben Puncte sich schneiden:

$$(C) \quad (a, a'; c, b'), \quad (a, c'; b, b'), \quad (c, c'; b, a'),$$

und für dieselben die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mu' a - \nu a' &= 0, \\ (\nu' - \mu') a + \mu a' + \mu \nu' g &= 0, \\ \nu' a + (\mu - \nu) a' + \nu \mu' g &= 0. \end{aligned}$$

Es bleibt uns nun nach dem zweiten Theile des vorliegenden Satzes noch zu beweisen übrig, dafs die drei gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte der geraden Linien (A), (B) und (C) in gerader Linie liegen. Dieselben Durchschnittspuncte können wir durch drei Linien-Paare bestimmen, deren Gleichungen folgende sind:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\mu' \nu' (\mu - \nu)}{\mu \nu (\mu' - \nu')} a + a' &= 0, \\ \frac{\mu' \nu - \nu \mu'}{\mu \nu (\mu' - \nu')} a \quad g &= 0, \end{aligned}\right\}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\nu'}{\mu} a - a' &= 0, \\ \frac{\mu \mu' + \nu \nu' - \mu \nu'}{\nu \mu \mu'} a + g &= 0; \end{aligned}\right\}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\mu'}{\nu} a - a' &= 0, \\ \frac{\mu \mu' + \nu \nu' - \nu \mu'}{\mu \nu \nu'} a + g &= 0; \end{aligned}\right\}$$

die sich unmittelbar aus den Gleichungen der drei Gruppen von drei geraden Linien ergeben. Die Gleichungen irgend dreier gerader Linien,

welche durch die drei Durchschnitte der in Rede stehenden drei Linien-Paare gehen, haben folgende Form:

$$4.\quad \begin{cases} \frac{\mu'\nu - \nu\mu'}{\mu\nu(\mu'-\nu')}.a + g - p\left\{\frac{\mu'\nu'(\mu-\nu)}{\mu\nu(\mu'-\nu')}.a + a'\right\} = 0, \\ \frac{\mu\mu' + \nu\nu' - \mu\nu'}{\nu\mu\mu'}.a + g + q\left\{\frac{\nu'}{\mu}.a - a'\right\} = 0, \\ \frac{\mu\mu' + \nu\nu' - \nu\mu'}{\mu\nu\nu'}.a + g + r\left\{\frac{\mu'}{\nu}.a - a'\right\} = 0. \end{cases}$$

Es ist also nachzuweisen, dafs diese drei Gleichungen durch schickliche Wahl der drei unbestimmten Coefficienten p, q und r identisch gemacht werden können, was für Ausdrücke a, a' und g auch darstellen mögen. Diese Bedingung fordert zuerst:

$$p = q = r.$$

Wenn wir den Werth von $p = q$ aus den Coefficienten von a in den beiden ersten der Gleichungen (4.) bestimmen, so ergiebt sich:

$$p = -\frac{(\mu\nu'^2 - \nu\mu'^2) + (\mu' - \nu')(\mu\mu' + \nu\nu')}{\mu'\nu'(\mu\mu' - \nu\nu')}.$$

Da der vorstehende Ausdruck für p in Beziehung auf μ und ν symmetrisch ist, und die beiden letzten Gleichungen (4.) durch gegenseitige Vertauschung von μ und ν in einander übergehen, so folgt, dafs wir für den unbestimmten Coefficienten $p (= q = r)$ denselben Ausdruck durch Zusammenstellung der Coefficienten von a in der ersten und dritten der Gleichungen (4.) erhalten hätten, und eben diefs war zu beweisen.

Bonn, am 1. August 1831.

(Die Fortsetzung folgt.)

16.

Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen Figuren in dieselben Stücke.

(Von Herrn *Gerwien*, Pr. Lieut. im Königl. Preufs. 22sten Inf. Regim.)

1.

Lehrsatz. Haben mehrere Dreiecke ABC, ABD, AED, AEF (Taf. III. Fig. 1.) gleiche, in gerader Linie nebeneinander liegende Grundlinien CB, BD, DE, EF, und eine gemeinschaftliche Spitze A, so wird jedes dieser Dreiecke in dieselben Stücke zerlegt wie die übrigen, wenn man durch die Endpuncte B, D, E, der gemeinschaftlichen Seiten zu allen Seiten der genannten Dreiecke parallele Linien zieht.

Beweis. Aus den Voraussetzungen dieses Satzes folgt zunächst eine gesetzmäfsige Schneidung zwischen den von B, D und E aus gezogenen Parallelen in den Seiten der gegebenen Dreiecke. So treffen sich hier die Linien BI und DI in AC, da BI parallel DA, und $CB = BD$ ist, folglich BI die Mitte von AC schneidet, dasselbe aber auch für DI gilt, da DI parallel AF, und $DC = DF$ vorausgesetzt wurde. Eben so ergiebt sich die Schneidung von DO und EO in AF, und endlich die von BQ und EL in AD. Hieraus geht die Behauptung in der folgenden Art hervor.

$\triangle ABC$ besteht aus denselben Stücken wie $\triangle AEF$, da jedes Paar dieser Stücke lauter parallele Seiten, also auch lauter gleiche Winkel hat, und sich aufserdem zeigen läfst, dafs auch ein oder zwei Paar gleichliegende Seiten dieser Stücke gleich sind. Es ist nämlich:

1. CGB congruent EMF. ($CB = EF$.)
2. BGH congruent AQX. ($GB = QA$ als P. zw. P.)
3. HBI congruent ZEO. ($BI = EO$, da beide Linien $= WA$ als P. zw. P. sind.)
4. BIR congruent EON. ($BI = EO$.)
5. $RIKS$ congruent $POZY$. ($IK = ZO$, da $IA = DO$, und $KA =$

DZ als P. zw. P. ist. IR ist ferner $= PO$, da $ID = AO$, und $RD = AP$ als P. zw. P. sein mufs.)

6. $KSTL$ congruent $XYPQ$. ($KL = XQ$, da $KL = KA = AL = \frac{1}{3}AC - \frac{1}{4}AC = \frac{1}{12}AC$ ist, und XQ wegen der Gleichheit von AQ, QO, OM, $\frac{1}{3}EM$ oder $\frac{1}{3}AL$, d. h. gleichfalls $\frac{1}{12}AC$ sein mufs. KS ist ferner $= XY$, da sich $KS = KD - DS = \frac{2}{3}AE - \frac{1}{2}AE = \frac{1}{6}AE$, und auch $XY = AY - AX = \frac{1}{2}AE - \frac{1}{3}AE = \frac{1}{6}AE$ findet.)
7. LTA congruent MNE. ($LA = EM$.)

Ganz auf dieselbe Weise läfst sich zeigen, dafs auch die Dreiecke ADB und ADE dieselben Stücke enthalten, wie das Dreieck ABC.

II.

Aufgabe. Es sind zwei Dreiecke mit gleichen Grundlinien und Höhen gegeben; man soll beide in dieselben Stücke zerschneiden.

Legt man beide Dreiecke ABC und DEF, (Fig. 2.), so aneinander (CGB congruent DEF), dafs die gleichen Grundlinien zusammenfallen, welches auf zwiefache Art geschehen kann, je nachdem man E in B oder in C legt, so entsteht entweder in einem von beiden Fällen ein Viereck $ABGC$ mit lauter hohlen Winkeln, oder in jedem von beiden Fällen ein Viereck $ABGC$, (Fig. 3.), mit einem erhabenen Winkel.

Auflösung 1., wenn eins der beiden entstehenden Vierecke, z. B. $ABGC$, (Fig. 2.), nur hohle Winkel hat.

Verbinde die Spitzen beider Dreiecke A und G, und ziehe durch den Schneidungspunct H mit der gemeinschaftlichen Seite BC in jedem der beiden Dreiecke zu den Seiten des anderen parallele Linien, also HI und HK parallel zu GC und GB, HL und HM parallel zu AC und AB, so ist die geforderte Zerlegung der Dreiecke ABC und BGC oder DEF vollendet.

Beweis. Aus der Gleichheit der Höhen AO und NG ergiebt sich die Congruenz der rechtwinkligen Dreiecke AHO und GHN, also auch die Gleichheit von AH und HG. Hieraus folgt die Congruenz von AHI mit HGL, und von AHK mit HGM, da beide Paar Dreiecke aufserdem zwei Paar gleiche Winkel als Gegenwinkel paralleler Linien haben. Die Congruenz von CIH mit CLH, und von HKB mit HMB endlich beruht darauf, dafs jedes Paar dieser Dreiecke eine gemeinschaftliche Seite, und zwei Paar gleicher Winkel als Wechselwinkel paralleler Linien hat.

Jedes der beiden Dreiecke ABC und CBG oder DEF ist also in dieselben 4 Stücke zerschnitten wie das andere.

Auflösung 2., wenn jedes der beiden entstehenden Vierecke, z. B. $ABGC$ (Fig. 3.), einen erhabenen Winkel hat.

Verlängere die gemeinschaftliche Grundlinie CB von den beiden Dreiecken ABC und BGC so lange um sich selbst, bis die Verbindungslinie der Spitzen A und G erreicht wird, welches hier von der Linie HI ($= HB = BC$) geschieht, und lege

1stens, durch sämmtliche Endpuncte B, H etc. der $= CB$ abgesetzten Linien Parallelen zu den Verbindungslinien dieser Puncte mit den Spitzen A und G,

2tens, schneide jedes der beiden Dreiecke AHI und HIG, in welche AG fällt, nach der vorher gegebenen Auflösung (1.) von K aus in dieselben 4 Stücke,

3tens, zeichne bei jedem der 4 Paar entstandener congruenter Dreiecke, z. B. MKA und OGK, die Stücke des einen wechselweise in die Stücke des anderen hinein,

so ist $\triangle AHI$ in dieselben Stücke zerlegt wie das $\triangle HGI$, und es läfst sich aus diesen Stücken eben sowohl das eine gegebene $\triangle ABC$ als auch das andere CGB oder DEF zusammensetzen.

Beweis. Da AMK congruent OGK ist, und die Stücke von MAK sowohl in OKG, als umgekehrt, die Stücke von OKG in MKA hineingezeichnet sind, so müssen bei einer gehörigen Aufeinanderlegung beider Dreiecke sämmtliche Grenzen der erhaltenen Stücke in einander fallen; folglich enthält das eine dieselben Stücke wie das andere. Dasselbe läfst sich aber auch für die übrigen 3 Paar congruenter Dreiecke zeigen. Demnach ist überhaupt $\triangle AHI$ aus denselben Stücken zusammengesetzt wie das $\triangle HGI$.

Ferner wird $\triangle ABC$ von denselben 4 Stücken wie das $\triangle AHI$ nach dem in I. bewiesenen Lehrsatz gebildet, da $CB = BH = HI$ ist, und von B und H zu allen Seiten beider Dreiecke parallele Linien gezogen sind. Es ist nämlich CQB congruent HLI, QBP congruent AMS, $BPVR$ congruent $HMSU$, und VRA congruent UHL. Zeichnet man also, wie es in der Auflösung geschah, bei jedem der 4 Paar congruenter Stücke, in das ungetheilte Stück (z. B. in $PVRB$), die einzelnen Bestandtheile des congruenten Stücks ($MSUH$) hinein, (nämlich Bol congruent

Hwa, $opln$ congruent $wxab$, $pnqP$ congruent $xbcM$, $qtuP$ congruent $cdhM$, tur congruent dhe, Puv congruent Mhg, $urRsvu$ congruent $heUfg$, und endlich sRV congruent fUS), so zeigt sich das ganze Dreieck ABC offenbar aus denselben Stücken zusammengesetzt wie das $\triangle AHI$. Da sich nun ferner auf gleiche Weise zeigen läſst, daſs mittelst der Auflösung auch im $\triangle CBG$ dieselben Stücke erzeugt worden sind, wie im $\triangle HGI$, und HGI wieder nach dem Anfange dieses Beweises dieselben Stücke enthält wie das $\triangle AHI$, so geht daraus endlich hervor, daſs $\triangle ABC$ und $\triangle CBG$ oder $\triangle DEF$ wirklich, wie es verlangt wurde, in dieselben Stücke zerschnitten sind.

Anmerkung. Eine zweite Auflösung für den Fall, daſs das entstehende Viereck einen erhabenen Winkel hat, ergiebt sich folgendergestalt:

1stens, verlängere CB so lange um sich selbst, bis AG erreicht wird, welches hier für HI gilt, und lege BQ parallel LA, BT parallel IG;

2tens, schneide CBQ und CBT, jedes nach der Auflösung des ersten Falls, in dieselben 4 Stücke;

3tens, setze $CQ = QV$ etc., $CT = TW$ etc. ab, und zerlege durch Hülfe des in 1. bewiesenen Satzes die hiedurch in BCA und BGC entstandenen Dreiecke BCQ, QVB etc. in dieselben Stücke;

4tens, zeichne die einzelnen Bestandtheile der Stücke von CBQ in die congruenten Stücke von CBT, und umgekehrt;

5tens, endlich trage die einzelnen Bestandtheile von CBQ in die congruenten Stücke von QBV, VBA etc., und eben so von CBT in TBW, WBG etc. ab,

so hat man beide Dreiecke ABC und CBG oder DEF in dieselben Stücke zerschnitten.

Diese Auflösung hat gegen die zuerst entwickelte den Vorzug, daſs sich die Stücke in den gegebenen Dreiecken geradezu erzeugen. Dagegen hat die vorhergehende Auflösung den Vortheil, daſs bei derselben jedes der gegebenen Dreieke nur höchstens in halb so viel Stücke zerschnitten wird, als sich mittelst der zweiten Auflösung ergeben.

III.

Aufgabe. Es sind zwei an Flächen-Inhalt gleiche Dreiecke gegeben; man soll jedes in dieselben Stücke zerschneiden.

Auflösung. Sind ABC und DEF, (Fig. 4.), die gegebenen Dreiecke, AB und FE ihre gröſsten Seiten, so lege

1stens, zu EF, der gröſseren von diesen beiden Linien eine um die Höhe DQ entfernte Parallele HI, beschreibe um F mit der zweiten vorher

genannten Seite *AB* einen Kreis, und verbinde den zunächst an *E* fallenden Schneidungspunct *I* mit *E*;

2tens, schneide nach der Auflösung 1. der Aufgabe II. die beiden Dreiecke *FDE* und *FIE* in dieselben 4 Stücke;

3tens, lege $\triangle FIE$ mit seinen 4 Stücken congruent *AKB* so an das $\triangle ABC$, dafs die gleichen Seiten *AB* und *FI* zusammenfallen;

4tens, schneide *AKB* zum zweitenmal in dieselben Stücke mit *ABC* nach der Auflösung 1. oder 2. der Aufgabe II.;

5tens, zeichne in die ungetheilten Stücke von *ABC* die einzelnen Bestandtheile der im $\triangle ABK$ liegenden congruenten Stücke hinein, und

6tens, in die 4 Stücke des $\triangle FDE$ die einzelnen Bestandtheile der congruenten Stücke des $\triangle ABK$ oder *IFE*,

so ist $\triangle ABC$ in dieselben Stücke zerlegt wie das $\triangle DFE$.

Beweis. Da $FI = FH$ ist, mufs Winkel *HIF*, also auch der gleiche Wechselwinkel *IFE* spitz sein. Die 3 Winkel *IEF*, *FED* und *DFE* sind ebenfalls spitz, da alle 3 nicht der gröfsesten Seite ihres zugehörigen Dreiecks gegenüber liegen, folglich sind die Winkel *DFI* und *DEI* hohl, und es ist deshalb die Auflösung 1. der Aufgabe II. anwendbar. Wegen der gleichen Höhen und Grundlinien hat ferner *FIE*, also auch das congruente $\triangle AKB$ mit *FDE*, und deshalb auch mit *ABC* gleichen Flächeninhalt. Demnach haben die Dreiecke *ABK* und *ABC* gleiche Grundlinien und Höhen, und lassen sich also wirklich nach der Aufgabe II. in dieselben Stücke schneiden. Nun sind aber endlich sowohl in die Stücke von *ABC*, als in die von *EDF*, die einzelnen Theile der congruenten Stücke des $\triangle ABK$ eingezeichnet, folglich ist $\triangle ABC$ wirklich in dieselben Stücke zerschnitten wie das $\triangle EDF$.

IV.

Aufgabe. Es sind zwei Polygone von gleichem Flächeninhalt gegeben; man soll jedes in dieselben Stücke zerschneiden.

Auflösung und Beweis. Sei (Fig. 5.) *ABCDE* das eine, und *FGHI* das andere gegebene Polygon.

1stens, verwandle das *n*seit *ABCDE* auf die bekannte Art in das $(n-1)$seit *EKCD*, und zerschneide nach II. die gleichen Dreiecke *ABE* und *EKB* in dieselben Stücke, so ist auch das ganze $(n-1)$seit in dieselben Stücke wie das *n*seit getheilt. Verwandle ferner das $(n-1)$seit

auf gleiche Weise in ein ($n-2$)seit EDM, zerschneide wieder die hiebei entstandenen gleichen Dreiecke EKC und ECM in dieselben Stücke, und zeichne sowohl in die Stücke des zu dem $n$seit gehörenden Dreiecks ABE die entstandenen einzelnen Bestandtheile der congruenten Stücke des $\triangle EBK$, als auch in die Stücke des $\triangle ECM$ die einzelnen Bestandtheile der congruenten Stücke des $\triangle CEK$, so ist das $n$seit, das $n-1$seit und das $n-2$seit in dieselben Stücke zerschnitten. Setzt man nun dies Verfahren, namentlich die Einzeichnung der in dem vorletzten Polygon entstandenen kleineren Bestandtheile in die congruenten Stücke des zuletzt erhaltenen und des gegebenen Polygons so lange fort, bis sich ein $\triangle$, hier EDM, ergiebt, so ist klar, dafs dieses aus denselben Stücken wie das gegebene $n$seit $ABCDE$ bestehen mufs.

2tens, verwandle das $m$seit $FGHI$ gleichfalls in ein $\triangle OIF$, und zerschneide, ganz so wie es vorher gezeigt wurde, beide in dieselben Stücke.

3tens, schneide die beiden erhaltenen gleichen Dreiecke EMD und FOI nach der Aufgabe III. in dieselbe Stücke.

4tens, zeichne in die aus der letzten Schneidung hervorgegangenen Stücke des $\triangle EDM$ die einzelnen Theile der congruenten Stücke des $\triangle OIF$ hinein, und verfahre eben so mit OIF in Beziehung auf EDM, so müssen beide Dreiecke aus denselben Stücken zusammengesetzt sein.

Zeichnet man daher

5tens, in die Stücke des $n$seits $ABCDE$ die einzelnen Bestandtheile aus den nach 1. congruenten Stücken des $\triangle EMD$, welche sich mittelst der in 3. und 4. ausgeführten Schneidung ergeben haben, und construirt endlich gleichfalls in den Stücken des $m$seits $FGHI$ die einzelnen Bestandtheile aus den nach 2. congruenten Stücken des $\triangle OIF$, die sich aus den Operationen 3. und 4. ergeben, so hat man, da nach 4. beide Dreiecke EMD und OIF in dieselben Stücke getheilt sind, offenbar auch das $n$seitige Polygon $ABCDE$ und das $m$seitige Polygon $FGHI$ in dieselben Stücke zerschnitten.

V.

Aufgabe. **Es sind mehrere Polygone von gleichem Flächeninhalt gegeben; man soll jedes in dieselben Stücke zerschneiden.**

Auflösung und Beweis. m, n, p, q sollen die Seitenanzahlen der verschiedenen Polygone bezeichnen. Zerschneide das $m$seit und das

*n*seit nach der Aufgabe IV. in dieselben Stücke. Wiederhole diese Operation beim *n*seit und *p*seit, und zeichne in die Stücke des *m*seits und in die Stücke des *p*seits die einzelnen Bestandtheile hinein, welche sich in den bezüglich congruenten Stücken des *n*seits ergeben haben, so bestehen alle 3 Figuren aus denselben Stücken. Zerschneidet man jetzt endlich das *p*seit und das *q*seit in dieselben Stücke, und trägt in die Stücke das *q*seits sowohl als auch in die Stücke des *n*- und *m*seits die einzelnen Bestandtheile hinein, welche sich in den bezüglich congruenten Stücken des *p*seits finden, so ist die Aufgabe gelöset, da jedes der gegebenen Polygone aus denselben Stücken zusammengesetzt ist. Dafs sich das eben gezeigte Verfahren nicht auf eine bestimmte Menge von Polygonen beschränkt, sondern auf jede beliebige Anzahl derselben ausgedehnt werden kann, geht aus der Auflösung selbst genügend hervor.

Mit dem Vorhergehenden stehen noch die folgenden Bemerkungen im Zusammenhange.

1. In den Systemen der Geometrie wird der Satz: dafs Dreiecke mit gleichen Höhen und Grundlinien gleiche Flächen haben, aus dem zu den Parallelogrammen gehörenden analogen Satz abgeleitet, während offenbar gerade das Umgekehrte, nämlich die Ableitung eines Satzes der zusammengesetzten Figur aus den Gesetzen der einfachen, Statt finden müfste. Aus No. II. der vorstehenden Abhandlung ergiebt sich, dafs diesem Übelstande mittelst der daselbst gegebenen Auflösung 1. leicht abzuhelfen ist, da man sich derselben als Beweis für die blofse Gleichheit der Dreiecke unter allen Umständen bedienen kann.

2) Aus der vorstehenden Abhandlung geht hervor: dafs sich die Gleichheit der geradlinigen Figuren folgendergestalt definiren läfst:

Gleiche Figuren sind diejenigen, welche von denselben Stücken gebildet werden.

17.

Zerschneidung jeder beliebigen Menge verschieden gestalteter Figuren von gleichem Inhalt auf der Kugelfläche in dieselben Stücke.

(Vom Herrn *P. Gerwien*, Pr. Lieuten. im Königl. Preufs. 22sten Inf. Reg.)

---

1. **Aufgabe.** (Taf. IV. Fig. 1.) Construirt man die zu einem $\triangle ABC$ gehörenden zwei Gegenkreise, von denen einer, A und die Gegenpuncte von B und C, der andere aber B und C selbst nebst dem Gegenpunct von A durchläuft, zeichnet ferner den mit den genannten Kreisen conzentrischen Hauptkreis ED, und fället auf diesen aus B und C die Senkrechten BE und CD, so läfst sich das entstandene Viereck $BCDE$ stets in dieselben Stücke wie das Dreieck ABC zerschneiden.

Fall 1. Beide Seiten AB und AC des $\triangle ABC$ schneiden die Seite ED des Vierecks $BCDE$.

Construction. Fälle aus A auf ED die Senkrechte AF, so ist $\triangle ABC$ in dieselben drei Stücke zerlegt wie das Viereck $BCDE$.

Beweis. Verlängert man die Senkrechten CD und AF nach beiden Seiten, so müssen dieselben in den sphärischen Mittelpuncten M und M', Fig. 2., des Hauptkreises DF und der beiden Gegenkreise AI und CK zusammentreffen. Hieraus ergiebt sich $MA = M'C$ (Radien gleicher Kreise), $MC = M'A$ ($IC = AK$ als gleiche Reste), während $CA = CA$ ist, folglich mufs $\triangle MAC$ congruent $\triangle M'AC$, also auch $W.MCA = W.M'AC$ sein. Nun ist ferner $W.CHD = AHF$, und $W.CDH = HFA = R$; demnach hat man auch $\triangle DHC$ congruent AHF. Auf demselben Wege ergiebt sich endlich die Congruenz der Dreiecke AFG und BEG (Fig. 1.), folglich besteht Viereck $BCDE$ aus denselben Stücken wie das $\triangle ABC$.

Fall 2. Fig. 3. Nur eine Seite AC des $\triangle ABC$ schneidet die Seite DE des Vierecks $BCDE$.

Construction. Schneide $EG = DI$ ab, und ziehe CI, so ist $\triangle ABC$ in dieselben drei Stücke zerschnitten wie das Viereck $BCDE$.

Beweis. Fället man aus A auf die Verlängerung von DE einen Perpendikel AF, so ergiebt sich, ganz wie in Fall 1., die Congruenz von

AHF mit *DCH*, und von *AGF* mit *BEG*, weshalb $CH = HA$, $DC = AF = BE$, und $DH = HF$ sein muſs. Hieraus folgt zunächst die Congruenz von *GEB* mit *IDC*, denn es ist $EB = DC$ (bewiesen), $EG = DI$, $W.BEG = CDI = R$ (construirt), und ferner hat man $\triangle HAG$ congruent *HCI*, da $CH = HA$, $W.CHI = AHG$ ist, und sich $HI = HG$ als gleiche Reste zwischen $DH = HF$ und $DI = EG$ oder *GF* ergiebt. Folglich besteht $\triangle ABC$ wirklich aus denselben drei Stücken wie das Viereck *BCDE*.

Fall 3. Beide Seiten *AB* und *AC* des $\triangle ABC$ treffen nicht die Seite *DE* des Vierecks *BCDE*.

I. Wenn *HE* kleiner ist als $\frac{1}{2}ED$, Fig. 4.

Construction. Schneide *DK* und $HM = EH$, ferner $DO = EI$, $HL = HI$ ab, halbire *KH* in *Q*, und ziehe die Hauptbogen *OK*, *LM*, *CQ*, so ist $\triangle ABC$ in dieselben vier Stücke zerlegt wie das Viereck *BCDE*.

Beweis. Wie in Fall 1. ergiebt sich die Congruenz von *CDH* mit *AHF*, und von *EBG* mit *AGF*. Daher ist $DH = HF$, $EG = GF$, also $DH - EG$ oder $DE - HG = HF - GF$ oder *HG*, d. h. *DE* ist $= 2HG$. Hieraus folgt zunächst, da $HE <$ ist als $\frac{1}{2}ED$, daſs *M* nur zwischen *H* und *G* fallen kann, ferner, da aus $DK = EH$, $KH = DE = 2HG$ folgt, also $\frac{1}{2}KH$ oder $QH > EH$ sein muſs, daſs *Q* zwischen *D* und *E* liegt, und endlich daſs $QH = HG$ ist. Hieraus ergiebt sich die Congruenz der Stücke des Vierecks und des Dreiecks folgendergestalt. $\triangle CQH$ ist congruent *AGH*, da $QH = HG$, $HC = HA$ (bewiesen) und $W.QHC = AHG$ ist. Ferner hat man *EIH* sowohl congruent *ODK* als auch *HLM* construirt, demnach folgt ohne Weiteres, daſs auch die Vierecke *QEIC* und *MLGA* congruent sein müssen, während zugleich durch Ableitung gleicher Linien und Winkel aus den vorhergehenden Congruenzen auch die der Vierecke *OQKC* und *IBGH* hervorgeht.

II. Wenn $HE > \frac{1}{2}ED$ und $< ED$ ist. Fig. 5.

Construction und Beweis. Schneidet man $EH = DL$, $EI = DK$ ab, und zieht *KL*, so wird $\triangle EIH$ congruent *DKL* und $LH = DE$, weshalb, da zugleich *L* über die Mitte von *DE* hinausfällt, auch *N*, die Mitte von *LH*, zwischen *E* und *H* zu liegen kommt, und sich, wie im Beweise des vorhergehenden Falls, $NH = HG (= \frac{1}{2}ED)$ ergiebt. Nun ist aber auch $CH = HA$ ($\triangle HAF$ congruent *CDH*) und $W.NHC = AHG$, folglich hat man $\triangle CNH$ congruent *HAG*. Ein Theil *MINH* des $\triangle NCH$ muſs zunächst in das Viereck *EBCD* geschafft und zugleich im $\triangle EGH$

construirt werden. Das Eine geschieht durch Abzeichnung von DON congruent EMN, da sich hiedurch Viereck $ONLK$ congruent $MNHI$ ergiebt, und das Andere durch Einzeichnung von ARS congruent CMI. Endlich muſs sich noch DNO in $HGBI$ tragen lassen, und daraus ein $CMELK$ congruentes Fünfeck entstehen. Dies ergiebt sich, wenn man $GQ = NO$, $GP = ND$ abschneidet, da $W.QGP = MNE$, und also auch $= OND$ aus der Congruenz der Vierecke $BGHI$ und $CNLK$ hervorgeht, während sich zugleich aus den vorhandenen gleichen Stücken die Congruenz der beiden Fünfecke $BQPHI$ und $CMELK$ durch bloſse Aufeinanderlegung folgern läſst. Hiermit ist das $\triangle ABC$ in dieselben 5 Stücke zerlegt wie das Viereck $BCDE$.

III. Wenn $HE >$ ist als ED (Fig. 6.).

Zeichnet man $\triangle DOK$ congruent EIH ab, halbirt KH in Q, und zieht QC, so erhält man $\triangle CQH$ congruent HGA. Es ist also Viereck $PIQH$ und Viereck $IBGH$ in das Viereck $EICD$ einzuzeichnen. Dies geschieht, indem man $\triangle DWV$ congruent EPQ construirt, da sich hiedurch zunächst Viereck $WOKV$ congruent $PIHQ$ (VK ist $= QH$ u. s. w.) und Viereck $OCQK$ congruent $IBGH$ (HG ist $= \frac{1}{2} DE$ oder KQ früher bewiesen) ergiebt, also nur DNL congruent EMK zu bestimmen ist, (K fällt nach der Voraussetzung immer in die Verlängerung von DE), um das letzte noch ungenügend liegende Stück $PMKQ$ an der richtigen Stelle $NMVL$ zu erhalten. Sollte hierbei der Fall eintreten, daſs DV oder EQ gröſser wäre als DE, so führt die Einzeichnung des bei E ungenügend entstehenden Dreiecks in den Winkel D abermals zum Zweck. (Übrigens kann sich dieser Fall nie ergeben, wenn $HG >$ als $\frac{1}{4} R$ ist, da, sobald ABC in ein Zweieck übergeht, $DH = HC$ gerade R als Maximum erreicht.) Die Construction der in dem Viereck $BCDE$ erhaltenen Stücke in das $\triangle ABC$ läſst sich endlich stets durch bloſse Einzeichnung zu Stande bringen. $IBUT$ wird nämlich congruent $OCPM$, $TUGH$ also congruent $NLVW$ oder $PMKQ$, und δGZ congruent $D\beta\gamma$ oder $E\alpha\nu$; ferner ARS congruent CPI, $RSGH$ also congruent $VWOK$ oder $PIHQ$, und $HXYG$ endlich congruent $NL\beta\gamma$ oder $MKV\alpha$ bestimmt.

2. Aufgabe. Zwei Dreiecke $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ haben gleiche Flächen und eine gleiche Seite; man soll das eine in dieselben Stücke zerschneiden wie das andere.

Auflösung und Beweis. Legt man $\mathfrak{B}$ so auf $\mathfrak{A}$, daſs die gleichen Seiten in einander fallen, und zeichnet die zu $\mathfrak{A}$ gehörenden (in 1.

erwähnten) zwei Gegenkreise, so mufs 𝔅 mit seiner Spitze in einen dieser Kreise fallen. Denn nimmt man das Gegentheil an, und verbindet den Schneidungspunct zwischen einer Seite dieses Dreiecks und dem Gegenkreise mit dem zweiten Endpunct der 𝔄 und 𝔅 gemeinschaftlichen Seite, so entsteht ein Dreieck ℭ, welches gröfser oder kleiner ist als 𝔅, während sich zugleich ℭ = 𝔄 ergiebt, da zu beiden dasselbe Viereck wie in No. 1. über der gemeinschaftlichen Seite construirt werden kann, woraus die Fehlerhaftigkeit der Annahme hervorgeht. Daher hat man nur das ebenerwähnte, 𝔄 und 𝔅 zugleich angehörende Viereck erstens nach No. 1. in dieselben Stücke mit 𝔄, zweitens in dieselben Stücke mit 𝔅 zu theilen; drittens diejenigen Stücke des Vierecks, welche sich in demselben innerhalb der Theile von 𝔄 durch die zweite Zerschneidung ergaben, in 𝔄 abzutragen, und viertens in derselben Art alle Stücke, welche in dem Viereck innerhalb der Theile von 𝔅 entstanden sind, in 𝔅 einzuzeichnen.

3. Aufgabe. Zwei Dreiecke 𝔄 und 𝔅 haben gleiche Flächen; man soll das eine in dieselben Stücke zerschneiden wie das andere.

Auflösung etc. Man zeichne die zu 𝔄 nach No. 1. gehörenden zwei Gegenkreise, von denen einer die Scheitel B und C durchläuft, beschreibe um B mit einer Seite des $\triangle$𝔅 einen Kreis, und verbinde C mit dem Schneidungspunct zwischen dem zuletzt gezeichneten Kreise und dem Gegenkreise, welcher den Scheitel A von 𝔄 durchläuft, so entsteht ein $\triangle$ℭ, welches (wie aus dem Inhalt von No. 2. leicht folgt) sowohl mit 𝔄 als auch mit 𝔅 gleiche Fläche und eine gleiche Seite hat. Theilt man daher nach der Aufgabe No. 2. erstens ℭ mit 𝔄, und zweitens ℭ mit 𝔅 in dieselben Stücke, so ist die geforderte Zerschneidung vollendet, wenn man drittens die in ℭ innerhalb der Theile von 𝔄 entstandenen Stücke in 𝔄 einträgt, und endlich viertens die eben daselbst innerhalb der Theile von 𝔅 entstandenen Stücke in 𝔅 wirklich einzeichnet.

4. Aufgabe. Ein $n$seit und ein $m$seit haben gleiche Flächen; man soll das eine in dieselben Stücke zerschneiden wie das andere.

Auflösung etc. Verwandelt man das $n$seit durch Verschiebung einer Spitze in dem Gegenkreise, welcher die Gegenpuncte der beiden anliegenden Winkelspitzen der Figur durchläuft, in ein $(n-1)$seit, so läfst sich nach der Aufgabe 2. die entstandene Figur mit der gegebenen in dieselben Stücke zerlegen. Dasselbe gilt aber für das aus der zwei-

ten Verwandlung hervorgehende $(n-2)$seit und für das $(n-1)$seit. Folglich hat man nur die aus der zweiten Zerschneidung in dem $(n-1)$seit entstandenen Stücke in das $n$seit sowohl als in das $(n-2)$seit gehörig einzutragen, um alle drei Figuren aus denselben Stücken zusammengesetzt zu erhalten. Schneidet man ferner auf gleiche Art das $(n-2)$seit und das neuerdings durch Verwandlung entstehende $n-3$seit in dieselben Stücke, so hat man ferner die in den bereits vorhandenen Theilen des $(n-2)$seits zuletzt entstandenen Stücke, in das $n$seit, das $(n-1)$seit und das $(n-3)$seit einzuzeichnen, um in sämmtlichen vier Figuren dieselben Stücke zu erhalten. Durch fortgesetzte Wiederholung dieses Verfahrens muſs daher endlich das gegebene $n$seit in dieselben Stücke wie jede aus der Verwandlung hervorgehende Figur, also auch wie das zuletzt entstehende Dreieck, welches $\mathfrak{A}$ heiſsen mag, zerschnitten werden. Verwandelt man nun ferner das $m$seit in ein Dreieck, welches $\mathfrak{B}$ bezeichnen soll, so läſst sich auch dieses auf die vorher angegebene Art in gleiche Stücke wie das $m$seit schneiden. Beide entstandenen Dreiecke $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ haben aber gleiche Fläche, daher lassen sich dieselben nach der Aufgabe 3. gleichfalls in dieselben Stücke zerlegen, und man hat schlieſslich nur die hiedurch in $\mathfrak{A}$ entstehenden Theile in das $n$seit, und die in $\mathfrak{B}$ entstehenden Theile in das $m$seit zu tragen, um die eine Figur in dieselben Stücke zu zerschneiden wie die andere.

5. **Aufgabe.** Ein $m$seit, ein $n$seit, ein $p$seit, ein $q$seit u. s. w. haben gleichen Flächeninhalt; man soll diese Figuren so zerschneiden, daſs sich in einer jeden Figur dieselben Stücke ergeben.

Auflösung. Zerschneide nach der vorhergehenden Aufgabe das $n$seit in gleiche Stücke mit dem $m$seit und $p$seit, und trage die Theile, welche sich mittelst der doppelten Zerlegung des $n$seits in diesem innerhalb der Stücke des $m$seits und ferner innerhalb der Stücke des $p$seits ergeben haben, in das $m$seit und $p$seit gehörig ein, so bestehen alle drei Figuren aus denselben Stücken. Schneidet man ferner das $p$seit und das $q$seit in dieselben Stücke, so hat man nur die in den bereits vorhandenen Theilen des $p$seits entstandenen Stücke in das $m$seit, das $n$seit und das $q$seit gehörig einzuzeichnen, um alle 4 Figuren auf dieselbe Art zusammengesetzt zu erhalten. Eben so läſst sich jede der gegebenen Figuren durch wiederholte Anwendung des vorher auseinandergesetzten Verfahrens mit allen bereits zerlegten in dieselben Stücke theilen; folglich kann man

jede beliebige Menge gleich grofser aber verschieden gestalteter Figuren in dieselben Stücke schneiden.

Schliefslich ist noch anzuführen, dafs sich aus den vorhergehenden Betrachtungen ohne Weiteres die Auflösung der nachstehenden Eck-Aufgabe ergiebt.

6. Aufgabe. Eine körperliche Ecke E ist durch lauter den Scheitel treffende Ebenen zerschnitten, und aus den erhaltenen Theilen durch Veränderung ihrer Ordnung eine Ecke e zusammengesetzt worden. In derselben Art hat man aus E eine beliebige Menge, der Kanten-Anzahl nach verschiedener Ecken e', e'', e''' u. s. w. gebildet. Man soll, wenn E nicht gegeben ist, die Ecken e, e', e'', e''' u. s. w. so in kleinere Ecken zerschneiden, dafs sich aus den entstandenen Theilen irgend einer dieser Ecken, z. B. e, alle übrigen e', e'', e''' u. s. w. zusammensetzen lassen.

18.

Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung.

(Fortsetzung des Aufsatzes No. 1. im ersten, und No. 10. im zweiten Hefte dieses Bandes.)

(Von dem Herrn Dr. *Stern* zu Göttingen.)

Zweites Kapitel.

A. Verwandelung der Reihen in Kettenbrüche.

30.

Eben so wie es oft nützlich ist, einen Kettenbruch in eine Reihe zu verwandeln, so kann auch zuweilen das umgekehrte Verfahren, die Verwandelung der Reihe in einen Kettenbruch, mit Nutzen angewandt werden. In der Regel werden diese Reihen nach fortschreitenden Potenzen einer Gröfse x geordnet sein, und es soll daher im Folgenden gezeigt werden, wie eine Reihe

$$(P.)\quad \frac{\alpha}{\alpha_1}x^m + \frac{\beta}{\beta_1}x^{m+h} + \frac{\gamma}{\gamma_1}x^{m+2h} + \frac{\delta}{\delta_1}x^{m+3h}\ldots\text{*)}$$

in einen Kettenbruch verwandelt werden kann. Es ist aber

$$(P) = \frac{\alpha}{\alpha_1}x^m\left(1 + \frac{\beta\alpha_1}{\alpha\beta_1}x^h + \frac{\gamma\alpha_1}{\alpha\gamma_1}x^{2h} + \ldots\right);$$

es ist also nur nöthig zu zeigen, wie eine Reihe, von der Form des in Klammern eingeschlossenen Ausdrucks, in einen Kettenbruch verwandelt werden kann. Zu diesem Zwecke kann man verschiedene Methoden anwenden.

Erste Methode.

31.

Die einfachste Art, eine Reihe von der Form

$$(Q.)\quad 1 + \frac{A_1}{a_1}x^h + \frac{A_2}{a_2}x^{2h} + \frac{A_3}{a_3}x^{3h}\ldots\text{**)}$$

in einen Kettenbruch zu verwandeln, ergiebt sich aus 28., wenn man das

*) Diese Form schadet übrigens der Allgemeinheit der Untersuchung nicht, indem man $x=1$ setzen, und $\frac{\alpha}{\alpha_1} + \frac{\beta}{\beta_1}$ etc. alsdann jede beliebige Reihe ausdrücken kann.

**) Soll dieser Ausdruck auf Reihen, in welchen negative Glieder vorkommen, angewandt werden, so hat man nur nöthig, in den bezüglichen Gliedern Zähler oder Nenner des Coefficienten negativ zu nehmen.

dortige Verfahren umkehrt. Man setze nemlich $A_1 x^k = b_1$, $A_2 x^{2k} = -b_2 b_1$, $A_3 x^{3k} = b_1.b_2.b_3$ etc., $\alpha_1 = a_1$; $\alpha_2 = a_2.a_1, a_2$; $\alpha_3 = a_1, a_2.a_3, a_3$ etc., also ist $b_1 = A_1 x^k$; $b_2 = -\frac{A_2.x^{2k}}{b_1} = -\frac{A_2.x^k}{A_1}$; $b_3 = \frac{A_3 x^{3k}}{b_1.b_2} = -\frac{A_3 x^k}{A_2}$, und allgemein $b_m = -\frac{A_m x^k}{A_{m-1}}$; ferner ist $\alpha_1 = a_1$; $a_1, a_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$; $a_1, a_3 = \frac{\alpha_3.\alpha_1}{\alpha_2}$; und wenn m eine gerade Zahl bedeutet, so ist überhaupt, wie leicht einzusehen ist:

$$\frac{\alpha_{m-1}.\alpha_{m-3}...\alpha_3.\alpha_1}{\alpha_{m-2}\alpha_{m-4}...\alpha_2} = a_1, a_{m-1}; \quad \frac{\alpha_m.\alpha_{m-2}...\alpha_2}{\alpha_{m-1}\alpha_{m-3}...\alpha_1} = a_1, a_m; \quad \frac{\alpha_{m+1}\alpha_{m-1}...\alpha_3.\alpha_1}{\alpha_m\alpha_{m-2}...\alpha_2} = a_1, a_{m+1}.$$

Da aber $a_1, a_{m+1} = a_{m+1}.a_1, a_m + b_{m+1}.a_1, a_{m-1}$, so folgt

$$\alpha_{m+1} = \frac{\frac{\alpha_{m+1}.\alpha_{m-1}....\alpha_3.\alpha_1}{\alpha_m.\alpha_{m-2}....\alpha_2} + \frac{A_{m+1}.x^k}{A_m}.\frac{\alpha_{m-1}.\alpha_{m-3}....\alpha_3.\alpha_1}{\alpha_{m-2}.\alpha_{m-4}....\alpha_2}}{\frac{\alpha_m.\alpha_{m-2}....\alpha_2}{\alpha_{m-1}.\alpha_{m-3}....\alpha_1}}$$

$$= \frac{(A_m.a_{m+1} + A_{m+1}.x^k.\alpha_m)(\alpha_{m-1}....\alpha_1)^2}{A_m(\alpha_m.\alpha_{m-2}....\alpha_2)^2}.$$

Eben so findet man $\alpha_m = \frac{(A_{m-1}.a_m + A_m.x^k.\alpha_{m-1})(\alpha_{m-2}.\alpha_{m-4}....\alpha_2)^2}{A_{m-1}(\alpha_{m-1}.\alpha_{m-3}....\alpha_1)^2}$.

Aus der Reihe (Q.) entsteht also der Kettenbruch $F(\alpha_1 \alpha_m) =$

$$F\left(1 + A_1 x^k : \alpha_1 - \frac{A_2.x^k}{A_1} : \frac{(A_1.a_2 + A_2\ x^k.\alpha_1)}{A_1.\alpha_1^2} - \frac{A_3.x^k}{A_2} : \frac{(A_2.a_3 + A_3.x^k.\alpha_2).\alpha_1^2}{A_2.\alpha_2^2}\right.$$
$$\left. - \frac{A_4.x^k}{A_3} : \frac{(A_3.a_4 + A_4\ x^k.\alpha_3).(\alpha_2)^2}{A_3(\alpha_3.\alpha_1)^2} \text{ etc.}\right)$$

Schafft man aus diesem Kettenbruche alle gebrochenen Theilzähler und Theilnenner, und die überflüssigen Factoren weg (§. 10. und 18.) so findet man $F(\alpha_1 \alpha_m) =$

$$F\left(1 + A_1 x^k : a_1, -a_1^2.A_2 x^k : (A_1 a_2 + A_2.x^k.\alpha_1) - A_1.\alpha_2^2.A_3 x^k : (A_2 a_3 + A_3 x^k \alpha_2)\right.$$
$$\left. - A_2.\alpha_3^2.A_4.x^k : (A_3 a_4 + A_4.x^k.\alpha_3) \text{ etc.}\right)\ ^{*}).$$

32.

Es soll z. B. das Binomium $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n.n-1}{1.2}x^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}x^3....$ in einen Kettenbruch verwandelt werden; man setze, um diese Reihe mit

---

*) Nach §. 28. Anmerk. ließe sich diese Formel durch

$$\overset{m}{\underset{1,m}{F}}\left(1 + \frac{A_1.x^k}{a_1 - \frac{A_{m-1}.\alpha_m^2.A_{m+1}\ x^k}{A_m.a_{m+1} + A_{m+1}.x^k.\alpha_m}}\right)$$

bezeichnen, wenn man $A_0 = 1$ setzt; ist die Reihe eine endliche, so wird irgend ein Werth $A_s = 0$ sein, und alsdann auch der Kettenbruch ein endlicher sein, weil auch A_{s+1}, A_{s+2} etc. alsdann $= 0$ sind.

der Reihe (Q.) zu vergleichen, $A_1 = n$, $A_2 = n.n-1$, $A_3 = n.n-1.n-2\ldots$ $\ldots a_1 = 1$, $a_2 = 1.2; \ldots a_m = 1.2\ldots m$; $h = 1$, so erhält man

$$(1+x)^n = 1 + \cfrac{nx}{1 - \cfrac{n.n-1.x}{1.2.n + n.n-1.x - \cfrac{n.1.2^2.n.n-1.n-2.x}{n.n-1.1.2.3 + n.n-1.n-2.2.x - \cfrac{n.n-1(2.3)^2.n.n-1.n-2.n-3.x}{n.n-1.n-2.2.3.4 + n.n-1.n-2.n-3.2.3.x}}}} \text{ etc.}$$

und wenn man den Bruch reducirt:

$$1.\quad (1+x)^n = 1 + \cfrac{nx}{1 - \cfrac{(n-1)x}{2 + (n-1)x - \cfrac{2.(n-2).x}{3 + (n-2)x - \cfrac{3(n-3)x}{4 + (n-3)x}}}} \text{ etc.}$$

welchen Ausdruck man durch ${}_{1-\infty}^{\;m}F\left(1 + \cfrac{nx}{1 - \cfrac{m.(n-m)x}{m+1+(n-m).x}}\right)$ andeuten kann.

Man bemerke, dafs der Bruch abbricht, wenn n eine ganze Zahl ist, sobald $m = n$ wird.

Nimmt man $-n$ statt n, so hat man:

$$2.\quad (1+x)^{-n} = 1 - \cfrac{nx}{1 - \cfrac{(-n-1)x}{2 + (-n-1)x - \cfrac{2(-n-2)x}{3 + (-n-2)x}}} \text{ etc.} = 1 - \cfrac{nx}{1 + \cfrac{(n+1)x}{2 - (n+1)x + \cfrac{2(n+2)x}{3 - (n+2)x}}} \text{ etc.}$$

$$= {}_{1-\infty}^{\;m}F\left(1 - \cfrac{nx}{1 + \cfrac{m.(m+n)x}{m+1-(m+n)x}}\right),$$

welcher Bruch ebenfalls abbricht, wenn n eine ganze Zahl ist.

Da $(1+x)^{-1} = \frac{1}{(1+x)^n}$ ist, so folgt aus (1.):

$$(1+x)^{-n} = \frac{1}{{}_{1-\infty}^{\;m}F\left(1 + \cfrac{nx}{1 - \cfrac{m(n-m)x}{m+1+(n-m)x}}\right)} = \frac{1}{{}_{1-\infty}^{\;m}F\left(1 + \cfrac{nx}{1 + \cfrac{m(m-n)x}{m+1-(m-n)}}\right)}.$$

Eben so findet man aus (2.)

$$(1+x)^n = \frac{1}{{}_{1-\infty}^{\;m}F\left(1 - \cfrac{nx}{1 + \cfrac{m(m+n)x}{m+1-(m+n)x}}\right)}.$$

Man hat also die merkwürdige Beziehung:

$${}_{1-\infty}^{\;m}F\left(1 + \cfrac{nx}{1 + \cfrac{m(m-n)x}{m+1-(m-n)x}}\right) = \frac{1}{{}_{1-\infty}^{\;m}F\left(1 - \cfrac{nx}{1 + \cfrac{m(m+n)x}{m+1-(m+u)x}}\right)}.$$

33.

Es sei die Reihe $\frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m+2n} - \frac{1}{m+3n} \ldots\ldots$ gegeben, welche man bekanntlich aus $\int \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$ erhält, wenn man nach der Integration $x=1$ setzt, und diese Reihe soll in einen Kettenbruch verwandelt werden, so ist, im Vergleich mit der Reihe (Q.), $x=1$, $A_1 = A_2 = A_3$ etc. $=1$, $\alpha_1 = m$, $\alpha_2 = -(m+n)$, $\alpha_3 = m+2n$, und überhaupt $\alpha_{2r+1} = (m+2rn)$, $\alpha_{2r} = -(m+(2r-1)n)$, und die ganze Reihe $= Q-1$, also

$$= \cfrac{1}{m - \cfrac{m^2}{-(m+n)+m - \cfrac{(m+n)^2}{m+2n-(m+n) - \cfrac{(m+2n)^2}{-m+3n+(m+2n) - \text{etc.}}}}}$$

Reducirt man den Bruch und verändert die Zeichen (nach §. 19.), so verwandelt sich dieser Bruch in folgenden: $F(1:m+m^2:n+(m+n)^2:n$ etc.), welchen man durch ${}_{0\ldots\infty}^{\;\;x}F\left(\cfrac{1}{m+\cfrac{(m+xn)^2}{n}}\right)$ bezeichnen kann, oder durch

$${}_{0-\infty}^{\;\;x}F[1:m+(m+xn)^2:n].$$

Setzt man $m=1$, $n=2$, so wird die Reihe $= 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$ etc. $=\frac{\pi}{4}$, und Kettenbruch $\frac{\pi}{4} = {}_{0-\infty}^{\;\;x}F[1:1+(1+2x)^2:2]$ *), wie schon früher (§. 28.) gefunden wurde.

34.

Substituirt man in §. 32. statt n den Exponenten $r+n$, so hat man nach Formel (1.),

(*a*.) $(1+x)^{r+n} = {}_{1-\infty}^{\;\;m}F[1+(r+n)x:1-m(r+n-m)x:(m+1+(r+n-m)x)]$.

Nun ist

(*b*.) $(1+x)^r = {}_{1-\infty}^{\;\;r}F[1+rx:1-m(r-m)x:(m+1+(n-m)x)]$,

(*c*.) $(1+x)^n = {}_{1-\infty}^{\;\;n}F[1+nx:1-m(n-m)x:(m+1+(n-m)x)]$,

---

*) Dieser Kettenbruch ist historisch merkwürdig, weil er die erste Veranlassung zur Ausbildung der Theorie der Kettenbrüche war. Er wurde von Baron Brounker gefunden, der ihn Wallis (s. dessen *Arithm. Inf. Prop.* 191.) mittheilte. Euler behauptet an mehreren Orten (z. B. *mém. de l'ac. de Pétersb. T.* 5. *pag.* 31.), Brounker habe diesen Kettenbruch aus der schon vor Leibnitz bekannten Reihe $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ etc. abgeleitet, indessen scheint doch aus Wallis Worten hervorzugehen, dafs Brounker ihn auf dem viel weitläufigeren, von Wallis angegebenen Wege, gefunden hat, denn in der angeführten Stelle heifst es: *quum vero nobilissimo viro difficilius persuasum iri video, ut illud ipse suscipere velit, conabor ego rem illam ad ipsius mentem, quam possim, proxime, breviter exhibere.*

also

$$(a) = (b).(c).$$

Man sieht leicht wie sich auf ähnliche Weise noch unendlich viele Beziehungen finden lassen. Hätte man den Ausdruck

$$\frac{A.x^m + A_1.x^{m+h} + A_2.x^{m+2h} \ldots\ldots}{Bx^n + B_1 x^{n+k} + B_2 x^{n+2k} \ldots\ldots},$$

welchen man in einen Kettenbruch verwandeln will, so müfste man ihn erst nach bekannten Regeln in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe verwandeln, und auf diese das gezeigte Verfahren anwenden *).

Zweite Methode.

35.

Die Kettenbrüche, welche man nach der ersten Methode aus den Reihen erhält, haben alle, wie die allgemeine Form zeigt, sowohl in allen Theilzählern als Theilnennern, die Gröfse x. Die zweite Methode aber beruht auf einem auch sonst in der Analysis gebräuchlichen Verfahren, wodurch man Kettenbrüche von anderer Form erhalten kann. Man denkt sich nemlich den Kettenbruch als schon vorhanden, und vergleicht ihn mit der gegebenen Reihe, wodurch man den Werth der einzelnen Theilzähler und Theilnenner erhält. Die Form des Kettenbruchs könnte also hypothetisch willkürlich angenommen werden; aber am brauchbarsten werden diejenigen Kettenbrüche sein, bei welchen die Gröfse x entweder nur in allen Theilzählern oder in allen Theilzählern und Theilnennern vorkommt; es sollen daher nur Kettenbrüche dieser Art berücksichtigt werden.

36.

Es sei also die Reihe

$$(T.) \quad 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 \text{ etc.}$$

gegeben, welche in einen Kettenbruch verwandelt werden soll, dessen Theilzähler alle $= x$ sind. Man setze den gesuchten Kettenbruch $=$ $F(1 + x : a_1 + x : a_2 + x : a_3 \text{ etc.})$ **), so ist $A_1 x + A_2 x^2 \ldots = F(x : a_1 + x : a_2 \ldots)$ oder $A_1 + A_2 x \ldots = F(1 : a_1 + x : a_2 \ldots)$. Ferner setze man $F(a_1 + x : a_3 \ldots) = P$, also ist $A_1 + A_2 x \ldots = \dfrac{1}{a_1 + \frac{x}{P}}$ und

---

*) Über diese Methode, Reihen in Kettenbrüche zu verwandeln, s. m. besonders Euler in *Introd. in Anal. inf.* und *Opusc. analyt. T.* 2. *pag.* 138 ff.

**) Die Formel $F(1 + \alpha_1 x : \alpha_1 + \alpha_2 x : \alpha_2 \text{ etc.})$ würde nicht allgemeiner sein, weil es immer möglich ist, die Gröfsen α_1, α_2 .... aus dem Zähler zu schaffen (§. 18.).

$$(1.)\qquad (A_1 + A_2 x \ldots.)\left(a_1 + \frac{x}{P}\right) - 1 = 0,$$

folglich, da die constanten Glieder einander aufheben müssen:

$$A_1 a_1 - 1 = 0 \text{ oder } a_1 = \frac{1}{A_1},$$

und man erhält aus (1.) die Gleichung:

$$a_1(A_2 x + A_3 x^2 \ldots.) + \frac{x}{P}(A_1 + A_2 x \ldots.) = 0,$$

oder

$$a_1 P(A_2 x + A_3 x^2 \ldots.) + x(A_1 + A_2 x \ldots.) = 0,$$

also auch

$$a_1 P(A_2 + A_3 x \ldots.) + (A_1 + A_2 x \ldots.) = 0.$$

Man setze nun $P = a_2 + \frac{x}{P_1}$, so hat man

$$(2.)\qquad a_1\left(a_2 + \frac{x}{P_1}\right)(A_2 + A_3 x \ldots.) + (A_1 + A_2 x \ldots.) = 0,$$

also auch

$$a_1 a_2 A_2 + A_1 = 0, \text{ und } a_2 = -\frac{A_1}{a_1 A_2}.$$

Aus Gleichung (2.) folgt wieder

$$a_1 a_2 (A_3 + A_4 x \ldots.) + \frac{a_1}{P_1}(A_2 + A_3 x \ldots.) + (A_2 + A_3 x \ldots.) = 0,$$

und wenn man $P_1 = a_3 + \frac{x}{P_2}$ setzt:

$$3.\quad a_1 a_2\left(a_3 + \frac{x}{P_2}\right)(A_3 + A_4 x \ldots.) + a_1(A_2 + A_3 x \ldots.) + \left(a_3 + \frac{x}{P_2}\right)(A_2 + A_3 x \ldots.) = 0,$$

also

$$a_1 a_2 a_3 A_3 + a_1 A_2 + a_3 A_2 = 0, \text{ d. h. } a_3 = -\frac{a_1 A_2}{A_2 + a_1 a_2 A_3}.$$

Aus (3.) würde man wieder die Bedingungsgleichung

$$a_1 a_2 a_3 a_4 A_4 + a_1 a_2 A_3 + a_1 a_4 A_3 + a_3 a_4 A_3 + A_2 = 0$$

erhalten, woraus wieder a_4 gefunden wird, und so könnte man allmälig alle Theilnenner des Kettenbruches finden.

Es ist aber leicht, jede folgende Bedingungsgleichung aus der vorhergehenden abzuleiten. Schreibt man nemlich die schon erhaltenen auf etwas geänderte Weise, so findet man

$$a_1 A_2 a_2 + A_1 = 0,$$
$$(a_1 A_3 a_2 + A_2) a_3 + a_1 A_2 = 0,$$
$$[(a_1 a_2 A_4 + A_3) a_3 + a_1 A_3] a_4 + a_1 a_2 A_3 + A_2 = 0.$$

Hieraus kann man nach Analogie folgendes Gesetz ableiten:

Wenn a_m durch die Gleichung $Q a_m + q = 0$ bestimmt wird, so dafs q nicht a_m enthält, so wird a_{m+1} durch die Gleichung $(Q_1 a_m + q_1) a_{m+1} + Q = 0$ bestimmt, wo Q_1, q_1, die Ausdrücke bedeuten, die man erhält,

wenn man in Q und q den Index *) aller darin vorkommender A um eine Einheit erhöht.

Um die allgemeine Gültigkeit dieses Satzes einzusehen, nehme man an, es sei die Gleichung $Qa_m + q = 0$ aus der Gleichung

$$(U.)\quad \left(a_m + \frac{x}{P_{m-1}}\right)(Q + Q_1 x + Q_2 x^2 \ldots) + q + q_1 x + q_2 x^2 \ldots = 0$$

entstanden, wo $P_{m-1} = a_{m+1} + \frac{x}{a_{m+2} \text{ etc.}}$ ist, und Q_n, q_n die Ausdrücke bedeuten, die man aus Q_{n-1}, q_{n-1} erhält, indem man den Index aller in Q_{n-1}, q_{n-1} vorkommender A um eine Einheit erhöht. Läfst man die constanten Glieder weg, und dividirt mit x, so verwandelt sich die Gleichung $(U.)$, wenn man zugleich statt P_{m-1} den Werth $a_{m+1} + \frac{x}{P_m}$ setzt, in folgende:

$$\left(a_{m+1} + \frac{x}{P_m}\right)[(Q_1 a_m + q_1) + (Q_2 a_m + q_2)x + \ldots] + Q + Q_1 x + Q_2 x^2 \ldots = 0,$$

und hieraus folgt

$$(Q_1 a_m + q_1) a_{m+1} + Q = 0.$$

Die Formel $(U.)$ ist aber, wie aus dem Vorhergehenden erhellt, für die Werthe $m = 2$, $m = 3$, folglich auch für alle folgende Werthe von m richtig, und das angegebene Gesetz ist daher allgemein.

37.

Aus den Formeln $a_m = -\frac{q}{Q}$, $a_{m+1} = -\frac{Q}{Q_1 a_m + q}$ folgt, dafs der Nenner des Bruches, durch welchen irgend ein Theilnenner bestimmt wird, der Zähler des Bruches ist, durch welchen der darauf folgende Theilnenner bestimmt wird. Um daher das Bildungsgesetz dieser Theilnenner zu kennen, hat man nur nöthig, das der Nenner der Brüche, durch welche sie bestimmt werden, zu suchen. In der Folge soll N_m der Nenner des Bruches sein, durch welchen a_m bestimmt wird, so dafs $a_m = -\frac{N_{m-1}}{N_m}$ ist.

38.

Hat man den Kettenbruch $F(a_1, a_m) = F(a_1 + 1 : a_2 + \ldots + 1 : a_m)$, so kommen in dem Zähler dieses Kettenbruches a_1, a_m Glieder vor, welche alle Elemente a_1, $a_2 \ldots a_m$, andere, die nur $m-2$, $m-4$ u. s. w. Elemente enthalten. Man bezeichne die Summe der Glieder, die $m-n$ Elemente enthalten, durch $(a_1, a_m)_n$, so ist

*) Es versteht sich von selbst, dafs man sich hierbei a_1, a_2 u. s. w. nicht selbst wieder durch A_1, A_2 u. s. w. ausgedrückt denken darf.

$$a_1.a_m = (a_1, a_m)_0 + (a_1, a_m)_2 + (a_1, a_m)_4 \ldots\ ^{*)}.$$

Nun ist

$$a_1, a_{m+1} = a_{m+1}.a_1, a_m + a_1, a_{m-1} \text{ (§. 6.)},$$

folglich auch

$$(a_1, a_{m+1})_n = a_{m+1}.(a_1, a_m)_n + (a_1, a_{m-1})_{n-2}.$$

Giebt man nun den Buchstaben a_1, a_2, u. s. w. dieselbe Bedeutung, wie in den vorhergehenden §§., so hat man allgemein

$$N_m = (a_1, a_{m-1})_0.A_m + (a_1, a_{m-1})_2.A_{m-1} + (a_1, a_{m-1})_4.A_{m-2} \ldots.$$

Angenommen, es sei dieser Ausdruck bis zu einem gewissen Werthe von m richtig, so dafs

4. $N_{m-1} = (a_1, a_{m-2})_0.A_{m-1} + (a_1, a_{m-2})_2.A_{m-2} + (a_2, a_{m-2})_4 A_{m-3} \ldots.$

5. $N_m = (a_1, a_{m-1})_0.A_m + (a_1, a_{m-1})_2.A_{m-1} + (a_1, a_{m-1})_4 A_{m-2} \ldots.$

so hat man

$$a_m N_m + N_{m-1} = a_m(a_1, a_{m-1})_0 A_m + [a_m(a_1, a_{m-1})_2 + (a_1, a_{m-2})_0] A_{m-1} +$$
$$[a_m(a_1, a_{m-1})_4 + (a_1, a_{m-2})_2] A_{m-2} \ldots = (a_1, a_m)_0 A_m + (a_1, a_m)_2 A_{m-1} + (a_1, a_m)_4 A_{m-2} \ldots$$

Es ist aber, nach (§. 36.), $N_{m+1} = a_m N_m + N_{m-1}$, vorausgesetzt, dafs man den Index der A, in N_m und N_{m-1} überall um eine Einheit erhöhet, folglich ist

$$N_{m+1} = (a_1, a_m)_0 A_{m+1} + (a_1, a_m)_2 A_m + (a_1, a_m)_4 A_{m-1} \ldots.$$

also die angenommene Form auch noch für den Werth $m+1$ richtig. Aus §. 36. folgt aber

$$N_3 = (a_1, a_2)_0 A_3 + (a_1, a_2)_2 A_2,$$
$$N_4 = (a_1, a_3)_0 A_4 + (a_1, a_3)_2 A_3.$$

Die Formeln (4.), (5.) sind daher für den Fall $m = 4$, und also auch für alle folgende Werthe von m richtig.

Man hat also folgende Regel: Will man den Nenner des Bruches wissen, der den Werth von a_m angiebt, so bilde man aus den bekannten Werthen a_1, a_2, ... a_{m-1} einen Kettenbruch $F(a_1 + 1 : a_2 \ldots + 1 : a_{m-1})$, nehme den Zähler a_1, a_{m-1} dieses Bruches und multiplicire jeden Theil $(a_1, a_{m-1})_{2n}$ mit A_{m-n}, so giebt die Summe dieser Producte den gesuchten Nenner. Da aber $a_m = -\frac{N_{m-1}}{N_m}$ ist, so hat man

$$a_m = -\frac{(a_1, a_{m-2})_0 A_{m-1} + (a_1, a_{m-2})_2 A_{m-2} + \ldots}{(a_1, a_{m-1})_0 A_m + (a_1, a_{m-1})_2 A_{m-1} + \ldots}.$$

Eigentlich mufs man bei dem Werthe von N_m zwei Fälle unterscheiden, je nachdem $m = 2n$, oder $= 2n + 1$, d. h. eine gerade oder ungerade Zahl ist. Je nachdem der eine oder andere Fall eintritt, hat man

$$N_{2n} = (a_1, a_{2n-1})_0.A_{2n} + (a_1, a_{2n-1})_2.A_{2n-1} + \ldots + (a_1, a_{2n-1})_{2n-2}.A_{n+1},$$

*) Ist m eine gerade Zahl, so ist das letzte Glied dieses Ausdrucks $(a_1, a_m)_m = 1$.

oder

$$N_{2n+1} = (a_1, a_{2n})_0 \cdot A_{2n+1} + (a_1, a_{2n})_1 \cdot A_{2n} + \ldots + (a_1, a_{2n})_{2n-2} A_{n+2} + A_{n+1}.$$

Man bemerke noch Folgendes: Ist $N_{m-1} = \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_{m-1}}$, so ist auch $N_m = -\frac{N_{m-1}}{N_m} = \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_m}$. Da nun $N_2 = a_1 A_2 = -\frac{A_1}{a_1}$ und $A_1 = \frac{1}{a_1}$ (§. 36.), also $N_2 = -\frac{1}{a_1 \cdot a_2}$ ist, so hat man allgemein:

$$N_{2m} = -\frac{1}{a_1 \cdot a_2 \ldots a_{2m}}, \quad N_{2m+1} = \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \ldots a_{2m+1}}$$

oder

$$N_{2m} = -\frac{1}{(a_1, a_{2m})_0}, \quad N_{2m+1} = \frac{1}{(a_1, a_{2m+1})_0}.$$

Hierdurch hat man einen bequemeren Ausdruck für a_m gewonnen, nemlich

$$a_m = \pm \frac{1}{(a_1, a_{m-1})_0} \times \frac{1}{(a_1, a_{m-1})_0 A_m + (a_1, a_{m-1})_1 A_{m-1} + \ldots},$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem m eine gerade oder ungerade Zahl ist.

39.

Es sei die Reihe $x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} \ldots\right) = \log(1+x)$ gegeben, die nach §. 36. in einen Kettenbruch verwandelt werden soll. Hier ist $(T) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} \ldots$ und daher $A_1 = -\frac{1}{2}$, $A_2 = \frac{1}{3}$, $A_3 = -\frac{1}{4}$ etc. allgemein $A_{2m-1} = -\frac{1}{2m}$, $A_{2m} = \frac{1}{2m+1}$. Man findet daher die Werthe von a_1, a_2 u. s. w. nach §. 36. auf folgende Weise. Es ist

$$a_1 = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 = -2 \cdot 1^2,$$

$$-2A_2 \cdot a_2 + A_1 = 0,$$

also

$$a_2 = -\tfrac{3}{4} = -\frac{3}{1^2 \cdot 2^2},$$

$$-2A_3 a_2 + A_2 = \tfrac{3}{2} A_3 + A_2 = -\tfrac{1}{24},$$

also

$$(\tfrac{3}{2} A_3 + A_2)\, a_3 - 2A_2 = 0,$$

und

$$a_3 = -16 = -2 \cdot 2^3,$$

$$(\tfrac{3}{2} A_4 + A_3) a_3 - 2A_3 = \tfrac{3}{10},$$

$$[(\tfrac{3}{2} A_4 + A_3) a_3 - 2A_3] a_4 + \tfrac{3}{2} A_3 + A_2 = 0,$$

oder

$$a_4 = \tfrac{5}{36} = -\frac{5}{2^2 \cdot 3^2}.$$

Fährt man auf diese Weise fort, so findet man, dafs überhaupt

$$a_{2m} = -\frac{2m+1}{m^2.(m+1)^2}, \quad a_{2m+1} = -2(m+1)^3$$

ist, und man hat daher

$$\log(1+x) = x.F\left(1+x:-2+x:-\frac{3}{1^2.2^2}+x:-2\ 2^3+x:-\frac{5}{2^2.3^2}\dots\right)$$

$$= x.F\left(1-x:2+x:\frac{3}{1^2.2^2}+x:2.2^3\dots\right)\dots \quad (\text{§. 19.})$$

oder

$$\log(1+x) = x.{}_{1-\infty}^{\ m}F\left(1-x:2+x:\frac{2m+1}{m^2(m+1)^2}+x:2(m+1)^3\right).$$

Wäre der Ausdruck $(1+x)^m = 1+mx+\frac{m.m-1}{1.2}x^2\dots$ **in einen Kettenbruch zu verwandeln, so hätte man** $a_1 = \frac{1}{m}$; $\frac{1}{m}A_2.a_2+A_1 = 0$, **also** $a_2 = -\frac{2m}{m-1}$; $\frac{1}{m}A_3.a_2+A_2 = \frac{m.m+1}{1.2.3}$; $\left(\frac{1}{m}A_3.a_2+A_2\right)a_3+\frac{1}{m}A_2 = 0$; **also**

$$a_3 = -\frac{3(m-1)}{m.m+1},$$

und man fände allgemein

$$a_{2n} = \pm\frac{2.m.(m+1)\dots(m+n-1)}{m-1.(m-2)\dots(m-n)}, \quad a_{2n+1} = \pm\frac{(2n+1).(m-1)(m-2)\dots(m-n)}{m.(m+1)\dots(m+n)},$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem n **eine gerade oder ungerade Zahl ist. Man überzeugt sich leicht, dafs der entsprechende Kettenbruch abbricht, wenn** m **eine ganze, positive oder negative Zahl ist, und kann hier ähnliche Betrachtungen wie in §. 32. anstellen.**

Aus der Gleichung (U.) **in §. 36. folgt**

$$a_m(Q_1x+Q_2x^2\dots)+\frac{x}{P_{m-1}}(Q+Q_1x+\dots)+q_1x+q_2x^2\dots = 0,$$

oder

$$P_{m-1} = -\frac{Q+Q_1x+Q_2x^2\dots}{a_mQ_1+q_1+(a_mQ_2+q_2)x+(a_mQ_3+q_3)x^2\dots},$$

durch welche Formel der Rest des Kettenbruchs ausgedrückt wird, wenn man denselben bis zum Theilnenner a_m **berechnet hat.**

40.

Es ist nun leicht, auch den Ausdruck $\frac{1+A_1x+A_2x^2+\dots}{1+B_1x+B_2x^2+\dots}$ **in einen Kettenbruch** $F(1+x:a_1+x:a_2\dots)$ **zu verwandeln. Angenommen, dafs** P, $P_1\dots$ **dieselbe Bedeutung haben wie in §. 36., so findet man**

$$\frac{1+A_1x+A_2x^2\dots}{1+B_1x+B_2x^2\dots} = \frac{a_1+\frac{x}{P}+x}{a_1+\frac{x}{P}}$$

und

$$\left(a_1+\frac{x}{p}\right)[(A_1-B_1)x+(A_2-B_2)x^2+\ldots.]-x(1+B_1x+B_2x^2\ldots.)=0.$$

Dividirt man diese Gleichung mit x, und setzt zugleich $A_m-B_m=C_m$, so hat man

$$(U_1.)\quad (C_1+C_2x+\ldots.)\left(a_1+\frac{x}{p}\right)-1-(B_1x+B_2x^2\ldots.)=0.$$

Diese Gleichung enthält alle Glieder, welche die Gleichung (1.) in §. 36. enthält, sobald man statt A den Buchstaben C setzt, außerdem aber noch die Glieder B_1x, $B_2x^2\ldots.$ Die Bedingungsgleichungen werden also dieselben Glieder enthalten, wie die des erwähnten §., sobald statt A der Buchstabe C gesetzt wird, nur werden noch einige den Buchstaben B enthaltende Glieder dazu kommen. Die Entwickelung der Gleichung $(U_1.)$ zeigt dies am besten. Zuerst folgt aus derselben

$$a_1C_1-1=0 \text{ und } a_1=\frac{1}{C_1},$$

also

$$a_1(C_2x+C_3x^2\ldots.)+\frac{x}{a_2+\frac{x}{P_1}}(C_1+C_2x\ldots.)-(B_1x+B_2x^2\ldots.)=0,$$

oder

$$\left(a_2+\frac{x}{P_1}\right)[a_1C_2-B_1+(a_1C_3-B_2)x+(a_1C_4-B_3)x^2\ldots.]+C_1+C_2x\ldots.=0.$$

Die Glieder, welche B enthalten, erhält man aus denjenigen, die C enthalten, indem man statt a_1C_2, a_1C_3 u. s. w. bezüglich $-B_1$, $-B_2$ u. s. w. setzt. Man findet daher die Bedingungsgleichungen auf folgende Weise: Man denke sich zuerst, es sei die Gleichung

$$(m.)\quad (C_1+C_2x\ldots.)\left(a_1+\frac{x}{P}\right)-1=0$$

gegeben (d. h. man nehme an, es solle die Reihe $1+C_1x+C_2x^2\ldots.$ in einen Kettenbruch $F(1+x:a_1+x:a_2\ldots.)$ verwandelt werden), und entwickele die Bedingungsgleichungen, die die Werthe von a_1, a_2 u. s. w. bestimmen, nach §. 36. ff.; man setze in den erhaltenen Bedingungsgleichungen $a_1C_2=-B_1$, $a_1C_3=-B_2$ u. s. w. und addire die hieraus entstehenden Glieder zu den schon erhaltenen, so hat man die wahren Bedingungsgleichungen. Aus der Gleichung $(m.)$ erhielte man z. B. die Bedingungsgleichungen

$$a_1C_2a_2+C_1=0,$$
$$(a_1a_2C_3+C_2)a_3+a_1C_2=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

daher sind die wahren Bedingungsgleichungen:

$$a_1 C_2 a_2 + C_1 - B_1 a_2 = 0,$$

$$(a_1 a_2 C_3 + C_2) a_3 + a_1 C_2 - a_2 B_2 a_3 - B_1 = 0,$$

. . . .

41.

Zwei auf einander folgende, aus der Gleichung (m.) entwickelte Bedingungsgleichungen werden allgemein durch die Formeln

$$1. \quad Q a_m + q = 0,$$

$$2. \quad (Q_1 a_m + q_1) a_{m+1} + Q = 0$$

dargestellt werden können, wenn man unter Q_1, q_1 die Werthe versteht, die man aus Q, q, erhält, indem man den Index der C überall um eine Einheit erhöht (§. 36.).

Aus (1.) und (2.) erhält man die wahren Bedingungsgleichungen

$$3. \quad (Q - R) a_m + q - r = 0,$$

$$4. \quad [(Q_1 - R_1) a_m + q_1 - r_1] a_{m+1} + Q - R = 0,$$

wo R, r, R_1, r_1, die Werthe bedeuten, die man erhält, indem man in Q, q, Q_1, q_1 statt $a_1 C_2$, $a_1 C_3$ u. s. w. $-B_1$, $-B_2$ u. s. w. setzt. Man würde aber R_1, r_1 auch unmittelbar aus R, r, erhalten können, indem man den Index der B um eine Einheit erhöhte, und man kann daher sagen: Ist ein Theilnenner a_m durch die Gleichung $0 = S a_m + T$ gegeben, so erhält man den folgenden a_{m+1} durch die Gleichung $(S_1 a_m + T_1) a_{m+1} + S = 0$, wo S_1, T_1 die Werthe bedeuten, die man aus S und T erhält, indem man den Index aller C und aller B um eine Einheit erhöht. Auch hier ist also der Nenner des Bruches, durch welchen a_m bestimmt wird, der Zähler desjenigen, durch welchen a_{m+1} bestimmt wird, und man hat daher auch hier nur nöthig, das Bildungsgesetz der Nenner dieser Brüche zu erforschen. Bezeichnet man wieder durch N_m den Nenner des Bruches, durch welchen a_m bestimmt wird, so giebt die Gleichung (5.) in §. 38. sogleich den Theil des Werthes von N_m, in welchem C vorkommt, nemlich

$$(a_1, a_{m-1})_0 C_m + (a_1, a_{m-1})_2 C_{m-1} + (a_1, a_{m-1})_4 C_{m-2} + \dots$$

Hieraus mufs der andere Theil des Werthes von N_m abgeleitet werden, indem man allgemein statt $a_1 C_n$ den Werth $-B_{n-1}$ setzt. In dieser Hinsicht bemerke man, dafs $(a_1, a_{m-1}) = a_1 \cdot (a_2, a_{m-1}) + (a_3, a_{m-1})$, und daher auch $(a_1, a_{m-1})_{2r} = a_1 (a_2, a_{m-1})_{2r} + (a_3, a_{m-1})_{2r-2}$ .... (§. 4.). Aus irgend einem Gliede $(a_1, a_{m-1})_{2r} \cdot C_{m-r}$ folgt daher durch die erwähnte Substitution das Glied $-B_{m-r-1} (a_2, a_{m-1})_{2r}$, und man hat daher:

$$N_m = \begin{cases}(a_1, a_{m-1})_0 C_m + (a_1, a_{m-1})_2 C_{m-1} + (a_1, a_{m-1})_4 C_{m-2} \ldots. \\ \qquad - (a_2, a_{m-1})_0 B_{m-1} - (a_2, a_{m-1})_2 B_{m-2} \ldots. \end{cases}$$

Man muſs auch hier zwei Fälle unterscheiden, je nachdem m eine gerade oder ungerade Zahl ist. Ist $m = 2n$, so hat man

$$N_{2n} = \begin{cases}(a_1, a_{2n-1})_0 C_{2n} + (a_1, a_{2n-1})_2 C_{2n-1} + \ldots. + (a_1, a_{2n-1})_{2n-2} . C_{n+1} \\ \qquad - (a_2, a_{2n-1})_0 B_{2n-1} + \ldots. - (a_2, a_{2n-1})_{2n-4} . B_{n+1} - B_n;\end{cases}$$

ist dagegen $m = 2n + 1$, so hat man:

$$N_{2n+1} = \begin{cases}(a_1, a_{2n})_0 C_{2n+1} + (a_1, a_{2n})_2 C_{2n} + \ldots + (a_1, a_{2n})_{2n-2} C_{n+2} + C_{n+1} \\ \qquad -(a_2, a_{2n})_0 B_{2n} + \ldots - (a_2, a_{2n})_{2n-4} B_{n+2} - (a_2, a_{2n})_{2n-2} B_{n+1}.\end{cases}$$

Da $a = -\frac{N_{m-1}}{N_m}$ ist, so wird $N_m = \frac{1}{a_1 . a_2 \ldots. a_m}$, wenn $N_{m-1} = \frac{-1}{a_1 . a_2 \ldots. a_{m-1}}$ ist. Nun hat man (§. 40.) $a_1 C_2 a_2 + C_1 = 0$, also $N_2 = a_1 C_2 = -\frac{C_1}{a_2}$; aber $a_1 = \frac{1}{C_1}$, also $N_2 = \frac{1}{a_1 . a_2}$, und daher allgemein:

$$N_{2n} = \frac{1}{a_1 . a_2 \ldots. a_{2n}}, \quad N_{2n+1} = \frac{1}{a_1 . a_2 \ldots. a_{2n+1}}$$

42.

Es soll z. B. der Ausdruck

$$\frac{x(e^x + e^{-x})}{e^x - e^{-x}} = \frac{x(e^{2x}+1)}{e^{2x}-1} = \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots.}{1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} + \ldots.}$$

in einen Kettenbruch verwandelt werden. Man setze $x^2 = y$, so geht dieser Ausdruck in folgenden über: $\frac{1 + \frac{y}{2!} + \frac{y^2}{4!} + \frac{y^3}{6!} + \ldots.}{1 + \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} + \frac{y^3}{7!} + \ldots.}$. Hier ist $C_1 = -\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!}$ $= \frac{2}{3!}$, $C_2 = \frac{1}{5!} - \frac{1}{4!} = -\frac{4}{5!}$, $C_3 = -\frac{1}{7!} + \frac{1}{6!} = \frac{6}{7!}$, allgemein $C_m = \frac{2m}{(2m+1)!}$, und $B_m = \frac{1}{(2m+1)!}$, also

$$a_1 = \frac{1}{C_1} = 3,$$

$$N_2 = a_1 C_1 - B_1 = \frac{1}{3.5}, \quad a_2 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3.5}} = 5,$$

$$N_3 = a_1 a_2 C_3 + C_2 - a_2 B_2 = \frac{1}{3.5.7}, \quad a_3 = \frac{\frac{1}{3.5}}{\frac{1}{3.5.7}} = 7.$$

Fährt man auf diese Weise fort, so findet man daſs allgemein $a_m = 2m+1$ ist, und es ist daher der entsprechende Kettenbruch $= {}_{1-\infty}^{\;m} F[1+x^2:(2m+1)]$.

43.

Soll der Ausdruck $\dfrac{1}{1+B_1 x + B_2 x^2 \ldots}$ in einen Kettenbruch
$$F(1+x:a_1+x:a_2\ldots)$$
verwandelt werden, so erhält man die gesuchten Werthe sogleich aus §. 40., wenn man $A_1, A_2 \ldots = 0$ setzt, d. h. statt C_n überall $-B_n$ substituirt; also ist

$$N_{2n} = \left\{\begin{matrix} -(a_1, a_{2n-1})_0 . B_{2n} - (a_1, a_{2n-1})_2 . B_{2n-1} - \ldots - (a_1, a_{2n-1})_{2n-2} B_{n+1} \\ -(a_2, a_{2n-1})_0 . B_{2n-1} \ldots - (a_2, a_{2n-1})_{2n-4} . B_{n+1} - B_n \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{a_1 . a_2 \ldots a_{2n}},$$

und

$$N_{2n+1} = \left\{\begin{matrix} -(a_1, a_{2n})_0 B_{2n+1} - (a_1, a_{2n})_2 . B_{2n} - \ldots - (a_1, a_{2n})_{2n-2} . B_{n+2} - B_{n+1} \\ -(a_2, a_{2n})_0 . B_{2n} \ldots - (a_2, a_{2n})_{2n-2} . B_{n+1} \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{a_1 . a_2 \ldots a_{2n+1}}.$$

Für diesen Fall trifft also die Regel, wie man eine folgende Bedingungsgleichung aus einer vorhergehenden findet, vollkommen mit der des §. 36. zusammen. Ist nemlich a_m durch die Gleichung $S a_m + T = 0$ gegeben, so wird die folgende $(S_1 a_m + T_1) a_{m+1} + S = 0$ sein, wo S_1, T_1 aus S, T entsteht, indem man den Index der B um einen Einheit erhöht. Soll z. B. der Ausdruck $\dfrac{1}{(1+x)^m} = \dfrac{1}{1+m.x+\dfrac{m.m-1}{1.2}x^2\ldots}$ in einen Kettenbruch verwandelt werden, so hat man $B_1 = m$, $B_2 = \dfrac{m.m-1}{1.2}$ etc., also

$$a_1 = \frac{1}{B_1} = -\frac{1}{m},$$

$$N_2 = -a_1 B_2 - B_1 = -\frac{(m+1)}{1.2},\quad a_2 = \frac{m}{-\dfrac{(m+1)}{1.2}} = -\frac{2m}{m+1},$$

$$N_3 = -(a_1 a_2 B_3 + B_2 + a_2 B_2) = -\frac{m(m-1)}{2.3},\quad a_3 = \frac{-\dfrac{(m+1)}{1.2}}{-\dfrac{m(m-1)}{2.3}} = \frac{3(m+1)}{m(m-1)},$$

und man findet, daſs allgemein

$$a_{2n} = \pm\frac{2.m.(m-1)\ldots(m-n+1)}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)},\quad a_{2n+1} = \pm\frac{(2n+1)(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}{m.(m-1)\ldots(m-n)},$$

wo das obere oder untere Zeichen genommen werden muſs, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist. Dasselbe Resultat ergiebt sich auch aus dem in §. 39. gefundenen Kettenbruche, der den Werth von

$(1+x)^m$ angiebt, sobald man dort überall statt m den Werth $-m$ substituirt. Man vergl. auch §. 32.

44.

Will man die Reihe $1+A_1x+A_2x^2+\ldots.$ in einen Kettenbruch verwandeln, der die Form $F(1:1+x:a_1+x:a_2,\ldots.)$ haben soll, so kann man die Werthe von a_1, $a_2\ldots.$ unmittelbar auf ähnliche Weise wie in (§. 36.) finden. Leichter werden sie auf folgende Weise gefunden. Aus der angenommenen Form des Kettenbruchs folgt $\frac{1}{1+A_1x+A_2x^2\ldots.}=$ $F(1+x:a_1+x:a_2\ldots.)$. Die Werthe von a_1, $a_2\ldots.$ werden also ganz dieselben sein, wie in (§. 43.), sobald man statt B überall A setzt.

Will man den Ausdruck $\frac{1}{1+B_1x+B_2x^2\ldots.}$ in einen Kettenbruch verwandeln, der die Form $F(1:1+x:a_1+x:a_2\ldots.)$ haben soll, so ist $1+B_1x+B_2x^2\ldots.=F(1+x:a_1+x:a_2\ldots.)$. Die gesuchten Gröfsen würden also auf dieselbe Weise wie in §. 36. ff. gefunden.

Soll dagegen der Ausdruck $\frac{1+A_1x+A_2x^2+\ldots.}{1+B_1x+B_2x^2+\ldots.}$ in einen Kettenbruch $F(1:1+x:a_1+x:a_2\ldots.)$ verwandelt werden, so könnte man statt dessen $\frac{1+B_1x+B_2x^2+\ldots.}{1+A_1x+A_2x^2+\ldots.}=F(1+x:a_1+x:a_2\ldots.)$ setzen. Die Aufgabe ist alsdann auf die des (§. 40.) zurückgeführt, und man kann die dort gefundenen Werthe unmittelbar anwenden, wenn man A und B überall vertauscht.

45.

Es möge noch der Fall hervorgehoben werden, wenn die Reihe

$$1+A_1x+A_2x^2+\ldots.$$

in einen Kettenbruch verwandelt werden soll, der die Form

$$F[1+x:(a_1+x)+x:(a_2+x)+\ldots.]$$

hat. Aus dieser Annahme folgt sogleich

$$A_1+A_2x+A_3x^2\ldots.=F[1:(a_1+x)+x:(a_2+x)+\ldots.].$$

Man setze $x+\frac{x}{a_2+x+\text{etc.}}=P$, so hat man $(A_1+A_2x+\ldots.)(a_1+P)=1$, und daher

$$A_1a_1-1=0 \text{ oder } a_1=\frac{1}{A_1}.$$

Ferner sei $P=x+\frac{x}{a_2+P_1}$, so hat man

$$\left(a_1+x+\frac{x}{a_2+P_1}\right)(A_2x+A_3x^2\ldots.)+A_1\left(x+\frac{x}{a_2+P_1}\right)=0,$$

oder

$(A.)\quad A_1(a_2+P_1+1)+(A_2+A_3x+\ldots.)[(a_1+x)(a_2+P_1)+x]=0=$
$(a_2+P_1)[(A_1+A_2a_1)+(A_2+A_3a_1)x+(A_3+A_4a_1)x^2\ldots.]+A_1+A_2x+A_3x^2\ldots.$

Hieraus folgt $A_1a_2+a_1A_2a_2+A_1=0$, oder $a_2=-\frac{A_1}{A_1+A_2a_2}$.

Man findet allgemein jede Bedingungsgleichung aus der vorhergehenden auf folgende Weise: Ist a_m durch die Gleichung $Qa_m+q=0$ gegeben, so wird a_{m+1} durch die Gleichung $(Q_1a_m+q_1+Q)a_{m+1}+Q=0$ bestimmt, wo Q_1, q_1 wieder die Werthe bedeuten, die man aus Q, q, erhält, indem man den Index der A um eine Einheit erhöht. Denn angenommen, es entstände die Gleichung Qa_m+q aus der Gleichung

$(1.)\quad (a_m+P_{m-1})(Q+Q_1x+Q_2x^2+\ldots.)+q+q_1x+q_2x^2\ldots.=0,$

wo

$$P_{m-1}=x+\cfrac{x}{a_{m+1}+x+\cfrac{x}{a_{m+2}+x\text{ etc.}}}=x+\frac{x}{a_{m+1}+P_m}$$

ist, so hätte man

$a_m(Q_1+Q_2x+\ldots.)+\left(1+\frac{1}{a_{m+1}+P_m}\right)(Q+Q_1x+Q_2x^2\ldots.)+q_1+q_2x\ldots.=0,$

oder

$$(a_{m+1}+P_m)(a_mQ_1+q_1+Q)+(a_{m+1}+P_m)a_m(Q_2x+Q_3x^2\ldots.)+$$
$$(a_{m+1}+P_m)(Q_1x+Q_2x^2\ldots)+Q+Q_1x+Q_2x^2\ldots.+(a_{m+1}+P_m)(q_2x+q_3x^2+\ldots),$$

woraus $a_{m+1}(a_mQ_1+q_1+Q)+Q=0$ folgt. Da aber die Gleichung (1.) wirklich richtig ist, wenn $m=2$ ist, wie die Gleichung ($A.$) zeigt, so gilt das angegebene Bildungsgesetz der Bedingungsgleichungen für alle folgende Werthe von m. Man sieht, dafs auch hier der Nenner des Bruches, durch welchen irgend ein Theilnenner a_m bestimmt wird, der Zähler des Bruches ist, durch welchen a_{m+1} bestimmt wird.

Man sieht, dafs hier die Berechnung der Theilnenner verwickelter wird, als bei den früher (§. 36., §. 44.) betrachteten Formen, und ich übergehe daher genauere Erörterungen, die sich leicht aus dem Vorhergehenden ergeben, da ohnehin nicht leicht das Bedürfnifs entstehen wird, Reihen in Kettenbrüche von der hier angenommenen Form zu verwandeln.

46.

Folgende Bemerkungen über die zweite Methode §. 36.—45. mögen hier noch Platz finden. Es ist aus der Darstellung ersichtlich, dafs die Theilnenner a_1, a_2, ... durch die Reihencoefficienten A_1, A_2, ... vollkommen bestimmt sind. Einer jeden Reihe $1+A_1x+A_2x^2+\ldots.$

entspricht also nur ein Kettenbruch von angegebener Form, d. h. zwei nicht identische Kettenbrüche, welche beide in einer und derselben der §. 36., §. 44., §. 45., angegebenen Formen enthalten sind, können nicht aus derselben Reihe entstanden sein. Was man also auch für eine, von den früher gegebenen abweichende Methode anwendet, eine Reihe $1+A_1x+A_2x^2\ldots$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, immer wird dieser Kettenbruch, sobald er in einer der angegebenen Formen enthalten ist, oder darauf zurückgeführt werden kann, mit dem, nach der angegebenen Methoden berechneten zusammenfallen. Wäre die Reihe $1+Ax^m+A_1x^{2m}+\ldots$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, so würde man sie sogleich auf die frühere Form zurückbringen, indem man $x^m=y$ setzte. Die Theilzähler würden also in diesem Falle nicht mehr x sondern x^m sein. Auch zusammengesetztere Reihen würde man, wie die Analysis lehrt, auf die Form $1+A_1x+A_2x^2\ldots$ zurückbringen, und daher nach der angegebenen Methode in einen Kettenbruch verwandeln können.

Es darf nicht übersehen werden, daſs diese Methode noch einer weitere Ausbildung bedarf *). Die allgemeinen Ausdrücke für die Theilnenner, welche in den berechneten Beispielen (§. 39., §. 42., § 43.,) gegeben wurden, sind dort nicht durch einen strengen Beweis, sondern vielmehr durch Induction gefunden worden. In allen ähnlichen Fällen, wo die Reihencoefficienten nach einem gewissen Gesetze gebildet sind, wird sich auch ein solches für die Theilnenner der entsprechenden Kettenbrüche angeben lassen. Die vorhergehenden Betrachtungen bieten aber unmittelbar kein Mittel dar, diese allgemeinen Ausdrücke zu finden und zugleich ihre Richtigkeit zu beweisen. Hierzu scheint es vielmehr nothwendig zu sein, einen einfachen Ausdruck zu finden, welcher jeden Theilnenner a_m (oder jedes N_m, N_{m+1}) unmittelbar aus den Reihencoefficienten $A_1, A_2\ldots$ finden lehrt. Der Verfasser hat sich vergebens bemüht, die Lösung dieser Aufgabe zu finden, vielleicht aber können die mitgetheilten Ausdrücke für N_m, N_{m+1}, welche wohl noch nirgendwo angegeben sind, darauf führen. Allerdings kann man einen solchen Beweis in vielen Fällen durch andere, im folgenden Abschnitt erläuterte Mittel finden, aber sie sind indi-

*) Diese Bemerkung gilt auch von anderen ähnlichen Methoden, welche man bei anderen Schriftstellern findet. Man vergleiche namentlich *Mém de l'ac. de Pétersb. T.* 1. *pag.* 156. *ff.*, *pag.* 226. *ff.*, *T.* 7. *pag.* 139. *ff.* In letzterem Aufsatze sind die allgemeinen Ausdrücke für die Theilnenner keineswegs bewiesen.

rect und beruhen auf Betrachtung einzelner Reihen; daher ist die Ausbildung einer allgemeineren Methode sehr wünschenswerth.

47.

Man braucht die in den vorhergehenden §§. enthaltenen Formeln nur umzukehren, d. h. man braucht nur $a_1, a_2, \ldots$ als bekannte, $A_1, A_2, \ldots$ als unbekannte Gröfsen zu betrachten, um sogleich eine Methode, Kettenbrüche in Reihen zu verwandeln, zu erhalten. Aus der Formel

$$a_m = -\frac{(a_1, a_{m-2})_0 A_{m-1} + (a_1, a_{m-2})_2 A_{m-2} + \ldots}{(a_1, a_{m-1})_0 A_m + (a_1, a_{m-1})_2 A_{m-1} + \ldots} \ldots\ldots (§. 38.)$$

folgt

$$(a_1, a_m)_0 A_m + [a_m(a_1, a_{m-1})_2 + (a_1, a_{m-2})_0] A_{m-1} + [a_m(a_1, a_{m-1})_4 + (a_1, a_{m-2})_2] A_{m-2} + \ldots = 0.$$

Da aber allgemein $(a_1, a_m)_n = a_m(a_1, a_{m-1})_n + (a_1, a_{m-2})_{n-2}$ ist, so geht die obige Gleichung in folgende über:

$$(a_1, a_m)_0 A_m + (a_1, a_m)_2 A_{m-1} + (a_1, a_m)_4 A_{m-2} + \ldots = 0$$

oder

$$1. \quad A_m = -\frac{(a_1, a_m)_2 A_{m-1} + (a_1, a_m)_4 A_{m-2} + \ldots}{(a_1, a_m)_0}.$$

Ist also ein Kettenbruch $F(1 + x : a_1 + x : a_2 + \ldots)$ gegeben, der in eine Reihe $1 + A_1 x + A_2 x^2 \ldots$ verwandelt werden soll, so zeigt die vorstehende Formel, wie man jeden Coefficienten A_m der Reihe finden kann. Man bemerke noch Folgendes. Sind A_{m-2}, A_{m-1} durch die Bedingungsgleichungen

$$(a_1, a_{m-2})_0 A_{m-2} + q = 0,$$
$$(a_1, a_{m-1})_0 A_{m-1} + Q = 0$$

gegeben, so findet man A_m durch die Gleichung

$$2. \quad a_m . [(a_1, a_{m-1})_0 A_m + Q_1] + (a_1, a_{m-2}) A_{m-1} + q_1 = 0,$$

oder

$$(a_1, a_m)_0 A_m = -(a_m . Q_1 + (a_1, a_{m-2}) A_{m-1} + q_1),$$

wo Q_1, q_1 die Werthe bedeuten, die man aus Q, q erhält, indem man den Index der A um eine Einheit erhöht. Der Beweis dieses Satzes beruht darauf, dafs die Bedingungsgleichungen dieselben, nur anders geordnet, sind, wie in §. 36., also auch auf dieselbe Weise gebildet werden. Ist aber $q . a_{m-1} + r = 0$, so ist auch $a_m(q_1 a_{m-1} + r_1) + q = 0 = Q a_m + q$ und $(Q_1 a_m + q_1) a_{m+1} + Q = (Q_1 a_m + q_1) a_{m+1} + q_1 a_{m-1} + r_1 = 0$, wenn q_1, r_1 die Werthe bedeuten, die man aus q, r erhält, indem man den Index der A

um eine Einheit erhöht. Hieraus ergiebt sich die Wahrheit der Gleichung (2.) von selbst.

Wollte man den Kettenbruch $F(1+x:a_1+x:a_2\ldots.)$ nach §. 28. in eine Reihe verwandeln, so bütte man $b_1=b_2=b_3\ldots.=x$, und es wäre der zu x^m gehörende Coefficient $A_m=\pm\frac{1}{a_1,\,a_{m-1}\,.\,a_1,\,a_m}$. Die resultirende Reihe ist daher auch von der verschieden, die ans dem zuletzt gezeigten Verfahren entsteht.

Soll ein Kettenbruch von der Form $F(1:1+x:a_1+x:a_2\ldots.)$ in eine Reihe $1+A_1x+A_2x^2+\ldots.$ verwandelt werden, so findet man die erforderlichen Formeln aus §. 44. (oder §. 43.). Die Berechnung wird aber bequemer ausfallen, wenn man einen solchen Kettenbruch in einen anderen $F(1:1+1:b_2+1:b_3)$ verwandelt (§. 25.). Setzt man $b_1=1$, so kann man diesen letzteren Kettenbruch so ansehen, als sei er, durch Hinweglassung der ersten Einheit aus $F(1+1:b_1+1:b_2+\ldots..)$ enstanden, und ihn daher unmittelbar nach dem vorhergehenden in eine Reihe auflösen, indem man $x=1$ setzt.

Hieran knüpft sich zugleich die Bemerkung, dafs man überhaupt alle Kettenbrüche nach der in diesem §. gezeigten Methode in Reihen auflösen kann, weil man sie immer unter die Form $F(1+x:a_1+x:a_2\ldots.)$ bringen kann, indem man $x=1$ setzt.

Es sei z. B. der Kettenbruch $F(1:1+1:3+4:5+9:7\ldots.)$ gegeben, welcher durch ${}_1\overset{m}{\underset{\infty}{-}}F(1:1+m^2:2m+1)$ angedeutet werden kann. Statt dessen kann man

$$F\left(1:1+1:3+1:\frac{5}{4}+1:\frac{4.7}{9}+1:\frac{9.9}{8.8}\ldots.\right)$$

schreiben. Man hat daher $a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=\frac{5}{4}$, $a_4=\frac{4.7}{9}$, also (nach Formel 1.):

$$A_1=\quad\frac{1}{a_1}=1,$$

$$A_2=-\frac{A_1}{a_1a_2}=-\tfrac{1}{3},$$

$$A_3=-\frac{(a_1+a_3)A_2}{a_1a_2a_3}=\tfrac{1}{5},$$

$$A_4=-\frac{(a_1a_2+a_1a_4+a_3a_4)A_3+A_2}{a_1a_2a_3a_4}=-\tfrac{1}{7}.$$

Setzt man die Arbeit fort, so findet man die Reihe

$$1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{11}\dots\dots$$

also ${}_{1}\overset{m}{-}{}_{\infty}F(1:1+m^2:2m+1)=\frac{\pi}{4}$ *).

B. Ableitung der Kettenbrüche aus gewissen Reihen.

48.

Schon in §. 2. wurde gezeigt, wie man Kettenbrüche aus gewissen Gröfsen $A, B, C, D, \dots\dots$ von welchen je drei auf einander folgende einen gewissen Zusammenhang haben, ableiten kann. Hat man also gewisse, nach Potenzen von x fortschreitende Reihen, welche mit anderen ähnlich gebildeter in einem solchen Zusammenhange stehen, so kann man daraus sogleich einen Kettenbruch ableiten. Das einfachste Beispiel dieser Art bietet die allgemeine Gleichung des 2ten Grades dar. Aus der Gleichung $c=ax+bx^2$ folgt $cx=ax^2+bx^3$, $cx^2=ax^3+bx^4$, $cx^3=ax^4+bx^5\dots$ Vergleicht man diese Ausdrücke mit denen des §. 2., so findet man

$$c=A,\ x=B,\ x^2=C,\ x^3=D,\ x^4=E\dots\dots$$

$$a=a,\ b=b,\ \frac{a}{c}=a_1=a_2=a_3\dots\dots\ \frac{b}{c}=b_1=b_2=b_3\dots\dots,$$

folglich

$$\frac{c}{x}=a+\cfrac{b}{\cfrac{a}{c}+\cfrac{\frac{b}{c}}{\cfrac{a}{c}+\cfrac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}\text{ etc.}}}}=a+\cfrac{bc}{a+\cfrac{bc}{a+\text{ etc.}}}$$

oder

$$x=F(c:a+bc:a+bc:a\dots\dots)$$

Schon hieraus sieht man, dafs die Wurzel jeder quadratischen Gleichung durch einen Kettenbruch ausgedrückt werden kann. Dieser Gegenstand wird jedoch später genauer erörtert werden. Unter den Reihen aber, aus welchen Kettenbrüche auf solche Weise abgeleitet werden können, ist besonders diejenige merkwürdig, welche zuerst Gaufs zu diesem Zwecke angewandt hat **).

---

*) Dieser Ausdruck wird später noch auf andere Weise gefunden werden.

**) *Comm. soc. Gotting. rec. T. II. ad a. 1812.*

Es sei

$$(A.)\quad \varphi(a,b,c,x)=1+\frac{ab}{c}x+\frac{a.a+1.b.b+1}{1.2.c.c+1}x^2+\frac{a.a+1.a+2.b.b+1.b+2}{1.2.3.c.c+1.c+2}\ldots\ldots$$

gegeben. Die Buchstaben a und b können ohne Änderung des Werthes der Reihe vertauscht werden, also ist $\varphi(a,b,c,x)=\varphi(b,a,c,x)$.

Setzt man $b+1$ statt b, $c+1$ statt c, so findet man

$$\varphi(a,b+1,c+1,x)=1+\frac{a.b+1}{c+1}x+\frac{a.a+1.b+1.b+2}{1.2.c+1.c+2}x^2+\frac{a.a+1.a+2.b+1.b+2.b+3}{1.2.3.c+1.c+2.c+3}x^3\ldots\ldots$$

und wenn man die Glieder, die gleich hohe Potenzen von x enthalten, mit einander verbindet, so findet man

$$\varphi(a,b+1,c+1,x)-\varphi(a,b,c,x)=\frac{a}{c}.\frac{c-b}{c+1}x\left[1+\frac{a+1.b+1}{c+2}x+\frac{a+1.a+2.b+1.b+2}{1.2.c+2.c+3}\ldots\right],$$

oder

$$\varphi(a,b+1,c+1,x)-\varphi(a,b,c,x)=\frac{a}{c}.\frac{c-b}{c+1}x\,\varphi(a+1,b+1.c+2).$$

Hieraus folgt,

$$1.\quad \frac{\varphi(a,b+1,c+1,x)}{\varphi(a,b,c,x)}=\frac{1}{1-\frac{a}{c}.\frac{c-b}{c+1}x.\frac{\varphi(a+1,b+1,c+2,x)}{\varphi(a,b+1,c+1,x)}}.$$

Setzt man in Gleichung (1.) $b+1$ statt a, a statt b und $c+1$ statt c, so findet man

$$\frac{\varphi(b+1.a+1,c+2,x)}{\varphi(b+1,a,c+1,x)}=\frac{1}{1-\frac{b+1.c-a+1}{c+1.c+2}x.\frac{\varphi(b+2,a+1,c+3,x)}{\varphi(b+1,a+1,c+2,x)}}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{b+1.c-a+1}{c+1.c+2}x.\frac{\varphi(a+1,b+2,c+3,x)}{\varphi(a+1,b+1,c+2,x)}},$$

oder

$$\frac{\varphi(a+1,b+1,c+2)}{\varphi(a,b+1,c+1,x)}=\frac{1}{1-\frac{b+1.c-a+1}{c+1.c+2}x.\frac{\varphi(a+1,b+2,c+3)}{\varphi(a+1,b+1,c+2)}},$$

und wenn man diesen Werth in Gleichung (1.) substituirt:

$$2.\quad \frac{\varphi(a,b+1,c+1,x)}{\varphi(a,b,c,x)}=\cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{a}{c}.\frac{c-b}{c+1}x}{1-\frac{b+1.c-a+1}{c+1.c+2}x.\frac{\varphi(a+1,b+2,c+3,x)}{\varphi(a+1,b+1,c+2,x)}}}.$$

Substituirt man hier $a+1$ statt a, $b+1$ statt b, $c+2$ statt c, so findet man

$$\frac{\varphi(a+1,b+2,c+3,x)}{\varphi(a+1,b+1,c+2,x)}=\cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{a+1}{c+2}.\frac{c+1-b}{c+3}x}{1-\frac{b+2.c-a+2}{c+3.c+4}x.\frac{\varphi(a+2,b+3,c+5,x)}{\varphi(a+2,b+2,c+4,x)}}}.$$

Diesen Werth kann man wieder in Gleichung (2.) substituiren, und führt man auf diese Weise fort, so entwickelt sich $\frac{\varphi(a,b+1,c+1,x)}{\varphi(a,b,c,x)}$ in einen Kettenbruch, dessen Theilnenner alle $=1$ sind, dessen Theilzähler abwechselnd $= -\frac{(a+m).(c+m-b)}{(c+2m).(c+2m-1)}x$ und $-\frac{(b+m+1)(c+m-a+1)}{(c+2m+1)(c+2m+2)}x$ sind, wo für m nacheinander die Werthe 0, 1, 2, 3 .... gesetzt werden müssen (den ersten Theilzähler ausgenommen, der $=1$ ist). Man hat also

$$3.\quad \frac{\varphi(a,b+1,c+1,x)}{\varphi(a,b,c,x)}$$

$$= {}^{m}_{0-\infty}F\left[1:1-\frac{(a+m)(c+m-b)}{(c+2m)(c+2m+1)}.x:1-\frac{(b+m+1)(c+m-a+1)}{(c+2m+1)(c+2m+2)}x:1\right].$$

Setzt man $b=0$, so wird $\Phi(a,b,c,x)=1$, und man erhält in diesem Falle aus Gleichung (3.), indem man zugleich $c-1$ statt c setzt:

$$4.\quad \Phi(a,1,c,x) = {}^{m}_{0-\infty}F\left[1:1-\frac{a+m.c+m-1}{c+2m-1.c+2m}x:1-\frac{m+1.c+m-a}{c+2m.c+2m-1}x:1\right].$$

Jede Reihe, die in der Form $\Phi(a,1,c,x)$ enthalten ist, kann daher sogleich in einen Kettenbruch verwandelt werden. Gaufs hat gezeigt, dafs die wichtigsten, in der Analysis vorkommenden Reihen in dieser Form enthalten sind.

Ist z. B. $a=1$, $c=2$, $x=-y$, so ist

$$\Phi(a,1,c,x) = 1-\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{3}y^2-\tfrac{1}{4}y^3\ldots.,$$

und daher

$$\log(1+y) = y\Phi(1,1,2,-y) = y.F\left[1:1+\frac{1.1}{1.2}y:1+\frac{1.1}{2.3}y:1+\frac{2.2}{3.4}y:1+\frac{2.2}{4.5}y:1 \text{ etc.}\right]$$

$$= y.{}^{m}_{0-\infty}F\left[1:1-\frac{1+m.1+m}{1+2m.2+2m}y:1-\frac{1+m.1+m}{2+2m.3+2m}y:1\right]$$

$$= y.{}^{m}_{0-\infty}F\left[1:1-\frac{1+m}{2(1+2m)}y-\frac{1+m}{2(3+2m)}y:1\right].$$

Es ist $t=\operatorname{tang}t(1-\frac{1}{3}\operatorname{tang}^2t+\frac{1}{5}\operatorname{tang}^4t-\frac{1}{7}\operatorname{tang}^6.t\ldots.)$. Setzt man daher $a=\frac{1}{2}$, $c=\frac{3}{2}$, $x=-\operatorname{tang}^2t$, so ist $t=\operatorname{tang}t.\Phi(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},-\operatorname{tang}^2t) =$ $\operatorname{tang}t.{}^{m}_{0-\infty}F\left[1:1+\frac{\frac{1}{2}+m.\frac{1}{2}+m}{\frac{1}{2}+2m.\frac{3}{2}+2m}\operatorname{tang}^2t:1+\frac{1+m.1+m}{\frac{3}{2}+2m.\frac{5}{2}+2m}.\operatorname{tang}^2t:1\right]$, also

$$t=\operatorname{tang}t\,F\left(1:1+\frac{\frac{1^2}{4}}{\frac{1.3}{4}}\operatorname{tang}^2t:1+\frac{1^2}{\frac{3.5}{4}}\operatorname{tang}^2t:1+\frac{\frac{3^2}{4}}{\frac{5.7}{4}}\operatorname{tang}^2t:1+\frac{2^2}{\frac{7.9}{4}}\operatorname{tang}^2t:1\ldots.\right),$$

woraus man nach gehöriger Reduction

$$t=\operatorname{tang}t\,F[1:1+\operatorname{tang}^2t:3+2^2\operatorname{tang}^2t:5+3^2\operatorname{tang}^2t:7\ldots.]$$

findet, was man kürzer durch $t = \text{tang}\, t \,{}_{1-\infty}^{m} F[1:1 + m^2 . \text{tang}^2 t : 2m+1]$ andeuten kann.

Diese und die übrigen Kettenbrüche, welche Gaufs aus der Gleichung (4.) entwickelt hat, sind in der Form $F(1:1+x:a_1+x:a_2,\ldots)$ enthalten, oder können doch auf dieselbe zurückgeführt werden; sie müssen daher (§. 46.) mit denjenigen übereinstimmen, die man nach der Methode des §. 44. erhält. Man kann aber mit Hülfe derselben Prinzipien $\varphi(a, 1, c, x)$ auch in einen Kettenbruch verwandeln, der der Form $(1+x:a_1+x:a_2\ldots)$ entspricht, und also mit denjenigen übereinstimmen mufs, die man nach §. 36. erhält.

Man findet nemlich auf ähnliche Weise, wie die Gleichung (1.) gefunden wurde: $\varphi(a+1, b-1, c, x) - \varphi(a, b, c, x) = \frac{b-a-1}{c} x . \varphi(a+1, b, c+1, x)$ und

$$5. \quad \frac{(a, b, c, x)}{\varphi(a+1, b-1, c, x)} = 1 - \frac{b-a-1}{c} x . \frac{\varphi(a+1, b, c+1, x)}{\varphi(a+1, b-1, c, x)}.$$

Setzt man aber in Gleichung (3.), $a+1$ statt a, $b-1$ statt b, so findet man

$$\frac{\varphi(a+1, b, c+1, x)}{\varphi(a+1, b-1, c, x)}$$

$$= {}_{0-\infty}^{m} F\left[1:1 - \frac{(a+1+m).(c+m-b+1)}{(c+2m).(c+2m+1)} x : 1 - \frac{(b+m).(c+m-a)}{(c+2m+1).(c+2m+2)} x : 1\right],$$

und wenn man diesen Werth in Gleichung (5.) substituirt:

$$6. \quad \frac{\varphi(a, b, c, x)}{\varphi(a+1, b-1, c, x)} =$$

$${}_{0-\infty}^{m} F\left[1 - \frac{b-a-1}{c} x : 1 - \frac{(a+1+m).(c+m-b+1)}{(c+2m).(c+2m+1)} x : 1 - \frac{(b+m).(c+m-a)}{(c+2m+1).(c+2m+2)} x : 1\right].$$

Nimmt man $b = 1$, so ist $\varphi(a+1, b-1, c, x) = 0$, und daher

$$7. \quad \varphi(a, 1, c, x) =$$

$${}_{0-\infty}^{m} F\left[1 + \frac{a.x}{c} : 1 - \frac{(a+1+m).(c+m)}{(c+2m).(c+2m+1)} x : 1 - \frac{(m+1).(c+m-a)}{(c+2m+1).(c+2m+2)} x : 1\right].$$

Die Gleichheit der Ausdrücke (4.) und (7.) bildet wieder eine sehr merkwürdige Beziehung zwischen Kettenbrüchen.

Setzt man wieder $a = 1$, $c = 2$, $x = -y$, so giebt die Gleich. (7.):

$$\log(1+y) = yF\left[1 - \frac{1}{2} y : 1 + \frac{2.2}{2.3} y : 1 + \frac{1.1}{3.4} y : 1 + \frac{3.3}{4.5} y : 1 + \frac{2.2}{5.6} y : 1 \ldots\right]$$

$$= yF\left[1 - y : 2 + y : \frac{3}{2^2} + y : 2.2^3 \ldots\right],$$

wie schon §. 39. gefunden wurde.

Es ist wegen einer folgenden Betrachtung wichtig, den Werth von $\tang t$ in einem Kettenbruche ausgedrückt zu haben, welcher daher noch aus dem Vorhergehenden abgeleitet werden soll. Will man die Reihe $\sin t = t\left(1-\frac{t^2}{3!}+\frac{t^4}{5!}\dots\right)$ mit der Reihe (A.) vergleichen, so findet man

$$\sin t = t\varphi\left(n, n', \frac{3}{2}, -\frac{t^2}{4n.n'}\right),$$

wo $n=a$, $n'=b$ unbegränzt grofse Zahlen bedeuten, so dafs alle endlichen, welche zu denselben addirt, oder von denselben subtrahirt werden sollen, als überflüssig weggelassen werden können, und $n=n'=n+1$ $=n'+1=n+2=n'+2$ u. s. w. ist. Eben so findet man

$$\cos t = \varphi\left(n, n', \frac{1}{2}, -\frac{t^2}{4n.n'}\right),$$

also

$$\tang t = \frac{\sin t}{\cos t} = t\,\frac{\varphi\left(n, n', \frac{3}{2}, -\frac{t^2}{4n.n'}\right)}{\varphi\left(n, n', \frac{1}{2}, -\frac{t^2}{4n.n'}\right)}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Gleichung (5.), so hat man

$$n=a,\ n'=b=b+1,\ c=\frac{1}{2},\ x=-\frac{t^2}{4n.n'},$$

und daher

$$\tang t = t\,.\,{}_0\overset{m}{-}{}_\infty F\left[1;1+\frac{n.n_1}{\frac{(4m+1)(4m+3)}{4}}.-\frac{t^2}{4n.n'}:1+\frac{n.n'}{\frac{4m+3.4m+5}{4}}.-\frac{t^2}{4n.n'}:1\right]$$

$$= t\,.\,{}_0\overset{m}{-}{}_\infty F\left[1:1-\frac{t^2}{(4m+1)(4m+3)}:1-\frac{t^2}{(4m+3)(4m+5)}:1\right],$$

oder

$$\tang t = F\left[t:1-\frac{t^2}{1.3}:1-\frac{t^2}{3.5}:1-\frac{t^2}{5.7}:1-\frac{t^2}{7.9}:1\dots,\right]$$

$$= F[t:1-t^2:3-t^2:5-t^2:7\dots] = {}_1\overset{m}{-}{}_\infty F[t:1-t^2:2m+1].$$

Folgender Fall verdient noch eine besondere Erörterung. Man hat

$$x = \sin x\,.\cos x\,\varphi(1, 1, \tfrac{3}{2}, \sin x^2),$$

also, nach Gleichung (4.):

$$8.\quad x = F\left[\sin x\,.\cos x:1-\frac{1.2}{1.3}\sin x^2:1-\frac{1.2}{3.5}\sin x^2:1\dots\right],$$

und aus Gleichung (7.) findet man

$$9.\quad x = F\left[\sin x\,.\cos x+\sin x\,.\cos x\,.\frac{1.2}{1.3}\sin x^2:1-\frac{2.2}{1.5}\sin x^2:1-\frac{1.2}{5.7}\sin x^2:1\dots\right].$$

Ist $\sin x=0$, so ist auch $x=0$, und daher auch die beiden Kettenbrüche (8.) und (9.) nothwendig $=0$; ist dagegen $\cos x=0$, so ist $\sin x=1$ und

$x = \frac{\pi}{2}$, was auch der Werth der beiden Kettenbrüche sein mufs. Da sich aber in diesem Falle der Ausdruck (8.) in *) $F\left[0:1-\frac{2.2}{1.5}:1-\frac{1.2}{3.5}:1\ldots\right]$ und der Ausdruck (9.) in $F\left[0+0:1-\frac{2.2}{1.5}:1-\frac{1.2}{5.7}:1\ldots\right]$ verwandelt, so müssen diese beiden Kettenbrüche nothwendig die Form $\frac{0}{0}$ haben, d. h. es mufs $F\left[1-\frac{1.2}{1.3}:-\frac{1.2}{3.5}:1\ldots\right]=0$, und auch $F\left[1-\frac{2.2}{1.5}:1-\frac{1.2}{5.7}:1\ldots\right]=0$ sein, oder allgemeiner, es mufs

$$\underset{0-\infty}{\overset{m}{}}F\left[1-\frac{(1+m).(\frac{1}{2}+m)}{(\frac{1}{2}+2m).(\frac{1}{2}+2m)}:1-\frac{(1+m).(\frac{1}{2}+m)}{(\frac{1}{2}+2m).(\frac{1}{2}+2m)}:1\right]=0$$

sein (nach Gleich. 4.), und

$$\underset{0-\infty}{\overset{m}{}}F\left[1-\frac{(2+m)(\frac{1}{2}+m)}{(\frac{1}{2}+2m)(\frac{1}{2}+2m)}:-\frac{(1+m)(\frac{1}{2}+m)}{(\frac{1}{2}+2m)(\frac{1}{2}+2m)}:1\right]=0 \text{ sein.}$$

Aus diesen Bemerkungen liefsen sich eine Menge einzelner Sätze ableiten.

$$\text{Aus } 1-\cfrac{\frac{1.2}{1.3}}{1-\cfrac{\frac{1.2}{3.5}}{1-\cfrac{\frac{3.4}{5.7}}{1 \text{ etc.}}}}=0 \text{ folgt } 1=\cfrac{\frac{1.2}{1.3}}{1-\cfrac{\frac{1.2}{3.5}}{1-\cfrac{\frac{3.4}{5.7}}{1 \text{ etc.}}}}=\cfrac{1.2}{3-\cfrac{1.2}{5-\cfrac{3.4}{7 \text{ etc.}}}}$$

$$\text{also } 3-\cfrac{1.2}{5-\cfrac{3.4}{7-\cfrac{3.4}{9 \text{ etc.}}}}=1.2, \text{ folglich } 1-\cfrac{1.2}{5-\cfrac{3.4}{7-\cfrac{3.4}{9 \text{ etc.}}}}=0 \text{ u. s. w.}$$

Aehnliche Resultate liefsen sich auch aus $F\left[1-\frac{2.2}{1.5}:1-\frac{1.2}{5.7}:1\ldots\right]=0$ ableiten.

Über die Verwandlung der Reihen in Kettenbrüche kann man aufser den angeführten Schriften noch folgende nachsehen:

Nouv. mém. de l'acad. de Berlin 1776. *pag.* 236 ff., und 1794. *pag.* 126.
Nova acta acad. Petr. 1784. *pag.* 36 ff.
Lambert Beiträge zum Gebrauch der Mathem. Thl. II. S. 54 ff.
Annales de mathém. par **Gergonne**. *T. IX.*

---

*) Diese Kettenbrüche dienen als Beweis der in §. 22. aufgestellten Behauptung.

Drittes Kapitel.

A. Verwandelung der unendlichen Producte in Kettenbrüche.

49.

Unter unendlichen Producten werden hier Brüche verstanden, deren Zähler und Nenner das Product einer unendlichen Anzahl von Factoren sind. Die Methode, solche Ausdrücke in Kettenbrüche zu verwandeln, welche im Folgenden gezeigt werden soll, beruht auf der Eigenschaft dieser Producte, sich in Reihen verwandeln zu lassen, welche Letztere wieder in Kettenbrüche verwandelt werden können. Es seien a_1, a_2, a_3, ... a_n beliebige Ausdrücke, und man bilde aus denselben das Product $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots(1+a_n)$, welches durch das Zeichen $(1+a_1|n)$ angedeutet werden soll, so hat man

$$(1+a_1|2) = (1+a_1)(1+a_2) = 1+a_1+a_2(1+a_1|1).$$

Hieraus folgt

$$(1+a_1|3) = (1+a_3)(1+a_1|2) = 1+a_1+a_2(1+a_1|1)+a_3(1+a_1|2),$$

und wenn man auf diese Weise fortfährt, so erhält man

$$1.\quad (1+a_1|n) = 1+a_1+a_2(1+a_1|1)+a_3(1+a_1|2)+\ldots+a_n(1+a_1|n-1).$$

Auf ähnliche Weise kann auch der Ausdruck

$$\frac{(1+a_1|n)}{(1+b_1|n)} = \frac{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)}{(1+b_1)(1+b_2)\ldots(1+b_n)}$$

entwickelt werden. Man setze

$$\frac{1+a_1}{1+b_1} = 1+c_1;\quad \frac{1+a_2}{1+b_2} = 1+c_2,\ \ldots\ \frac{1+a_n}{1+b_n} = 1+c_n,$$

so erhält man aus der Formel (1.):

$$\frac{(1+a_1|n)}{(1+b_1|n)} = (1+c_1|n) = 1+c_1+c_2(1+c_1|1)+c_3(1+c_1|2)+\ldots+c_n(1+c_1|n-1),$$

oder, wenn man für c_1, c_2, c_3 .... c_n die Werthe $\frac{a_1-b_1}{1+b_1}$, $\frac{a_2-b_2}{1+b_2}$, $\frac{a_3-b_3}{1+b_3}$, ... $\frac{a_n-b_n}{1+b_n}$ substituirt:

$$2.\quad \frac{(1+a_1|n)}{(1+b_1|n)} = 1+\frac{a_1-b_1}{1+b_2}+\frac{a_2-b_2}{1+b_2}\cdot\frac{(1+a_1|1)}{(1+b_1|1)}+\ldots+\frac{a_n-b_n}{1+b_n}\cdot\frac{(1+a_1|n-1)}{(1+b_1|n-1)}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$1+a_1 = d_1,\quad 1+a_2 = d_2,\ \ldots\ 1+a_n = d_n,$$
$$1+b_1 = e_1,\quad 1+b_2 = e_2,\ \ldots\ 1+b_n = e_n,$$

so hat man *)

$$3.\quad \frac{d_1.d_2.d_3\ldots d_n}{e_1.e_2.e_3\ldots e_n}=1+\frac{d_1-e_1}{e_1}+\frac{d_2-e_2}{e_2}.\frac{d_1}{e_1}+\frac{d_3-e_3}{e_3}.\frac{d_1.d_2}{e_1.e_2}+\ldots\frac{d_n-e_n}{e_n}.\frac{d_1.d_2\ldots d_{n-1}}{e_1.e_2\ldots e_{n-1}}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Reihe $1+\frac{A_1}{\alpha_1}x^h+\frac{A_2}{\alpha_2}x^{2h}+\frac{A_3}{\alpha_3}x^{3h}\ldots$ und setzt $x=1$, so hat man

$$d_1-e_1=A_1\quad(d_2-e_2)d_1=A_2\quad(d_3-e_3)d_1.d_2=A_3\;\ldots\;(d_n-e_n)d_1d_2\ldots d_n=A_n,$$
$$e_1=\alpha_1\qquad e_1.e_2=\alpha_2\qquad e_1.e_2.e_3=\alpha_3\ldots\ldots e_1.e_2\ldots\ldots e_{n-1}=\alpha_n,$$

folglich (§. 31.)

$$\frac{d_1.d_2.d_3\ldots d_n}{e_1.e_2.e_3\ldots e_n}=1+\cfrac{d_1-e_1}{e_1-\cfrac{(d_2-e_2)d_1.e_1^2}{(d_1-e_1)e_1.e_2+(d_2-e_2)d_1.e_1-\cfrac{(d_1-e_1)(d_3-e_3)d_1.d_2.e_2^2.e_1^2}{(d_2-e_2)d_1.e_1.e_2.e_3+(d_3-e_3)d_1.d_2.e_1.e_2\text{ etc.}}}}$$

Dieser Ausdruck kann aber noch sehr abgekürzt werden, indem man die sich aufhebenden Glieder und die überflüssigen Factoren wegläſst, und zwar findet man nach vorgenommener Reduction:

$$\frac{d_1.d_2\ldots d_n}{e_1.e_2\ldots e_n}=1+\cfrac{d_1-e_1}{e_1-\cfrac{(d_2-e_2)d_1.e_1}{d_1.d_2-e_1.e_2-\cfrac{(d_1-e_1)(d_3-e_3)d_2.e_2}{d_2.d_3-e_2.e_3-\cfrac{(d_2-e_2)(d_4-e_4)d_3.e_3}{d_3.d_4-e_3.e_4\text{ etc.}}}}}$$

Da die Bildung der Ausdrücke d_1, d_2, d_3, ... e_1, e_2, e_3, ... durch keine Voraussetzung beschränkt ist, so kann man also jedes beliebige unendliche Product, mit Hülfe dieser Formel, in einen Kettenbruch verwandeln.

Will man diese Formel in einen allgemeinen Ausdruck zusammenfassen, so hat man

$$4.\quad \frac{d_1.d_2\ldots.d_n}{e_1.e_2\ldots.e_n}={}_{1\sim\infty}^{\;m}F\left(1+\cfrac{d_1-e_1}{e_1-\cfrac{(d_{m-1}-e_{m-1})(d_{m+1}-e_{m+1})d_m.e_m}{d_m.d_{m+1}-e_m.e_{m+1}}}\right),$$

wo $d_0-e_0=1$ gesetzt werden muſs.

Es ist z. B.

$$\frac{\pi}{2}=\tfrac{2}{1}.\tfrac{2}{3}.\tfrac{4}{3}.\tfrac{4}{5}.\tfrac{6}{5}.\tfrac{6}{7}\ldots.$$

Setzt man

$$d_1=2,\; d_2=2,\; d_3=4,\; d_4=4,\; d_5=6,\; d_6=6,\;\ldots.$$
$$e_1=1,\; e_2=3.\; e_3=3,\; e_4=5,\; e_5=5,\; e_6=7,\;\ldots.$$

---

*) Schweins Analysis S. 235.

so ist

$$5.\quad \frac{\pi}{2} = F(1+1:1+1.2:1+2.3:1+3.4:1 \text{ etc.})\ ^{*)}.$$

Man könnte auch $\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6....}{3.1.5.3.7.5....}$ schreiben. Setzt man nun

$$d_1 = 2,\ d_2 = 2,\ d_3 = 4,\ d_4 = 4,\ d_5 = 6,\ d_6 = 6, \ldots.$$
$$e_1 = 3,\ e_2 = 1,\ e_3 = 5,\ e_4 = 3,\ e_5 = 7,\ e_6 = 5,$$

so findet man

$$6.\quad \frac{\pi}{2} = F(1-1:3-2.3:1+1.2:3+4.5:1+3.4:3+6.7:1 \text{ etc.}).$$

Würde man

$$d_1 = 2.2,\ d_2 = 4.4,\ d_3 = 6.6,\ d_4 = 8.8, \ldots.$$
$$e_1 = 1.3,\ e_2 = 3.5,\ e_3 = 5.7,\ e_4 = 7.9, \ldots.$$

setzen, so erhielte man

$$7.\quad \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{2^2.1.3}{2^2.4^2 - 1.3^2.5 - \frac{4^2.3.5}{4^2.6^2 - 3.5^2.7 - \frac{6^2.5.7}{6^2.8^2 - 5.7^2.9 \text{ etc.},}}}$$

und auf ähnliche Weise könnte man noch andere Entwicklungen von $\frac{\pi}{2}$ finden. Eine andere bekannte Formel ist

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3.6.6.12.12.18.18.24....}{2.5.7.11.13.17.19.23....}.$$

Setzt man daher

$$d_1 = 3,\ d_2 = 6,\ d_3 = 6,\ d_4 = 12, \ldots.$$
$$e_1 = 2,\ e_2 = 5,\ e_3 = 7,\ e_4 = 11, \ldots.$$

so hat man

$$\frac{\pi}{2} = F(1+1:2-2.3:8+5.6:1+6.7:5+11.12:1+12.13:5 \text{ etc.}),$$

oder (nach §. 15.)

$$8.\quad \frac{\pi}{2} = F(1+1:1+1:1+2.3:2+5.6:1+6.7:5+11.12:1+12.13:5 \text{ etc.}).$$

Der Ausdruck

$$\sqrt{2} = \frac{2.2.6.6.10.10....}{1.3.5.7.9.11....}$$

giebt, wenn man

$$d_1 = 2,\ d_2 = 2,\ d_3 = 6,\ d_4 = 6, \ldots.$$
$$e_1 = 1,\ e_2 = 3,\ e_3 = 5,\ e_4 = 7, \ldots.$$

setzt:

---

*) Diesen Ausdruck hat schon Euler auf anderem Wege gefunden, *com. ac. Petr. T. 11. pag. 48.*

9. $\sqrt{2} = F(1+1:1+1.2:1+2.3:3+5.6:1+6.7:3+9.10:1 \text{ etc.})$

Die Kettenbrüche (6.), (8.), (9.), bei welchen die Theilnenner abwechselnd wiederkehren, während die Theilzähler nach einem bestimmten Gesetze fortschreiten, sind besonders bemerkenswerth, weil sich aus keiner bisher bekannten Methode ähnliche Kettenbrüche ergeben haben; vermöge der Formel (4.) dagegen ist es leicht, eine Menge solcher Kettenbrüche zu finden. So z. B. findet Euler (*Intr. in an. inf.* §. 185.):

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{4.4.8.8.12.12\ldots}{3.5.7.9.11.13\ldots}.$$

Hieraus erhält man

10. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = F(1+1:3+3.4:1+4.5:3+7.8:1+8.9:3+11.12:1 \text{ etc.}).$

Man bemerke, dafs es sehr leicht ist, solche Kettenbrüche, die aus unendlichen Producten abgeleitet sind, auf irgend eine Potenz zu erheben. Denn da $\left(\frac{d_1 . d_2 . d_3 \ldots d_n}{e_1 . e_2 . e_3 \ldots e_n}\right)^t = \frac{d_1^t . d_2^t . d_3^t \ldots d_n^t}{e_1^2 . e_2^t . e_3^t \ldots e_n^t}$, so findet man aus Formel (4.), indem man statt d, e überall d^t, e^t setzt:

$$\left(\frac{d_1 . d_2 . d_3 \ldots d_n}{e_1 . e_2 . e_3 \ldots e_n}\right)^t = {}_{1}^{m}F\left(1 + \frac{d_1^t - e_1^t}{e_1^t - \frac{(d_{m-1}^t - e_{m-1}^t)(d_{m+1}^t - e_{m+1}^t) d_m^t . e_m^t}{d_m^t . d_{m+1}^t - e_m^t . e_{m+1}^t}}\right).$$

So z. B. giebt der Ausdruck

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{2^2 . 2^2 . 4^2 . 4^2 . 6^2 . 6^2 \ldots}{1^2 . 3^2 . 3^2 . 5^2 . 5^2 . 7^2 \ldots},$$

indem man $d_1 = 2$, $d_2 = 2$, ... $e_1 = 1$, $e_2 = 3$, ... setzt:

$$\frac{\pi^2}{4} = 1 + \cfrac{3}{1 + \cfrac{1.5.1^2.2^2}{4^2 - 3^2 + \cfrac{3.7.2^2.3^2}{9^2 - 8^2 + \cfrac{5.9.3^2.4^2}{16^2 - 15^2 \text{ etc.}}}}}$$

B. Verwandelung der Kettenbrüche in unendliche Producte.

50.

Es werde der zu verwandelnde Kettenbruch durch die allgemeine Formel $1 + \cfrac{n}{n_1 - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 \text{ etc.}}}}$ angedeutet, welche kürzer durch ${}_{1}^{m}F\left(1 + \cfrac{n}{n_1 - \cfrac{b_m}{a_m}}\right)$ ausgedrückt werden kann. Soll nun dieser Kettenbruch in ein unendliches

Product $\frac{d_1 . d_2 . d_3 \ldots}{e_1 . e_2 . e_3 \ldots}$ verwandelt werden, so vergleiche man den Ausdruck $\underset{1-\infty}{\overset{m}{F}}\left(1+\frac{n}{n_1-\frac{b_m}{a_m}}\right)$ mit der Formel (4.) des §. 49., und man findet $n = d_1 - e_1$, $n_1 = e_1$, also $d_1 = n + n_1$, $e_1 = n_1$ und $\frac{d_1}{e_1} = \frac{n+n_1}{n_1}$, ferner

$$b_m = (d_{m-1} - e_{m-1})(d_{m+1} - e_{m+1})\, d_m . e_m,$$
$$a_m = d_m . d_{m+1} - e_m . e_{m+1}.$$

Hieraus findet man

$$12.\quad d_{m+1} = \frac{b_m - a_m . d_m (d_{m-1} - e_{m-1})}{(d_{m-1} - e_{m-1})\, d_m (e_m - d_m)},$$

$$13.\quad e_{m+1} = \frac{b_m - a_m . e_m (d_{m-1} - e_{m-1})}{(d_{m-1} - e_{m-1})\, e_m (e_m - d_m)} \text{ und}$$

$$14.\quad \frac{d_{m+1}}{e_{m+1}} = \frac{e_m}{d_m} . \frac{b_m - a_m . d_m (d_{m-1} - e_{m-1})}{b_m - a_m . e_m (d_{m-1} - e_{m-1})}.$$

Vermöge der Formeln (12.) und (13.) kann man also jeden Zähler und Nenner eines Factors $\frac{d_{m+1}}{e_{m+1}}$ des unendlichen Products berechnen, und zwar auf dem Wege der Recursion, indem man d_m, d_{m-1}, e_m, e_{m-1} als bekannt voraussetzt. Eigentlich aber ist es nicht sowohl wichtig, die Zähler und Nenner der Factoren einzeln, als vielmehr ihren Quotienten $\frac{d_{m+1}}{e_{m+1}}$ zu kennen. Diesen kann man aber auch durch ein independentes Verfahren, d. h. unmittelbar aus den Gliedern des Kettenbruchs finden, ohne die Zähler und Nenner der vorhergehenden Factoren zu kennen. In dieser Beziehung bemerke man Folgendes. Es ist nicht blos der ganze Kettenbruch $\underset{1-\infty}{\overset{m}{F}}\left(1+\frac{n}{n_1-\frac{b_m}{a_m}}\right)$ dem ganzen unendlichen Producte $\frac{d_1 . d_2 . d_3 . d_4 \ldots}{e_1 . e_2 . e_3 . e_4 \ldots}$ gleich, sondern auch jeder Theil des Kettenbruchs einem Theile des unendlichen Products, d. h. es ist $1+\frac{n}{n_1} = \frac{d_1}{e_1}$, $1+\frac{n}{n_1-\frac{b_1}{a_1}} = \frac{d_1 . d_2}{e_1 . e_2}$, $1+\frac{n}{n_1-\frac{b_1}{a_1-\frac{b_2}{a_2}}} = \frac{d_1 . d_2 . d_3 \ldots}{e_1 . e_2 . e_3 \ldots}$ u. s. w. Dies folgt unmittelbar aus Formel (3.); denn läſst man das unendliche Product irgendwo abbrechen, setzt man z. B.

$$d_4 = d_5 = d_6 = \ldots = 1,$$
$$e_4 = e_5 = e_6 = \ldots = 1,$$

so hat man

$$\frac{d_1 . d_2 . d_3}{e_1 . e_2 . e_3} = 1 + \frac{d_1 - e_1}{e_1} + \frac{d_2 - e_2}{e_2} . \frac{d_1}{e_1} + \frac{d_3 - e_3}{e_3} . \frac{d_1 . d_2}{e_1 . e_2},$$

und nach Formel (4.)

$$\frac{d_1 . d_2 . d_3}{e_1 . e_2 . e_3} = 1 + \cfrac{d_1 - e_1}{e_1 \cfrac{(d_2 - e_2) d_1 . e_1}{d_1 . d_2 - e_1 . e_2 \cfrac{(d_1 - e_1)(d_3 - e_3) d_2 . e_2}{d_2 . d_3 - e_2 . e_3}}} = 1 + \cfrac{n}{n_1 - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2}}},$$

und auf dieselbe Weise findet man, dafs jeder andere Theil des unendlichen Products dem entsprechenden Theile des Kettenbruchs gleich ist. Zwei auf einander folgende Theile des Kettenbruchs ${}_{1}\overset{m}{-}{}_{r}F\left(1 + \cfrac{n}{n_1 - \cfrac{b_m}{a_m}}\right)$, ${}_{1}\overset{m}{-}{}_{r+1}F\left(1 + \cfrac{n}{n_1 - \cfrac{b_m}{a_m}}\right)$ sind also bezüglich $= \frac{d_1 . d_2 \ldots . d_{r+1}}{e_1 . e_2 \ldots . e_{r+1}}$, $\frac{d_1 . d_2 \ldots . d_{r+2}}{e_1 . e_2 \ldots . e_{r+2}}$, und der zweite Ausdruck durch den ersten dividirt, giebt $\frac{d_{r+2}}{e_{r+2}}$. Will man also die successiven Theile des unendlichen Products erfahren, so berechne man die successiven Theile des Kettenbruchs, dividire jeden folgenden durch den unmittelbar vorhergehenden, und die Quotienten werden das Verlangte geben.

Es soll z. B. der Kettenbruch

$$F(1 + 1 : 1 + 2 : 2 + 3 : 3 + 4 : 4 \ldots .) = {}_{1}\overset{m}{-}{}_{\infty}F\left(1 + \frac{m}{m}\right)$$

in ein unendliches Product verwandelt werden. Hier ist

$$1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1},\quad 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2}} = \frac{3}{2},\quad 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3}}} = \frac{8}{5},\quad 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4}}}} = \frac{30}{19}, \ldots .$$

also

$$\frac{d_1}{e_1} = \frac{2}{1},\quad \frac{d_2}{e_2} = \frac{1}{2} . \frac{3}{2} = \frac{3}{4},\quad \frac{d_3}{e_3} = \frac{2}{3} . \frac{8}{5} = \frac{16}{15},\quad \frac{d_4}{e_4} = \frac{5}{8} . \frac{30}{19} = \frac{75}{76}, \ldots .$$

Das Gesetz, nach welchem diese Factoren gebildet sind, fällt in die Augen. Es ist nemlich

$$\frac{d_1}{e_1} = \frac{2}{1},\quad \frac{d_2}{e_2} = \frac{3.1}{3.1 + 1},\quad \frac{d_3}{e_3} = \frac{4(3.1 + 1)}{4(3.1 + 1) - 1},\quad \frac{d_4}{e_4} = \frac{5[4(3.1 + 1) - 1]}{5[4(3.1 + 1) - 1] + 1}.$$

Aus der Natur des gegebenen Kettenbruchs kann man aber leicht ableiten, dafs dieses Gesetz allgemein ist, d. h. wenn der $n$te Factor des unendlichen Products $= \frac{l}{l \pm 1}$ ist, so wird der $n + 1$te Factor $= \frac{n + 2(l \pm 1)}{n + 2(l \pm 1) \mp 1}$

sein. Denn es sei *) $\frac{a}{b} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \ldots + \cfrac{n-1}{n-1}}} = {}^{m}_{1-n-1}F\left(1+\frac{m}{m}\right)$. Ist nun

$${}^{m}_{1-n}F\left(1+\frac{m}{m}\right) = \frac{(n+1)a}{(n+1)b \pm 1},$$ so ist auch

$${}^{m}_{1-n+1}F\left(1+\frac{m}{m}\right) = \frac{(n+1)(n+1)a + (n+1)a}{(n+1)[(n+1)b \pm 1] + (n+1)b} \text{ (§. 6. B.)} = \frac{(n+2)(n+1)a}{(n+2)[(n+1)b \pm 1] \mp 1},$$

folglich

$$\frac{d_1 \ldots d_n}{e_1 \ldots e_n} = \frac{{}^{m}_{1-n}F\left(1+\frac{m}{m}\right)}{{}^{m}_{1-n-1}F\left(1+\frac{m}{m}\right)} = \frac{(n+1)b}{(n+1)b \pm 1} = \frac{l}{l \pm 1},$$

$$\frac{d_1 \ldots d_{n+1}}{e_1 \ldots e_{n+1}} = \frac{{}^{m}_{1-n+1}F\left(1+\frac{m}{m}\right)}{{}^{m}_{1-n}F\left(1+\frac{m}{m}\right)} = \frac{(n+2)[(n+1)b \pm 1]}{(n+2)[(n+1)b \pm 1] \mp 1} = \frac{(n+2)(l \pm 1)}{(n+2)(l \pm 1) \mp 1}.$$

Nun ist aber wirklich

$${}^{m}_{1-1}F\left(1+\frac{m}{m}\right) = 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1},$$

$${}^{m}_{1-2}F\left(1+\frac{m}{m}\right) = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2}} = \frac{6}{4} = \frac{3.2}{3.1+1},$$

$${}^{m}_{1-3}F\left(1+\frac{m}{m}\right) = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3}}} = \frac{24}{15} = \frac{4.6}{4.4-1},$$

folglich allgemein ${}^{m}_{1-n}F\left(1+\frac{m}{m}\right) = \frac{(n+1)a}{(n+1)b \pm 1}$, wenn ${}^{m}_{1-n-1}F\left(1+\frac{m}{m}\right) = \frac{a}{b}$ ist. und das Bildungsgesetz der Factoren ist daher allgemein bewiesen.

Aus späteren Betrachtungen (§. 69.) wird sich ergeben, dafs ${}^{m}_{1-\infty}F\left(1+\frac{m}{m}\right) = \frac{e}{e-1}$ ist; man hat daher

$$\frac{e}{e-1} = \cfrac{1}{1-\cfrac{1}{e}} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{75}{76} \cdot \frac{456}{455} \cdot \frac{3185}{3186} \cdots\cdot$$

Wollte man die Factoren nach den Formeln (12.) und (13.) berechnen, so hätte man

---

*) Und zwar soll $\frac{a}{b}$ den Bruch bedeuten, welcher aus der Verwandelung von ${}^{m}_{1-n-1}F\left(1+\frac{m}{m}\right)$ in einen gewöhnlichen Bruch entsteht, ohne dafs eine fernere Reduction vorgenommen wird (vergl. §. 3.).

$$n=1,\quad b_1=-2,\quad b_2=-3,\quad b_3=-4,\quad \dots$$
$$n_1=1,\quad a_1=2,\quad a_2=3,\quad a_3=4,\quad \dots$$
$$d_1=2,\quad d_2=\frac{-2-2.2}{2.-1}=3,\quad d_3=\frac{-3-3.3}{3.-1}=4,\quad \dots$$
$$e_1=1,\quad e_2=\frac{-2-2}{1.-1}=4,\quad e_3=\frac{-3-3.4}{4.-1}=\frac{15}{4},\quad \dots$$

woraus man wieder $\frac{d_1}{e_1}=\frac{2}{1}$, $\frac{d_2}{e_2}=\frac{3}{4}$, $\frac{d_3}{e_3}=\frac{16}{15}$, ... findet.

Es wurde früher (§. 32.) gefunden:

$$\frac{4}{\pi}=F(1+1.1:2+3.3:2+5.5:2 \text{ etc.})={}_0^m{}_\infty F(1+(2m+1)^2:2).$$

Soll dieser Bruch in ein unendliches Product verwandelt werden, so hat man

$$1=\frac{1}{1},\quad 1+\frac{1.1}{2}=\frac{3}{2},\quad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{3^2}{2}}=\frac{15}{13},\quad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2}}}=\frac{105}{76},\quad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2}}}}=\frac{945}{789},\quad \dots$$

und daher $\frac{4}{\pi}=\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{10}{13}\cdot\frac{91}{76}\cdot\frac{684}{791}\cdots$,

Das Gesetz, nach welchem hier die Factoren gebildet werden, leuchtet ein, sobald man sie auf folgende Weise schreibt:

$$\frac{3}{2}=\frac{3.1}{3.1-1},\quad \frac{10}{13}=\frac{5.2}{5.2+1.3},\quad \frac{91}{76}=\frac{7.13}{7.13-1.3.5},\quad \frac{684}{789}=\frac{9.76}{9.76+1.3.5.7},$$

und es ist wieder leicht, die Allgemeinheit dieses Gesetzes aus der Beschaffenheit des Kettenbruches abzuleiten, sobald man bemerkt, daß, wenn der $m$te der Theile $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{15}{13}$, ... $=\frac{a}{b}$ ist, alsdann der $m+1$te $=\frac{(2m+1)a}{(2m+1)b\pm a}$ ist.

51.

Die im Vorhergehenden gezeigte Verwandelung der Kettenbrüche in unendliche Producte beruht auf den Betrachtungen des §. 50. Sie kann aber auf einfacherem Wege gefunden werden. Man kann nemlich statt eines jeden Kettenbruchs $F(a, a_m)$ den Ausdruck

$$a\left(\frac{F(a,a_1)}{a}\cdot\frac{F(a,a_2)}{F(a,a_1)}\cdot\frac{F(a,a_3)}{F(a,a_2)}\cdots\frac{F(a,a_{m-1})}{F(a,a_{m-2})}\cdot\frac{F(a,a_m)}{F(a,a_{m-1})}\right)$$

setzen. Hierdurch ist also der Kettenbruch sogleich in ein Product verwandelt, und setzt man $\frac{F(a,a_1)}{a}=\frac{d_1}{e_1}$, $\frac{F(a,a_2)}{F(a,a_1)}=\frac{d_2}{e_2}$ u. s. w., so fallen diese Ausdrücke ganz mit denen des vorigen §. zusammen, nur daß dort $a=1$ war, welche Beschränkung nun wegfällt.

Hieraus ergiebt sich denn auch unmittelbar ein Verfahren, jedes unendliche Product $\frac{d.d_1 \ldots d_n}{e.e_1 \ldots e_n}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln. Denn man braucht nur

$$\frac{d}{e} = \frac{c}{1}, \quad \frac{d_1}{e_1} = \frac{F(a, a_1)}{a}, \quad \frac{d_2}{e_2} = \frac{F(a, a_2)}{F(a, a_1)}, \ldots$$

oder

$$d = c, \quad d_1 = a.c_1, \quad d_2 = a_1.a, c_2, \ldots$$
$$e = 1, \quad e_1 = c.c_1, \quad e_2 = a_1, a_2.a, a_1, \ldots$$

zu setzen und die Werthe von a, a_1, ... b_1, b_2, ... durch d, d_1, ... e, e_1, ... zu bestimmen. Man kommt hierdurch zuletzt wieder auf Formel (4.) zurück, weshalb die genauere Entwickelung hier übergangen werden möge; nur bemerke man, dafs in Formel (4.) $d = e = 1$ ist.

Da nicht blos das ganze unendliche Product dem ganzen Kettenbruch gleich ist, sondern auch jeder einzelne Theil $\frac{d.d_1}{e.e_1}$, $\frac{d.d_1.d_2}{e.e_1.e_2}$ u. s. w. bezüglich jedem einzelnen Theile $F(a, a_1)$, $F(a, a_2)$ u. s. w., so folgt hieraus, dafs jedes unendliche Product, das man auf dem angegebenen Wege in einen Kettenbruch mit blos positiven Gliedern verwandeln kann, convergirt, indem seine einzelnen Theile abwechselnd gröfser und kleiner als der wahre Werth sein, und sich demselben immer mehr nähern werden, je mehr Factoren man zu ihrer Bildung anwendet (§. 11.).

Die im vorigen § gefundenen Entwickelungen in unendliche Producte scheinen nicht blos deswegen interessant zu sein, weil man sie noch auf keinem andern Wege erhalten hat, sondern weil man überhaupt, so viel dem Verfasser bekannt ist, bisher nur für Functionen von π unendliche, aus ganzen Zahlen bestehende Producte gefunden hat, keinesweges aber für Functionen von e, wie der hier gefundene Ausdruck $\frac{e}{e-1}$ ist. Da der Ausdruck einer Menge ähnlicher Functionen in Kettenbrüchen bekannt ist, so können aus demselben mit Leichtigkeit eben so viel unendliche Producte abgeleitet werden.

(Die Fortsetzung folgt.)

19.

Zur Elementar-Geometrie.

(Von dem Herrn Geh. Hofrath und Prof. *Grüson* zu Berlin.)

In der ebenen Elementar-Geometrie fehlt folgender Lehrsatz:

In jedem nach den Ecken nicht centrischen Vierecke $ABCD$ **(Taf. IV. Fig. 7.) mit lauter hohlen Winkeln, ist die Summe der Rectangel aus den Gegenseiten immer gröfser als das Rectangel aus den beiden Diagonalen.**

D. h. $AB.CD + AD.BC > AC.BD.$

Beweis. Da in einem solchen Vierecke der Winkel ACB nicht gleich δ sein kann, so mache man $\gamma = \delta$ und $\beta = \alpha$; alsdann ist

$$\triangle BCE \backsim \triangle ABD.$$

Die Seiten des $\triangle$s BCE sind BC, CE, BE,
die homologen Seiten des $\triangle$s ABD - BD, AD, AB.

Wir haben daher

I. $AD.BC = BD.CE$ und
II. $AB.BC = BD.BE$ } Crelle Lehrb. d. Geom. S. 102. §. 132. I.

Aus (II.), mit der Bemerkung, dafs der Winkel $ABE = CBD$, folgt

$\triangle ABE \backsim \triangle BCD$ (C. Geom. S. 103. II.),

also $\varphi = \psi$, daher auch

III. $AB.CD = BD.AE$ (C. Geom. §. 132. I.)

Aus (III, und I.) folgt

$$AB.CD + AD.BC = BD(AE + EC),$$

aber $AE + EC > AC$ (C. Geom. §. 49.),

folglich:

$$AB.CD + AD.BC > BD.AC.$$

Zusatz. Wäre der Winkel $ACB = \delta$, so fielen AE und CE beide in AC, und $AE + CE$ wäre alsdann gleich der Diagonale AC, und wir hätten

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD,$$

welches bekanntlich der Ptolemaeische Lehrsatz ist.

Zusatz 2. Umgekehrt: **Wenn in irgend einem ebenen Vierecke mit nur hohlen Winkeln die Summe der Rectangel aus den Gegenseiten gleich dem Rectangel aus den bei-**

den Diagonalen ist, so ist das Viereck centrisch nach den Ecken.

Beweis. Denn wäre es nicht centrisch nach den Ecken, so müfste nach unserm obigen Lehrsatze die Summe der Rectangel aus den Gegenseiten gröfser als das Rectangel aus den Diagonalen sein: gegen die Voraussetzung; folglich ist der **Ptolemäeische Lehrsatz** auch umgekehrt wahr.

Aus dem Ptolemaeischen Lehrsatze hat man unmittelbar aus den Seiten des Vierecks das Product der beiden Diagonalen. Um aber die Diagonalen einzeln als Function der Seiten zu haben, sucht man auch den Quotienten dieser Diagonalen aus den Seiten des Vierecks zu bestimmen. Um diesen Quotienten zu finden, nimmt man ohne Noth seine Zuflucht zu neuen geometrischen Sätzen, da doch der Ptolemaeische Lehrsatz diesen Quotienten mit involvirt, und verliert dadurch die Einsicht des wahren Zusammenhangs dieser Sätze.

Die aufeinander folgenden Seiten a, b, c, d eines Vierecks im Kreise (Fig. 8.) geben nemlich, in einer andern Reihefolge, in denselben oder in gleich grofse Kreise gestellt, noch zwei andere Vierecke (Fig. 9. und 10.). Diese Vierecke (Fig. 8., 9. und 10.) sind zwar der Gestalt nach verschieden, aber dem Flächen-Inhalte nach einander gleich, weil gleiche Sehnen, in einerlei oder in gleichen Kreisen, gleiche Kreissegmente abschneiden. Der von den vier Seiten a, b, c, d eingeschlossene Raum bleibt also constant, in welcher Ordnung man auch die Seiten in dem Kreise einträgt. Nun ergiebt sich noch eine dritte Diagonale, geschieden von den beiden ersteren.

In Fig. 8. haben wir 1) $a.c + b.d = D.\triangle$,
in Fig. 9. - - 2) $a.d + b.c = D.\delta$,
in Fig. 10. - - 3) $a.b + c.d = \triangle.\delta$,

folglich giebt $\frac{(2)}{(3)}\ \frac{D}{\triangle} = \frac{a.d + b.c}{a.b + c.d}$, und eben so $\frac{(1)}{(2)}\ \frac{\triangle}{\delta} = \frac{a.c + b.d}{a.d + b.c}$, woraus sich alle drei Diagonalen ergeben.

II. Lehrsatz. In jedem Triangel ist das Quadrat vom Abstande der beiden Mittelpuncte des eingeschriebenen und umschriebenen Kreises, von einander, gleich dem Quadrate vom Halbmesser des umschriebenen Kreises, *minus* oder *plus* dem doppelten Rectangel aus diesem Halbmesser in den

Halbmesser des eingeschriebenen, je nachdem der innere oder der äufsere Berührungskreis gewählt wird (Fig. 11.).

Beweis. Es seien C und D die Mittelpuncte des um und in den beliebigen $\triangle ABK$ beschriebenen Kreises; R der Halbmesser des umschriebenen und $DI = r$ der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises.

Der Winkel K ist in dem Kreis-Abschnitt AKB constant, daher ist es auch der Winkel $ADB = K + \frac{1}{2}(A+B) = 90^0 + \frac{1}{2}K$. Eben so ist der Winkel $AEB = 180^0 - K$ constant, der convexe Winkel AEB ist daher gleich $180^0 + K$, auch constant, und da $180^0 + K = 2(90^0 + \frac{1}{2}K)$, so ergiebt sich, dafs die Mitte E des Bogens AB der Mittelpunct eines mit $EB = \varrho$ beschriebenen Kreises ist, in welchem die Mittelpuncte D der innern Berührungskreise liegen, und der Bogen ADB ist also der geometrische Ort dieser Mittelpuncte.

Es sei D' der Mittelpunct von dem äufseren Berührungskreise, so ist der Winkel $AD'B = 180^0 - [90^0 - \frac{1}{2}A + 90^0 - \frac{1}{2}B] = \frac{1}{2}(A+B) = 90^0 - \frac{1}{2}K$, also auch constant.

Da nun Winkel $ADB = 90^0 + \frac{1}{2}K$, so ergänzen sich die Winkel ADB und $AD'B$ zu $2R$; sie liegen also in einerlei Kreis, und es ist daher der Bogen $AD'B$ der geometrische Ort der Mittelpuncte D' der äufseren Berührungskreise.

Man fälle DG, $D'G'$ auf CE perpendicular, und $D'I'$ auf AB senkrecht, so ist $D'I' = r'$ der Halbmesser des äufsern Berührungskreises.

Die $\triangle\triangle CDE$, $CD'E$ geben uns nun sogleich

I.

$$CD^2 = CE^2 + DE^2 - 2CE.EG \text{ (C. Geom. §. 123. 1.)},$$

d. h.

$$x^2 = R^2 + \varrho^2 - 2R.EG.$$

Da nun $\varrho^2 = EB^2 = 2R.EF$, so ist

$$\begin{aligned} x^2 &= R^2 + 2R.EF - 2R.EG \\ &= R^2 - 2R(EG - EF) \\ &= R^2 - 2R.GF \\ &= R^2 - 2R.r \\ &= R(R - 2r). \end{aligned}$$

Es ist also R, der Halbmesser des umschriebenen Kreises, immer gröfser als der Durchmesser $2r$ des eingeschriebenen Kreises, und nur bei dem gleichseitigen $\triangle$ ist $R = 2r$.

II.

$$CD'^2 = CE^2 + ED^2 + 2CE.EG' \text{ (C. Geom. §. 123. 2.)},$$

d. h.

$$\begin{aligned} x'^2 &= R^2 + \varrho^2 + 2R.EG' \\ &= R^2 + 2R(EF + EG') \\ &= R^2 + 2R.FG' \\ &= R^2 + 2R.r'. \end{aligned}$$

Anmerk. Da r' eine dem r entgegengesetzte Lage hat, so folgt der Ausdruck für x'^2 auch unmittelbar aus dem Ausdruck für x^2.

Ich theile hier noch einen zweiten, rein geometrischen Beweis des obigen Lehrsatzes mit, der sich auch durch Kürze empfiehlt (Fig. 12.).

$$\begin{aligned} &\angle ABG = GBK, \text{ also } GA = GK, \\ &\angle GAK = GBK = GBA, \text{ aber} \\ &\angle KAD = DAI, \text{ folglich} \\ \hline &\angle GAD = GDA, \text{ demnach} \\ &GD = GA = GK. \end{aligned}$$

Da ferner $\angle H = GBK = DBI$, so ist der rechtwinklige $\triangle GHK \sim DBI$. Es ist daher $DE.GK = DI.KH = 2R.r$ und $DE.DF = DB.DG = DB.GK$, d. h. $(R-x)(R+x) = 2R.r$, $R^2 - x^2 = 2R.r$, folglich $x^2 = R^2 - 2R.r$.

Die hier mitgetheilten Beweise zeichnen sich noch dadurch aus, dafs sie ohne Proportionen geführt sind.

Mit Bestimmung der Distanz der im Lehrsatze gedachten Mittelpuncte haben sich viele, und selbst die gröfsten Mathematiker beschäftiget, z. B. Euler, Fufs, Carnot, Maisonneuve, Gergonne, L'Huilier, Garnier, Feuerbach und Unger. Die Untersuchungen sind fast alle auf algebraischen und trigonometrischen Wegen, zum Theil ziemlich weitläufig, gemacht worden. Rein geometrisch sind die Auflösungen von Fufs und Unger, die letztere im gegenw. Journal, Band 4 S. 395.

20.

Bemerkung zu der Abhandlung des Hrn. Prof. Scherk: über die Integration der Gleichung $\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = (\alpha + \beta x) y$.

(S. 92 ff. dieses Bandes.)

(Von dem Herrn Prof. Dr. *C. G. J. Jacobi* zu Königsberg in Pr.)

Das schöne Resultat S. 96. bringt sich in folgende bequemere Form:

$$1.\quad y = \int_0^\infty \partial t\, e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1}} [C e^{tx} + C_1 \varrho e^{\varrho tx} + C_2 \varrho^2 e^{\varrho^2 tx} + \ldots + C_n \varrho^n e^{\varrho^n tx}],$$

wo ϱ eine primitive Wurzel der Gleichung $\varrho^{n+1} = 1$, und wo $C, C_1, \ldots C_n$ beliebige Constanten bedeuten, welche die Bedingungsgleichung erfüllen:

$$2.\quad C + C_1 + C_2 + \ldots + C_n = 0,$$

so dafs n von ihnen willkürlich sind.

Man prüft auf folgende Weise, dafs dieser Ausdruck der Differentialgleichung

$$3.\quad \frac{\partial^n y}{\partial x^n} = xy,$$

auf welche der Verfasser die allgemeinere zurückführt, Genüge leistet. Man hat nemlich, wenn man, nach x, n Mal differentiirt, und dann, nach t, theilweise integrirt:

$$4.\quad \frac{\partial^n \int \partial t\, e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1}} e^{\varrho tx}}{\partial x^n} = \varrho^n \int \partial t\, t^n e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1}} e^{\varrho tx} = -\varrho^n e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1}} e^{\varrho tx} + x \int \partial t\, e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1}} e^{\varrho tx}.$$

Dehnt man das Integral nach t von 0 bis ∞ aus, so reducirt sich der Theil aufserhalb des Integralzeichens auf ϱ^n. Substituirt man in (4.) für ϱ die $n+1$ Werthe $1, \varrho, \varrho^2, \ldots \varrho^n$, und substituirt die so erhaltenen Ausdrücke in den Ausdruck von $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$, wie er sich aus (1.) ergiebt, so verschwindet wegen der Bedingungsgleichung (2.) der Theil aufserhalb des Integralzeichens, und die Differentialgleichung (3.) wird identisch erfüllt.

Setzt man statt (2.) zwischen den $n+1$ Constanten die Bedingungsgleichung

$$5.\quad C + C_1 + C_2 + \ldots + C_n = m,$$

so sieht man aus dem Vorigen, dafs die Gleichung (1.) der allgemeineren Gleichung genügt:

$$6.\quad \frac{\partial^n y}{\partial x^n} = xy + m.$$

Auf diese wird aber folgende

$$7.\quad \frac{\partial^n y}{\partial x^n} = axy + bx + cy + d$$

sogleich zurückgeführt.

Den 27. März 1833.

21
Sur l'intégration de la différentielle $\frac{\partial x}{\sqrt{(x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)}}$.

(Par Mr. *R. Lobatto* à la Haye.)

D'après le procédé dû à deux illustres géomètres, et développé par Mr. Lacroix*), pour obtenir l'intégrale de cette fonction différentielle, on fait d'abord disparaître les puissances impaires de x sous le signe radical, en employant la substitution $x=\frac{p+qy}{1+y}$, ce qui ramène l'intégration à celle de la fonction $\frac{\partial y}{\sqrt{(e+fy^2)(g+hy^2)}}$; on pose ensuite $u=\frac{y}{e}\sqrt{\left(\frac{e+fy^2}{g+hy^2}\right)}$. Cette nouvelle substitution assez laborieuse à effectuer, change la dernière intégrale en $\int\frac{\partial u}{\sqrt{(1\pm pu^2)(1\pm qu^2)}}$, que l'on peut transformer alors en une autre de la même forme, dans laquelle les coefficiens p, q soient très inégaux ou presqu'égaux, afin de simplifier le calcul de l'intégration par les séries approximatives.

Quelque élégante que soit cette marche, qu'il nous soit cependant permis d'observer qu'elle n'est pas la plus naturelle qui doive se présenter à l'esprit. En effet, quant à la première de ces substitutions, on n'entrevoit pas clairement que la fraction $\frac{p+qy}{1+y}$ est propre à changer l'intégrale de manière à ce que la fonction soumise au radical, soit décomposable en deux facteurs de la forme $e+fy^2$, $g+hy^2$; elle nous semble plutôt, ainsi que tant d'autres, l'effet d'un heureux hazard. Quant au second moyen de transformation, il est évident qu'en faisant $\frac{f}{e}=p^2$, $\frac{h}{g}=q^2$, l'intégrale peut également se ramener à celle de la fonction $\frac{\partial y}{\sqrt{(1+p^2y^2)(1+q^2y^2)}}$, sans qu'il soit besoin de recourir à une nouvelle variable u. A la vérité, l'introduction de cette variable a pour but de pouvoir augmenter ou diminuer successivement le rapport des coefficiens constans p, q; mais il nous

---

*) Voyez son Traité de calc. différent. et intégral. Tom. II. pag. 49. et 77.

semble que rien n'autorise *à priori* à employer à cet effet l'équation

$$u = \frac{y}{e}\sqrt{\left(\frac{e+fy^2}{g+hy^2}\right)}.$$

Nous allons présenter ici une autre méthode d'intégration de la fonction dont il s'agit, laquelle nous a paru plus naturelle, et qui offre d'ailleurs l'avantage de se prêter plus facilement aux applications numériques, puisqu'elle est entièrement basée sur l'emploi des lignes trigonométriques, qui abrégent le plus souvent les longs calculs.

Supposons donc que la quantité sous le signe radical, et que nous désignerons par la lettre R, soit décomposée en deux facteurs du second degré, de sorte que $R = (x^2 - 2ax + b)(x^2 - 2a'x + b')$. L'équation $R = 0$ offre trois cas à distinguer par rapport à l'état réel ou imaginaire de ses quatres racines; savoir 1°. $b > a^2$ et $b' > a^2$; 2°. $b > a^2$ et $b' < a'^2$; 3°. $b < a^2$ et $b' < a'^2$. Nous traiterons d'abord le

I. cas $b > a^2$, $b' > a'^2$.

Soit $m^2 = b - a^2$, $m'^2 = b' - a^2$; on aura à intégrer la fonction

$$\frac{\partial x}{\sqrt{((x-a)^2+m^2)((x-a')^2+m'^2)}}.$$

Au lieu d'éliminer les puissances impaires de x, faisons $x - a = m \operatorname{tang}\varphi$. Cette fonction se changera alors en

$$\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi\sqrt{((m\operatorname{tang}\varphi+a-a')^2+m'^2)}},$$

ou bien, après avoir développé le numérateur, elle deviendra

$$\frac{\partial\varphi}{\sqrt{[m^2\sin^2\varphi+(m'^2+(a-a')^2)\cos^2\varphi+m(a-a')\sin 2\varphi]}}.$$

Mettons pour abréger

$$a - a' = a_1, \quad \frac{m^2+m'^2+a_1^2}{2} = A, \quad \frac{m'^2-m^2+a_1^2}{2} = A'.$$

L'intégrale se réduira à

$$\int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{(A+A'\cos 2\varphi+m a_1\sin 2\varphi)}},$$

Soit encore

$$B^2 = A'^2 + m^2 a_1^2 = A^2 - m^2 m'^2,$$
$$A' = B\cos 2\delta, \quad m a_1 = B\sin 2\delta,$$
$$\varphi - \delta = \psi.$$

Au moyen de ces substitutions cette dernière intégrale sera transformée en

$$\int\frac{\partial\psi}{\sqrt{(A+B\cos 2\psi)}} = \int\frac{\partial\psi}{\sqrt{(A+B)\cos^2\psi+(A-B)\sin^2\psi}} = \frac{1}{\sqrt{(A+B)}}\int\frac{\partial\psi}{\sqrt{(\cos^2\varphi+p^2\sin^2\varphi)}};$$

$\sqrt{\left(\frac{A-B}{A+B}\right)}$ étant égal à p.

L'intégrale que nous venons d'obtenir se calculera toujours facilement par approximation, lorsque la fraction p différera peu de l'unité, ou lorsqu'elle sera au contraire une quantité très petite. En effet en écrivant dans le premier cas r^2 au lieu de $1-p^2$, on aura à intégrer $\frac{\partial\psi}{\sqrt{(1-r^2\sin^2\psi)}}$, abstraction faite du coefficient constant $\frac{1}{\sqrt{(A+B)}}$.

Or en développant le radical en série infinie, et se bornant aux deux premiers termes, vu la petitesse de la quantité r, il viendra d'après les méthodes connues:

$$\int\frac{\partial\psi}{\sqrt{(1-r^2\sin^2\psi)}} = \psi\left(1+\frac{r^2}{4}\right)-\frac{r^2}{8}\sin 2\psi.$$

Pour le second cas, on mettra l'intégrale sous la forme

$$\frac{\partial\psi}{\cos\psi\sqrt{(1+p^2\operatorname{tang}^2\psi)}} = \int\frac{\partial\psi}{\cos^2\psi}\left(1-\frac{p^2}{2}\operatorname{tang}^2\psi\right),$$

ne négligeant les termes ultérieurs du développement en série; après avoir effectué les intégrations partielles, il en résultera

$$\int\frac{\partial\psi}{\sqrt{(\cos^2\psi+p^2\sin^2\psi)}} = (1+\tfrac{1}{4}p^2)\log\operatorname{tang}\left(45^\circ+\frac{\psi}{2}\right)-\tfrac{1}{4}p^2\frac{\sin^2\psi}{\cos^2\psi}.$$

Ces deux résultats distincts supposent les fractions p, r assez petites pour pouvoir en négliger les puissances supérieures à la seconde. Il nous reste à faire voir qu'il est toujours possible d'opérer sur l'intégrale précédente, une suite de transformations analogues, de manière à obtenir pour p, ou r, des quantités aussi petites que l'on voudra. A cet effet soit $p\operatorname{tang}\psi = \operatorname{tang}\psi'$, d'où l'on déduira

$$\int\frac{\partial\psi}{\sqrt{(\cos^2\psi+p^2\sin^2\psi)}} = \int\frac{\cos\psi'\,\partial\psi'}{\cos\psi},\quad \frac{1+p}{1-p} = \frac{\sin(\psi+\psi')}{\sin(\psi-\psi')}.$$

Posons encore $\psi+\psi' = \psi_1$, $\psi-\psi' = \varphi_1$, la dernière rélation se changera en $(1+p)\sin\varphi_1 = (1-p)\sin\psi_1$; celle-ci étant différentiée donnera pour le rapport des différentielles:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\psi_1} = \frac{(1-p)\cos\psi_1}{(1+p)\cos\varphi_1},$$

ou bien

$$1+\frac{\partial\varphi_1}{\partial\psi_1} = \frac{2\,\partial\psi}{\partial\psi_1} = \frac{\cos\varphi_1+\cos\psi_1+p(\cos\varphi_1-\cos\psi_1)}{(1+p)\cos\varphi_1}.$$

Le numérateur de cette fraction se réduit successivement à

$$2\cos\psi\cos\psi'+2p\sin\psi\sin\psi' = 2\cos\psi\cos\psi'(1+p\operatorname{tang}\psi\operatorname{tang}\psi')$$
$$= 2\cos\psi\cos\psi'\sec^2\psi' = \frac{2\cos\psi}{\cos\psi'}$$

Par conséquent

$$\int\frac{\cos\psi'\,d\psi}{\cos\psi}=\int\frac{\partial\psi_1}{(1+p)\cos\varphi_1}=\int\frac{\partial\psi'}{\sqrt{[(1+p)^2-(1-p)^2\sin^2\psi_1]}}$$
$$=\int\frac{\partial\psi_1}{\sqrt{[(1+p)^2\cos^2\psi_1+4p\sin^2\psi_1]}}.$$

En mettant $1+p=2p_1$, $1-p=2p_1r_1$, il viendra

$$\int\frac{\partial\psi}{\sqrt{(\cos^2\psi+p^2\sin^2\psi)}}=\int\frac{\partial\psi}{\sqrt{(1-r^2\sin^2\psi)}}=\frac{1}{2p_1}\int\frac{\partial\psi_1}{\sqrt{(1-r_1^2\sin^2\psi_1)}}$$
$$=\frac{1+r_1}{2}\int\frac{\partial\psi_1}{\sqrt{(1-r_1^2\sin^2\psi_1)}}.$$

Ce résultat s'accorde avec celui obtenu par Mr. **Legendre**, en suivant une voie tout à fait différente. (Voyez son mémoire sur les Transcendantes elliptiques p. 40.)

La quantité r_1 sera toujours plus petite que r, car

$$r_1=\frac{1-p}{1+p}=\frac{1-p^2}{(1+p)^2}=\frac{r^2}{(1+p)^2},$$

donc $r_1<r^2<r$; ainsi en opérant une suite de transformations analogues, les coefficiens r vont continuellement en diminuant; ces quantités se calculeront au moyen des rélations

$$r_1=\frac{1-\sqrt{(1-r^2)}}{1+\sqrt{(1-r^2)}},\quad r_2=\frac{1-\sqrt{(1-r_1^2)}}{1+\sqrt{(1-r_1^2)}}\text{ etc.},$$

ou bien on pourra abréger un peu ces calculs, en posant

$$r=\sin\varrho,\qquad r_1=\sin\varrho_1,$$

ce qui donnera

$$r_1=\operatorname{tang}^2\frac{\varrho}{2},\quad r_2=\operatorname{tang}^2\frac{\varrho_1}{2},\text{ etc.}$$

Si au contraire la fraction r diffère peu de l'unité, on effectuera les dérivations successives en sens inverse, c'est à dire, on fera $r=\frac{1-\sqrt{(1-r_1^2)}}{1+\sqrt{(1-r_1^2)}}$, d'où l'on déduit $\sqrt{(1-r_1^2)}=\frac{1-r}{1+r}$, $r_1=\frac{\sqrt{(2r)}}{1+r}$, $r_2=\frac{\sqrt{(2r_1)}}{1+r_1}$, etc.

Les quantités r_1, r_2, etc. augmenteront de plus en plus, et l'on pourra ainsi approcher de l'unité aussi près qu'on voudra, afin de pouvoir appliquer la seconde formule d'intégration que nous avons trouvée ci-dessus par la voie d'approximation.

De ce que $p^2=\frac{A-B}{A+B}$ et $\frac{B}{A}=\sqrt{\left(1-\frac{(mm')^2}{A}\right)}$, il s'en suit que le premier cas aura lieu lorsque la fraction $\frac{mm'}{A}$ sera très petite, et le second lorsqu'elle se rapproche beaucoup de l'unité.

Quant à la dérivation des angles ψ_1, ψ_2, etc., ceux ci se calculeront dans le premier cas par les équations

$$\tang \psi' = p \tang \psi, \quad \psi_1 = \psi + \psi',$$

donc

$$\tang(\psi_1 - \psi) = p \tang \psi, \quad \tang(\psi_2 - \psi_1) = p_1 \tang \psi_1, \text{ etc.},$$

$$p_1 = \frac{1+p}{2} = \frac{1}{1+r_1}, \quad p_2 = \frac{1+p_1}{2} = \frac{1}{1+r_2}.$$

Dans le second cas, il faudra se servir à cet effet des équations

$$\sin(2\psi_1 - \psi) = r \sin \psi, \quad \sin(2\psi_2 - \psi_1) = r_1 \sin \psi_1, \text{ etc.},$$

qui se déduisent immédiatement de l'équation primitive

$$p_1 \tang \psi_1 = \tang(\psi - \psi_1)$$

applicable à ce cas.

Avant de procéder à l'examen des deux autres circonstances que présente notre formule intégrale $\int \frac{\partial x}{\sqrt{R}}$, nous avons cru utile de prouver encore par une considération géométrique, la dépendance que nous venons de trouver entre deux fonctions elliptiques de la première espèce, d'après la classification établie par Mr. Legendre dans son susdit Mémoire. Pour cela, considérons un triangle quelconque ayant deux côtés a, a' constans, et l'angle inclus Φ variable. Désignons les angles opposés a ces côtés par ψ, ψ' et le troisième côté par z, il est évident que ces trois quantités seront variables avec l'angle Φ. Or on a par les formules de la trigonométrie

$$\frac{\sin \psi}{\sin \psi'} = \frac{a}{a'}, \quad z = a \frac{\sin \varphi}{\sin \psi},$$

$$z^2 = a^2 + a'^2 - 2aa' \cos \Phi = (a+a')^2 - 4aa' \sin^2 \Phi'$$

en posant $\varphi = 2\pi - 2\Phi'$.

Différentiant la première des équations précédentes, on obtiendra

$$\sin \psi' \cos \psi \, \partial \psi = \sin \psi \cos \psi' \, \partial \psi',$$

d'où l'on tire

$$\sin(\psi + \psi') \, \partial \psi = \sin \psi \cos \psi' \, \partial(\psi + \psi'),$$

ou bien, en observant que $\psi + \psi' = 2\Phi'$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi'} = \frac{2 \sin \psi \cos \psi'}{\sin 2\varphi'} = \frac{2a}{z} \cos \psi' = \frac{2}{z} \sqrt{(a^2 - a'^2 \sin^2 \psi)},$$

en vertu des deux premières équations, par conséquent

$$\frac{\partial \psi}{\sqrt{(a^2 - a'^2 \sin^2 \psi)}} = \frac{\partial \varphi'}{\sqrt{\left[\left(\frac{a+a'}{2}\right)^2 - aa' \sin^2 \varphi'\right]}}.$$

Si l'on fait $\frac{a'}{a} = r$, $\frac{4aa'}{(a+a')^2} = \frac{4r}{1+r^2} = r_1^2$, on retombera sur l'équation

$$\int \frac{\partial \varphi'}{\sqrt{(1 - r_1^2 \sin^2 \varphi')}} = \left(\frac{1+r}{2}\right) \int \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1 - r^2 \sin^2 \varphi)}},$$

les angles φ', ψ étant liés entre eux par l'équation

$$\frac{\sin\psi}{\sin\psi'}=\frac{a}{a'},\ \text{ou}\ \frac{\sin\psi}{\sin(2\varphi'-\psi)}=\frac{1}{r'},\ \text{donc}\ \sin(2\varphi'-\psi)=r\sin\psi,$$

ou bien par l'équation

$$\frac{a+a'}{a-a'}=\frac{\tang\left(\frac{\psi+\psi'}{2}\right)}{\tang\left(\frac{\psi-\psi'}{2}\right)}=\frac{\tang\varphi'}{\tang(\psi-\varphi')},\ \text{donc}\ \tang(\psi-\varphi')=\frac{1-r}{1+r}\tang\varphi',$$

ce qui confirme les résultats trouvés ci-dessus.

II. cas. $b>a^2$, $b'<a'^2$.

On mettra $a'^2-b'=m'^2$, et appliquant le même procédé, l'on n'aura qu'à changer le signe de m'^2, ce qui donnera

$$A=\tfrac{1}{2}(a_1^2+m^2-m'^2),\quad A'=\tfrac{1}{2}(a_1^2-m^2-m_1^2),$$
$$B^2=A'^2+m^2a_1^2=A^2+m^2m'^2,\ \text{donc}\ B>A.$$

L'intégrale $\int\frac{d\psi}{\sqrt{(A+B\cos2\psi)}}$ étant mise sous la forme

$$\int\frac{\partial\psi}{\sqrt{(A+B-2B\sin^2\varphi)}}=\frac{1}{\sqrt{(2B)}}\int\frac{\partial\psi}{\sqrt{\left(\frac{A+B}{2B}-\sin^2\psi\right)}},$$

sera ramenée à $\int\frac{\partial\psi}{\sqrt{(r^2-\sin^2\psi)}}$, en faisant pour abréger $\frac{A+B}{2B}=r^2$; r sera toujours une fraction à cause de $B>A$; on pourra donc mettre $\sin\psi=r\sin\psi'$, donc $\partial\psi=\frac{r\cos\psi'\,\partial\psi'}{\sqrt{(1-r^2\sin^2\psi)}}$, et l'on aura à intégrer la fonction

$$\frac{\partial\psi'}{\sqrt{(1-r^2\sin^2\psi')}},$$

ce qui rentre dans le cas précédent.

III. cas. $b<a^2$, $b'<a'^2$.

Ce dernier cas que nous reste à examiner, suppose les quatre racines de l'équation $R=0$, toutes réelles. Représentons les dans l'ordre de leur grandeur numérique et sans avoir égard aux signes qui les affectent, par p, q, r, s, la première étant la plus petite.

Soit en outre

$$\begin{matrix} p=a-m, & r=a'-m', \\ q=a+m, & s=a'+m', \end{matrix}\quad a'-a=a_1,$$

le radical R pourra être décomposé en deux facteurs du second degré

$$(x-a)^2-m^2,\quad (x-a')^2-m'^2.$$

Prenons maintenant l'angle φ tel que $x-a=m\sec\varphi$, il viendra $\sqrt{((x-a)^2-m^2)}=m\tang\varphi$, $\partial x=\frac{m\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\partial\varphi$, par conséquent la fonction à intégrer deviendra

$$\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi\sqrt{[(m\sec\varphi-a_1)^2-m'^2]}}.$$

Le dénominateur peut se décomposer en

$$(m-(a_1-m')\cos\varphi)(m-(a_1+m')\cos\varphi)$$
$$=\left((m+m'-a)\cos^2\frac{\varphi}{2}+(m-m'+a_1)\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$\times\left(m-m'-a_1)\cos^2\frac{\varphi}{2}+(m+m'+a_1)\sin^2\frac{\varphi}{2}\right).$$

Si maintenant l'on remplace les quantités m, m', a_1 par leurs valeurs en p, q, r, s, et que l'on fait $z=\tang\frac{\varphi}{2}$, on trouvera sans peine que la différentielle à intégrer se transforme en

$$\frac{2\partial z}{\sqrt{[(r-p)z^2-(r-q)][(s-p)z^2-(s-q)]}}.$$

En admettant d'abord que les racines p, q, r, s sont toutes positives, ou toutes négatives, les quatre constantes qui entrent sous le radical seront toutes de même signe, et l'on pourra en conséquence poser l'équation $(r-p)z^2=(r-q)\sec^2\psi$, d'où il suit

$$\partial z=\sqrt{\left(\frac{r-q}{r-p}\right)}\cdot\frac{\sin\psi\,\partial\psi}{\cos^2\psi},$$

et l'on trouvera après avoir effectué les substitutions, la différentielle

$$\frac{2d\psi}{\sqrt{[(s-p)(r-q)-(s-q)(r-p)\cos^2\psi]}}.$$

Cette transformation suppose $z>\sqrt{\left(\frac{r-q}{r-p}\right)}$; pour les valeurs de z au dessous de $\sqrt{\left(\frac{r-q}{r-q}\right)}$, on fera $(r-p)z^2=(r-q)\sin^2\psi$, d'où l'on obtiendra pour la formule à intégrer:

$$\frac{2\partial\psi}{\sqrt{[(r-p)(s-q)-(s-p)(r-q)\sin^2\psi]}}.$$

En général quelque soit la diversité des signes affectés aux quatre racines, il est évident que l'intégrale en z aura toujours l'une des formes comprises dans l'expression générale

$$\int\frac{\partial z}{\sqrt{(A\pm Bz^2)(A'\pm B'z^2)}}$$

et que celle-ci, en employant un des trois moyens de transformation:

$$z^2=\frac{A}{B}\sec^2\psi,\quad z^2=\frac{A}{B}\operatorname{tang}^2\psi,\quad z^2=\frac{A}{B}\sin^2\psi,$$

se ramènera toujours soit à $\int\frac{\partial\psi}{\sqrt{(M\pm N\cos^2\psi)}}$, soit à $\int\frac{\partial\psi}{\sqrt{(M\pm N\sin^2\psi)}}$, dont chacune rentre dans un des deux cas précédemment traités.

Nous terminerons la présente note en observant que puisque $\int\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ a été réduite dans le 3[e] cas à une autre intégrale en fonction de z, qui ne contient pas les puissances impaires de cette variable, et ce au moyen de deux substitutions successives, savoir en faisant d'abord $x-a=m\sec\varphi$ ou $\cos\varphi=\frac{m}{x-a}$, et ensuite $z=\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\left(\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}\right)}$, il s'en suit que l'on aurait pu y arriver immédiatement, en posant l'équation $z^2=\frac{x-a-m}{x-a+m}$, ou bien $z^2=\frac{x-q}{x-p}$, d'où l'on tire $x-p=\frac{q-p}{1-z^2}$, $x=\frac{q-pz^2}{1-z^2}$. Par conséquent toutes les fois que le radical est décomposable en quatre facteurs réels $x-p$, $x-q$, $x-r$, $x-s$, la substitution que nous venons de trouver en fonction de z, fera disparaître dans $\int\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ les puissances impaires de cette variable, ce qui, dans l'hypothèse dont il s'agit, simplifie beaucoup le procédé dû à Mr. **Legendre**, lequel consiste à substituer $\frac{\alpha+\beta z}{1+z}$ au lieu de x, les constantes α, β étant déterminées par les équations

$$\alpha+\beta=\frac{2(pq-rs)}{p+q-r-s},\quad \alpha\beta=\frac{pq(r+s)-rs(p+q)}{p+q-r-s}.$$

La Haye, Août 1832.

22.

Beweis eines Satzes aus der Theorie der numerischen Gleichungen.

(Von dem Herrn Dr. *C. H. Graeffe* zu Zürich.)

Wenn man aus der Gleichung:

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2}, \ldots A_n = 0$$

den Quotienten:

$$\frac{1}{1+A_1 x + A_2 x^2 + \ldots A_n x^n} = 1 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots B_{k-1} x^{k-1} + B_{k+1} x^k$$

bildet, so giebt der Quotient $\frac{B_k}{B_{k-1}}$ bei numerischer Berechnung in vielen Fällen den angenäherten Werth einer Wurzel der gegebenen Gleichung. Diese Eigenschaft der Gleichungen fand Herr J. J. **Raabe** bei Gelegenheit anderer Untersuchungen, die er bald mitzutheilen beabsichtigt, und theilte sie dem Unterzeichneten zur weiteren Entwicklung mit, aus der die Bedingungen hervorgingen, unter welchen eine Convergenz eines Wurzelwerthes eintritt. Hat nemlich die obige Gleichung die Factoren:

$$x - a_1, \quad x - a_2, \quad x - a_3, \quad \ldots \quad x - a_n,$$

so besitzt sie in der umgeänderten Gestalt, in der sie im Nenner erscheint, die Factoren

$$1 - a_1 x, \quad 1 - a_2 x, \quad 1 - a_3 x, \quad \ldots \quad 1 - a_n x.$$

Aus

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots \text{ etc.}$$

folgt nun:

$$\frac{1}{1-a_1 x} = 1 + a_1 x + a_1^2 x^2 + \ldots a_1^k x^k,$$

$$\frac{1}{1-a_2 x} = 1 + a_2 x + a_2^2 x^2 + \ldots a_2^k x^k,$$

$$\frac{1}{1-a_3 x} = 1 + a_3 x + a_3^2 x^2 + \ldots a_3^k x^k,$$

. . . .

$$\frac{1}{1-a_n x} = 1 + a_n x + a_n^2 x^2 + \ldots a_n^k x^k.$$

Multiplicirt man diese Reihen mit einander, so erhält man eine Reihe, deren Coefficienten Variationsformen zu bestimmten Summen aus den Coefficienten dieser Reihen sind, die aber in Combinationsformen mit unbedingter Wiederholbarkeit und von bestimmten Classen übergehen, wenn a_1, a_2, a_3, ... a_n als combinatorische Elemente betrachtet werden, d. h. man findet die Reihe

$$1+\overset{1}{C}(a_1 a_2 \dots a_n)x+\overset{2}{C}(a_1 a_2 \dots a_n)x \dots +\overset{k-1}{C}(a_1 a_2 \dots a_n)x^{k-1}+\overset{k}{C}(a_1 a_2 \dots a_n)x^k,$$

die mit der Reihe (1.) identisch ist. Der Voraussetzung zufolge ist nun:

$$\frac{\overset{k}{C}(a_1 a_2 a_3 \dots a_n)}{\overset{k-1}{C}(a_1 a_2 a_3 \dots a_n)}$$

der angenäherte Werth einer Wurzel der gegebenen Gleichung. Es ist aber

$$\overset{k}{C}(a_1 a_2 \dots a_n) = a_1 \overset{k-1}{C}(a_1 a_2 a_3 \dots a_n) + \overset{k}{C}(a_2 a_3 \dots a_n),$$

und hieraus folgt:

$$\frac{\overset{k}{C}(a_1 a_2 \dots a_n)}{\overset{k-1}{C}(a_1 a_2 a_3 \dots a_n)} = a_1 + \frac{\overset{k}{C}(a_2 a_3 \dots a_n)}{\overset{k-1}{C}(a_1 a_2 a_3 \dots a_n)}$$

$$= a_1 + \frac{\overset{k}{C}(a_2 a_3 \dots a_n)}{\overset{k-1}{C}(a_2 a_3 \dots a_n) + a_1 \overset{k-2}{C}(a_2 \dots a_n) + a_1^2 \overset{k-3}{C}(a_2 \dots a_n) \dots a^{k-1}}$$

Die Untersuchung ist jetzt darauf zurückgeführt, die Bedingungen aufzufinden, unter welchen dieser an die Wurzel a_1 geknüpfte Bruch einen sehr kleinen Werth giebt. Um dieses entscheiden zu können, wollen wir zuerst annehmen, dafs alle Wurzeln der gegebenen Gleichung reell sind, und dafs abgesehen vom Zeichen, a_1 unter ihnen den gröfsten Zahlwerth besitze. Es sind alsdann $\frac{a_2}{a_1}$, $\frac{a_3}{a_1}$ .... $\frac{a_n}{a_1}$ ächte Brüche, und die Reihen:

$$\text{I.} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{1-\frac{a_2}{a_1}} = 1+\frac{1}{a_1}a_2+\frac{1}{a_1^2}a_2^2+\frac{1}{a_1^3}a_2^3 \dots \frac{1}{a_1^k}a_2^k \\ \dfrac{1}{1-\frac{a_3}{a_1}} = 1+\frac{1}{a_1}a_3+\frac{1}{a_1^2}a_3^2+\frac{1}{a_1^3}a_3^3 \dots \frac{1}{a_1^k}a_3^k \\ \dots \quad \dots \\ \dfrac{1}{1-\frac{a_n}{a_1}} = 1+\frac{1}{a_1}a_n+\frac{1}{a_1^2}a_n^2+\frac{1}{a_1^3}a_n^3 \dots \frac{1}{a_1^k}a_n^k \end{cases}$$

convergiren. Multiplicirt man diese Reihen mit einander, so erhält man:

$$\frac{1}{\left(1-\frac{a_2}{a_1}\right)\left(1-\frac{a_3}{a_1}\right)\ldots\left(1-\frac{a_n}{a_1}\right)}$$
$$= 1+\frac{1}{a_1}\overset{1}{C}(a_2\ldots a_n)+\frac{1}{a_1^2}\overset{2}{C}(a_2\ldots a_n)\ldots\frac{1}{a_1^k}\overset{k}{C}(a_2\ldots a_n),$$

wo $\frac{1}{a_1^k}\overset{k}{C}(a_2\ldots a_n)$ als eine verschwindende Gröfse zu betrachten ist. Hieraus folgt:

$$\frac{a_1^{k-1}}{\left(1-\frac{a_2}{a_1}\right)\left(1-\frac{a_3}{a_1}\right)\ldots\left(1-\frac{a_n}{a_1}\right)}$$
$$= \overset{k-1}{C}(a_2\ldots a_n)+a_1\overset{k-2}{C}(a_2\ldots a_n)+a_1^2\overset{k-3}{C}(a_2\ldots a_n)\ldots a^{k-1}.$$

Durch Substitution dieses Werthes verwandelt sich der Quotient

$$\frac{\overset{k}{C}(a_1 a_2\ldots a_n)}{\overset{k-1}{C}(a_1 a_2\ldots a_n)}$$

in:

$$a_1+\frac{\overset{k}{C}(a_2 a_3\ldots a_n)}{a_1^{k-1}}\left(1-\frac{a_2}{a_1}\right)\left(1-\frac{a_3}{a_1}\right)\ldots\left(1-\frac{a_n}{a_1}\right)$$
$$= a_1+a_1\left(1-\frac{a_2}{a_1}\right)\left(1-\frac{a_3}{a_1}\right)\left(1-\frac{a_4}{a_1}\right)\ldots\left(1-\frac{a_n}{a_1}\right).\frac{1}{a_1^k}\overset{k}{C}(a_2 a_3\ldots a_n).$$

Nun ist aber $\frac{1}{a_1^k}\overset{k}{C}(a_2, a_3\ldots a_n)$ eine verschwindende Gröfse, während ein Factor von der Form $1-\frac{a_n}{a_1}$ nie den Werth 2 übertrifft; es kann daher der mit a_1 verbundene Ausdruck bis zu jeder beliebigen Kleinheit hinabgedrückt werden, wenn man nur k hinlänglich grofs annimmt. Die Convergenz ist desto gröfser, je mehr a_1 die übrigen Wurzeln an Werth übertrifft, und wenn alle Wurzeln positiv sind.

Enthält die Gleichung unmögliche Wurzeln, ist z. B.

$$a_2=\alpha+\beta\sqrt{-1}=w(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1});$$
$$a_3=\alpha+\beta\sqrt{-1}=w(\cos\varphi-\sin\varphi\sqrt{-1}),$$

so ist die Reihe:

$$\frac{1}{1-\frac{w}{a_1}(\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1})}=1+\frac{1}{a_1}w(\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1})$$
$$+\frac{1}{a_1^2}w^2(\cos 2\varphi\pm\sin 2\varphi\sqrt{-1})\ldots\frac{1}{a_1^k}w^k(\cos kw\pm\sin kw\sqrt{-1})$$

convergirend, wenn $a_1>w$, d. h. wenn $a_1>\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}$.

Der Quotient hat alsdann die Form:

$$a_1 + a_1\left(1-2\frac{w}{a_1}\cos\varphi+\frac{w^2}{a_1^2}\right)\left(1-\frac{a_4}{a_1}\right)\left(1-\frac{a_5}{a_1}\right)\ldots\left(1-\frac{a_n}{a_1}\right)\frac{1}{a_1^k}\overset{k}{C}(a_2 a_3\ldots a_n),$$

in der die mit a_1 verbundene Gröſse für einen groſsen Werth von k verschwindet. Es können auch noch mehrere Wurzeln unmöglich sein, ja alle, bis auf a_1, und der Quotient wird immer einen angenäherten Werth der Wurzel a_1 geben, wenn nur allgemein

$$a_1 > \sqrt{(\alpha_h^2+\beta_h^2)},$$

wo $\alpha_h \pm \beta_h\sqrt{-1}$ allgemein ein Paar der unmöglichen Wurzeln bedeutet.

Endlich ist noch die Bemerkung hinzuzufügen, daſs für $a_1 = a_2$ der Factor $1-\frac{a_2}{a_1}$ nicht zu Null wird, denn $\frac{1}{1-1}$ ist nur dann unendlich, wenn wir alle Glieder der Entwicklung nehmen; für k Glieder ist aber:

$$\frac{1}{1-\frac{a_2}{a_1}} = 1+1+1\ldots = k,$$

und daher

$$1-\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{k}.$$

23.

Addition à l'article 12. cahier précédent.

(Par Mr. *F. Minding.*)

Dans l'article indiqué je m'étais contenté de remarquer, que la fonction

$$\frac{(1-uv)\delta u+(u^2+pv)\delta v}{u^3+3puv-p+p^2v^3},$$

est une différentielle exacte. En la reprenant dans ces derniers jours, j'ai trouvé qu'elle donne une intégrale d'une grande simplicité.

En multipliant le numérateur et le dénominateur de la différentielle ci-dessus par $1+pv^3$, elle devient:

$$(1+pv^3)\frac{(1-uv)\delta u+(u^2+pv)\delta v}{(u+pv^2)^3-p(1-uv)^3}.$$

Si dans cette formule on pose $\frac{u+pv^2}{1-uv}=z$, elle se transforme en:

$$\frac{\delta z}{z^3-p}+\frac{v\delta v}{1+pv^3}.$$

On peut donc regarder la fonction $\frac{\theta c}{Fc}$ comme complètement intégrée

Berlin le 17. Avril 1833.

24.

Analytisch-geometrische Aphorismen.

(Fortsetzung des Aufsatzes No. 15. im vorigen Hefte.)

(Von dem Herrn Professor *Plücker* zu Berlin.)

II.

Einige Sätze über Kreise und eine neue Construction des apollonischen Problems der Tactionen.

Die Absicht dieses Aufsatzes ist, Analogien zwischen Sätzen über Kreise und Sätzen über gerade Linien nachzuweisen.

1. Neben dem Satze:

„dafs die drei von den Durchschnitten je zweier von drei gegebenen „geraden Linien auf die jedesmalige dritte dieser geraden Linien ge- „fällten Perpendikel in demselben Puncte sich schneiden,"

besteht auch der folgende Satz:

Wenn irgend drei Kreise gegeben sind, und man beschreibt drei neue Kreise, so, dafs jeder derselben durch die beiden Durchschnittspuncte zweier der drei gegebenen geht, und den dritten derselben rechtwinklig schneidet, so gehen diese drei neuen Kreise durch dieselben beiden Puncte.

Um diesen Satz zu beweisen, wollen wir für die Gleichungen der drei Kreise folgende nehmen:

$$1.\quad (y-\beta)^2+(x-\alpha)^2-\varrho^2 = C = 0,$$
$$2.\quad (y-\beta')^2+(x-\alpha')^2-\varrho'^2 = C' = 0,$$
$$3.\quad (y-\beta'')^2+(x-\alpha'')^2-\varrho''^2 = C'' = 0.$$

Hiernach ist die allgemeine Gleichung aller Kreise, welche durch die beiden (reellen oder imaginairen) Durchnittspuncte der beiden ersten gegebenen gehen, folgende:

$$4.\quad C+\mu C' = 0,$$

indem wir durch μ einen unbestimmten Coefficienten bezeichnen. Soll diese Gleichung inbesondere denjenigen Kreis darstellen, der den dritten gegebenen unter rechten Winkeln schneidet, so wird erfordert, dafs diejenigen beiden Radien dieser beiden Kreise, welche durch einen Durch-

schnittspunct derselben gehen, auf einander senkrecht sind, und dafs also die Summe der Quadrate der Radien der beiden Kreise gleich ist dem Quadrate der Entfernung ihrer Mittelpuncte von einander. Wenn wir die Gleichung (4.) entwickeln, so erhalten wir für das Quadrat des Radius des bezüglichen Kreises:

$$\frac{\varrho^2-(\alpha^2+\beta^2)+\mu(\varrho'^2-(\alpha'^2+\beta'^2))}{1+\mu}+\left(\frac{\beta+\mu\beta'}{1+\mu}\right)^2+\left(\frac{\alpha+\mu\alpha'}{1+\mu}\right)^2,$$

und für das Quadrat der Entfernung des Mittelpunctes desselben von dem Mittelpuncte des Kreises (3.):

$$\left(\frac{\beta+\mu\beta'}{1+\mu}-\beta''\right)^2+\left(\frac{\alpha+\mu\alpha'}{1+\mu}-\alpha''\right)^2.$$

Überdies ist der Radius des letztgenannten Kreises gleich ϱ. Hiernach ergiebt sich zur Bestimmung des Coefficienten μ folgende Gleichung:

$$\beta''^2-2\beta''\frac{\beta+\mu\beta'}{1+\mu}+\alpha''^2-2\alpha''\frac{\alpha+\mu\alpha'}{1+\mu}=\frac{\varrho^2-(\alpha^2+\beta^2)+\mu(\varrho'^2-(\alpha'^2+\beta'^2))}{1+\mu},$$

und, wenn wir reduciren, kommt:

$$5.\quad \mu\{[(\beta'-\beta'')^2+(\alpha'-\alpha'')^2]-\varrho'^2-\varrho''^2\}=-\{[(\beta-\beta'')^2+(\alpha-\alpha'')^2]-\varrho^2-\varrho''^2\}.$$

Dieser Gleichung können wir noch eine einfachere Form geben; denn es ist:

$$6.\quad \begin{cases}[(\beta'-\beta'')^2+(\alpha'-\alpha'')^2]-\varrho'^2-\varrho''^2=2\varrho'\varrho''\cos\omega,\\ [(\beta-\beta'')^2+(\alpha-\alpha'')^2]-\varrho^2-\varrho''^2=2\varrho\,\varrho''\cos\omega',\end{cases}$$

wenn wir diejenigen beiden Winkel, unter welchen der zweite und dritte und der erste und dritte gegebene Kreis sich schneiden, ω und ω' nennen. Um diese Winkel noch näher zu bezeichnen, bemerken wir, dafs wenn irgend zwei Kreise sich schneiden, drei begränzte Figuren entstehen, von welchen eine convex-convex, und zwei convex-concav sind, und dafs wir die Innen-Winkel der erstgenannten Figur, und nicht ihre Nebenwinkel, ω nennen und als die Durchschnittswinkel der beiden Kreise betrachten. Wenn hiernach die beiden Kreise sich aufserhalb berühren, so ist $\omega=0$; wenn einer von dem andern innerhalb berührt wird, so ist $\omega=\pi$. Wenn die beiden Kreise keinen Punct gemein haben, so wird ω zwar imaginär, $\cos\omega$ bleibt aber reell und wird nur gröfser als Eins. In diesem Falle bezeichnet ein gegebener Werth von $\cos\omega(>1)$ eine Beziehung der beiden bezüglichen Kreise zu einander, deren geometrische Aussage blofs eine andere wird, und sich noch immer durch eine Gleichung von der Form der Gleichungen (6.) bestimmt.

Die Gleichung (5.) geht hiernach in folgende über:

$$\mu = -\frac{\varrho \cos\omega'}{\varrho' \cos\omega},$$

wonach die Gleichung (4.) sich in folgende verwandelt:

$$7. \quad \frac{\cos\omega}{\varrho} C - \frac{\cos\omega'}{\varrho'} C' = 0.$$

Wenn wir den Durchschnittswinkel der beiden ersten gegebenen Kreise ω'' nennen, so giebt eine blofse Accent-Vertauschung folgende Gleichungen:

$$8. \quad \begin{cases} \frac{\cos\omega'}{\varrho'} C' - \frac{\cos\omega''}{\varrho''} C'' = 0, \\ \frac{\cos\omega''}{\varrho''} C'' - \frac{\cos\omega}{\varrho} C = 0, \end{cases}$$

für diejenigen beiden Kreise, welche durch die Durchschnittspuncte des zweiten und dritten, und des dritten und ersten gegebenen Kreises gehen und resp. den ersten und zweiten gegebenen Kreis rechtwinklig schneiden. Ein Blick auf die letzten drei Gleichungen zeigt uns die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes.

Aus dem hiermit bewiesenen Satze ergiebt sich durch Gränzbetrachtungen in der Construction nicht blofs der an die Spitze dieser Nummer gestellte Satz, sondern man kann in der Aussage dieses Satzes, ganz beliebig, Puncte und gerade Linien an die Stelle der drei gegebenen Kreise setzen, und erhält auf diese Weise eilf verschiedene Sätze. Nehmen wir z. B. statt der drei gegebenen Kreise drei Puncte, so gelangen wir zu folgendem Satze:

„Wenn irgend drei Puncte gegeben sind und man beschreibt drei „Kreise so, dafs jeder derselben durch einen der drei gegebenen Puncte „geht und die beiden übrigen zu zugeordneten Polen hat, so schneiden „sich diese drei Kreise in denselben beiden Puncten."

In diesem Falle können wir in der analytischen Beweisführung uns der Symbole $\cos\omega$, die unendlich werden, nicht mehr bedienen. Man erhält hier indessen, indem man $\varrho = 0$, $\varrho' = 0$, $\varrho'' = 0$ setzt, aus (5.) sogleich

$$\mu = \frac{e'^2}{e^2},$$

wenn man durch e' und e die Abstände des ersten und zweiten gegebenen Punctes vom dritten bezeichnet.

Der Raum verbietet, hierüber mehr in's Detail einzugehen. Ich erwähne nur noch beiläufig, dafs, da in der Gleichung (6.) der dritte gege-

bene Kreis nur in den Winkeln ω und ω', unter welchen er die beiden ersten schneidet, erscheint, wir sogleich folgenden Satz erhalten:

„Alle dritten Kreise, welche jeden von zwei gegebenen Kreisen „unter einem gegebenen Winkel schneiden, werden ihrerseits von einem und „demselben Kreise unter rechten Winkeln geschnitten, und dieser Kreis „geht durch die beiden Durchschnitte der beiden gegebenen."

Eigentlich kommt in der Gleichung (7.) nur der Quotient $\frac{\cos\omega'}{\cos\omega}$ vor.

2. Neben den Satz:

„dafs, wenn man die Winkel, welche in den Durchschnitten von ir- „gend drei gegebenen geraden Linien entstehen, durch sechs neue „gerade Linien halbirt, diese Halbirungs-Linien zu drei in vier neuen „Puncten sich schneiden,"

stellt sich der folgende:

Wenn irgend drei Kreise gegeben sind, und man halbirt diejenigen Winkel, welche in den Durchschnitten je zweier derselben entstehen, durch dreimal zwei Kreise, so erhält man solche sechs Kreise, die zu drei, auf vierfache Weise zusammengestellt, in denselben beiden Puncten sich schneiden.

Um diesen Satz zu beweisen, wollen wir die drei gegebenen Kreise wiederum durch die Gleichungen (1.—3.) der vorigen Nummer darstellen, und durch die Gleichung (4.) denjenigen Kreis bezeichnen, der durch die Durchschnitte der beiden ersten gegebenen geht und die Durchschnitts-Winkel derselben halbirt. Da dieser Kreis alsdann mit dem ersten und zweiten gegebenen Kreise Winkel bildet, die sich zu π ergänzen, und deren Cosinus also gleich und von entgegengesetztem Zeichen sind, so erhält man folgende Gleichung zur Bestimmung von μ, wenn wir, der Kürze halber, in den Nennern der folgenden Ausdrücke den Radius des Kreises (4.) R nennen:

$$9.\quad \frac{\left(\frac{\beta+\mu\beta'}{1+\mu}-\beta\right)^2+\left(\frac{\alpha+\mu\alpha'}{1+\mu}-\alpha\right)^2\Big\}-\Big\{\frac{\varrho^2-(\beta^2+\alpha^2)+\mu(\varrho'^2-(\beta'^2+\alpha'^2))}{1+\mu}-\left(\frac{\beta+\mu\beta'}{1+\mu}\right)^2-\left(\frac{\alpha+\mu\alpha'}{1+\mu}\right)^2\Big\}-\varrho^2}{2R\varrho}$$

$$=-\frac{\Big\{\left(\frac{\beta+\mu\beta'}{1+\mu}-\beta'\right)^2+\left(\frac{\alpha+\mu\alpha'}{1+\mu}-\alpha'\right)^2\Big\}-\Big\{\frac{\varrho^2-(\beta^2+\alpha^2)+\mu(\varrho'^2-(\beta'^2+\alpha'^2))}{1+\mu}-\left(\frac{\beta+\mu\beta'}{1+\mu}\right)^2-\left(\frac{\alpha+\mu\alpha'}{1+\mu}\right)^2\Big\}-\varrho'^2}{2R\varrho'}.$$

Nach allen Reductionen erhalten wir hieraus:

$$\mu=-\frac{\varrho}{\varrho'},$$

und also aus (4.):

$$10.\quad \frac{1}{\varrho}C - \frac{1}{\varrho'}C' = 0.$$

Durch bloſse Accent-Vertauschung erhalten wir hiernach für diejenigen beiden Kreise, welche die von dem zweiten und dritten, und von dem ersten und dritten gegebenen Kreise gebildeten Winkel halbiren, folgende Gleichungen:

$$11.\quad \begin{cases} \frac{1}{\varrho'}C' - \frac{1}{\varrho''}C'' = 0, \\ \frac{1}{\varrho''}C'' - \frac{1}{\varrho}C = 0. \end{cases}$$

Die drei Kreise (10.) und (11.) gehen also, was zu beweisen war, durch dieselben beiden Puncte.

Wenn wir das Zeichen eines der drei Radien ϱ, ϱ' und ϱ'' in den letzten drei Gleichungen ändern, so erhalten wir drei neue Kreise, welche in denselben beiden Puncten sich schneiden. Nehmen wir ϱ mit entgegengesetztem Zeichen, so erhält der erste Theil der Gleichung (9.) ebenfalls das entgegengesetzte Zeichen, und diese Bedingungs-Gleichung drückt aus, daſs der Kreis (10.) die beiden Kreise (1.) und (2.) unter gleichen Winkeln schneidet, und folglich die Nebenwinkel der Durchschnittswinkel der letztgenannten beiden Kreise halbirt. In eine gleiche Beziehung tritt alsdann auch der zweite der Kreise (11.) zu den Kreisen (1.) und (3.). Hiernach ist der vorstehende Satz vollständig bewiesen.

Es ist dieser Satz, wenigstens unter einer andern Aussage, bekannt. Die Mittelpuncts-Coordinaten des Kreises (10.) z. B. sind:

$$y = \frac{\varrho'\beta - \varrho\beta'}{\varrho' - \varrho}, \qquad x = \frac{\varrho'\alpha - \varrho\alpha'}{\varrho' - \varrho},$$

und in diesen Ausdrücken erkennen wir die Coordinaten des Durchschnittes der gemeinschaftlichen äuſsern Tangenten der beiden ersten Kreise wieder. Ändern wir das Zeichen von ϱ oder ϱ', so erhalten wir die Coordinaten des Durchschnittes der gemeinschaftlichen innern Tangenten derselben beiden Kreise. Also:

„Wenn man aus solchen drei Durchschnittspuncten gemeinschaftli-„cher Tangenten je zweier von drei gegebenen Kreisen, die in gerader „Linie liegen, als Mittelpuncten, drei neue Kreise beschreibt, welche durch „die Durchschnitte der beiden bezüglichen gegebenen Kreise gehen, so „schneiden dieselben sich in denselben beiden Puncten." (Anal. geom. Entw. I. 185.)

Wenn ich nicht irre, ist dieser Satz schon in einem frühern Bande on **Gergonne**'s Annalen aufgestellt und bewiesen worden. Ich bemerke -lläufig, dafs in dem vorstehenden Satze die drei Durchschnittspuncte meinschaftlicher Tangenten mit **irgend drei andern Puncten** ver-uscht werden können, die in gerader Linie und auf den Central-Linien zweier der drei gegebenen Kreise liegen *).

3. „Wenn man die Innenwinkel eines gegebenen Dreiecks durch drei gerade Linien halbirt, so schneiden sich diese Halbirungs-Linien in einem und demselben Puncte. Wenn man von diesem Puncte aus Perpendikel auf die drei Dreiecksseiten fällt, so sind die Fufspuncte dieser Perpendikel diejenigen Puncte, in welchen der dem Dreieck eingeschriebene Kreis die Seiten desselben berührt. Dieser Kreis ist durch diese Berührungspuncte bestimmt."

Ganz analog ist folgende neue, und, wie mir scheint, elegante Con-truction des Problems der Tactionen:

Einen Kreis zu beschreiben, der drei gegebene Kreise erührt.

„Man halbire durch drei Kreise diejenigen beiden Winkel, unter welchen die drei gegebenen Kreise, paarweise genommen, sich schneiden. Diese drei Kreise gehen durch dieselben beiden Puncte. Man lege durch diese beiden Puncte drei neue Kreise, welche die drei gegebenen unter rechten Winkeln schneiden. Die dreimal zwei Durchschnittspuncte welche man hiernach auf den letztgenannten drei Kreisen erhält, sind diejenigen Puncte, in welchen diese Kreise von zwei der verlangten berührt werden: von denjenigen nemlich, welche dieselben alle drei gleichartig berühren."

---

*) Um keinen Satz unbewiesen zu lassen, füge ich diese Note hinzu. Die Mit-lpuncte der drei Kreise (1.) können wir durch folgende drei Gleichungen darstellen, enn wir uns der neuen Linien-Coordinaten bedienen:

$$\beta u+\alpha v+1=U=0,\quad \beta' u+\alpha' v+1=U'=0,\quad \beta'' u+\alpha''' v+1=U''=0.$$

gend drei andere Puncte, welche auf den Seiten des durch diese drei Mittelpuncte stimmten Dreieckes, und überdiefs in gerader Linie liegen, können wir alsdann, enn μ und ν unbestimmte Coefficienten bedeuten, durch folgende Gleichungen darstellen:

$$U-\mu U'=0,\quad \mu U'-\nu U''=0,\quad \nu U''-U=0.$$

Diese Puncte sind aber, wie sogleich erhellet, die Mittelpuncte folgender drei Kreise:

$$C-\mu C'=0,\quad \mu C'-\nu C''=0,\quad \nu C''-C=0,$$

die, was man sogleich aus ihren Gleichungen entnimmt, durch die Durchschnitte je weier der drei gegebenen Kreise geben, und überdiefs alle drei in denselben beiden uncten sich schneiden.

Ohne Mühe ergiebt sich der Beweis dieser Construction, die sich was nach dem Vorhergehenden kaum noch erwähnt zu werden braucht, auf jede beliebige gegenseitige Lage der drei gegebenen Kreise zu einander erstreckt.

Wir wollen die beiden gesuchten Kreise C und C' nennen; jeder derselben wird von der drei gegebenen Kreisen γ, γ' und γ'' gleichartig berührt. In der 196sten Nummer des ersten Bandes der „Entwickelungen" ist ohne allen Aufwand von Rechnung gezeigt worden, dafs der Durchschnitt der äufsern gemeinschaftlichen Tangenten irgend zweier Kreise, welche die Kreise C und C' so berühren, wie es die Kreise γ thun, auf der gemeinschaftlichen Chorde von C und C' liegen. Derjenige Kreis K, welcher aus einem solchen Puncte, als Mittelpunct, beschrieben wird und mit den bezüglichen beiden Kreisen (etwa γ und γ') dieselben Durchschnittspuncte hat, schneidet die beiden Kreise C und C' unter rechten Winkeln. Es folgt diefs unmittelbar aus dem Satze am Ende der ersten Nummer dieses Aufsatzes (II.), wenn man zugleich bemerkt, dafs die Gleichungen (7.) und (10.) identisch werden, wenn $\omega = \omega'$, und also insbesondere auch, wenn $\omega = \omega' = 0$ oder $\omega = \omega' = \pi$. Hieraus folgt dann ferner, dafs alle solche Kreise K die Centrallinie der beiden Kreise C und C' in denselben beiden festen Puncten schneiden, was auch schon in der 185sten Nummer der Entwicklungen bemerkt worden ist.

Wenn wir nun statt eines Kreises K einen solchen Kreis nehmen, der zweien zusammenfallenden Kreisen γ entspricht, so ist aus einer Gränz-Betrachtung sogleich ersichtlich, dafs ein solcher Kreis den Kreis γ rechtwinklig schneidet und durch diejenigen beiden Puncte geht, in welchen der Kreis γ von den Kreisen C und C' berührt wird. Ein solcher Kreis wird aber auch die Centrallinie der letztgenannten beiden Kreise immer noch in den beiden constanten Durchschnittspuncten der Kreise K schneiden. Somit ist die obige Construction gerechtfertigt.

Die Construction der übrigen Berührungs-Kreise ist ganz ähnlich.

Ich beschränke mich hier auf die vorstehenden Analogien. Nach Analogien zu schliefsen, ist eines der ersten Hülfsmittel, um neue Sätze aufzufinden, und überdiefs, wo, wie in dem Vorstehenden, Analogien zwischen zwei Reihen von Sätzen sich finden, da besteht nothwendig ein Übertragungs-Princip. Ich komme später noch hierauf zurück.

Bonn, am 1. August 1831.

25.

Démonstration de la solution du problème de Malfatti, donnée par Mr. Steiner p. 178. du tome I. cah. 2.

(Par Mr. *Zornow*, professeur au Collège de Kneiphof, à Königsberg.)

On trouve dans le tome I. de ce Journal une construction très remarquable du problème suivant, connu sous le nom du problème de Malfatti: „A un triangle donné quelconque, inscrire trois cercles de manière, que chacun d'eux touche extérieurement les deux autres et deux côtés du triangle." Cette construction également distinguée par sa simplicité et son élégance, n'a pas été démontrée par son auteur, et à ce que je sais, nulle démonstration en a été publiée depuis ce tems là. C'est ce qui me fournit l'occasion de communiquer aux Géométres la demonstration suivante, qui me parait assez simple pour mériter leur indulgence.

Commençons par quelques considérations connues.

1. Soient (Taf. V. Fig. 1.) a et b deux cercles *), qui se touchent extérieurement; par leur point de contact z menons une tangente commune zw''. Soit $u''v''$ une autre tangente, qui rencontre la première au point w'', on aura:

$$w''u'' = w''v'' = w''z = \sqrt{(ab)}.$$

2. Étant mené par u'' et v'' un troisième cercle quelconque c_1 **), qui coupe a et b dans deux autres points y et x, la droite c_1w'' sera perpendiculaire à la droite $u''v''$. En même tems la droite $u''y$ sera perpendiculaire à la droite ac_1, qui joint les centres des deux cercles a, c_1.

3. Les cercles a et b peuvent être touchés dans les points y et x par un même cercle c.

4. Soit A' le point de rencontre des deux droites ac_1 et $u''v''$ prolongées convenablement, la droite $A'y$ touchera le cercle a au point y, et par suite aussi le cercle c dans le même point.

5. Soit décrit du centre c_1 un second cercle, qui touche $u''v''$ au point w'' ***). Le point A' sera le point de similitude extérieur des deux cercles a et c_1, donc la droite $A'y$ touchera aussi le cercle c_1.

*) Nous désignerons, pour abréger, le cercle, son centre, et son rayon par la même lettre de l'alphabet.

**) Ce cercle n'est pas construit dans la figure, pour ne pas la rendre trop compliquée.

***) C'est ce cercle et son rayon c_1w'', que nous désignerons désormais par c_1.

6. Réciproquement la tangente yt commune aux cercles a et c menée par leur point de contact y, touche le cercle c_1. De la même manière on prouve, que la tangente xs, commune aux cercles b et c, menée par leur point de contact x, touche le cercle c_1.

7. Les droites zw'', xs, yt se coupent dans un point unique P, que l'on peut regarder comme le centre du cercle inscrit au triangle abc. D'où suit:

$$zP = xP = yP = \sqrt{\left(\frac{abc}{a+b+c}\right)}.$$

8. Le point P étant le point de similitude intérieur des deux cercles c_1 et c, les trois points c_1, P, c sont sur une même droite, et par suite les deux triangles cPx et c_1Ps sont semblables. On tire de là:

9. $Px:sx = c:c_1+c$; ou $\sqrt{\left(\frac{abc}{a+b+c}\right)}:\sqrt{(ab)} = c:c_1+c$; d'où vient $c_1+c = \sqrt{(c(a+b+c))}$, ou bien $c_1^2 = c(a+b-2c_1)$.

10. Soit as' la tangente menée du point a au cercle c_1, on a:

$$(as')^2 = (ac_1)^2 - c_1^2 = (a-c_1)^2 + ab - x_1^2 = a(a+b-2c_1) = \frac{a}{c}.c_1^2.$$

11. Soit $u'v'$ une tangente extérieure commune aux cercles a et c, et qui ne rencontre pas le troisième b, si elle coupe la droite Py au point w', on a, comme ci dessus 1.:

$$w'u' = w'v' = w'y = \sqrt{(ac)},$$

et par conséquence;

$$\frac{c_1s'}{as'} = \frac{u'w'}{u'a} = \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

On voit par là, que les deux triangles rectangles c_1as' et $w'au'$ sont semblables, d'où suit.

$$\angle c_1as' = \angle w'au'.$$

12. Soit A le point de rencontre des deux droites $u'v'$, $u''v''$; le cercle a étant inscrit au triangle $AA'w'$, on a toujours:

$$\angle w'au' + \angle AaA' = 2R.$$

On aura donc aussi:

$$\angle A'as' + \angle AaA' = 2R.$$

On voit par là, que les droites Aa et as' se confondent en une droite unique, c'est à dire: la droite Aa, qui divise en deux parties égales l'angle A formé par les deux droites $u'v'$ et $u''v''$, touche en même tems le cercle c_1.

13. Soit de plus uv tangente commune extérieure aux cercles b et c, et qui ne rencontre pas le troisième cercle a; soient B et C ses points de rencontre avec les droites $u''v''$ et $u'v'$, on prouve de la même ma-

nière, que la droite BC touche le cercle c_1. Donc un triangle ABC étant circonscrit aux trois cercles a, b, c de manière, que chacun de ses côtés touche extérieurement deux de ces cercles, si l'on partage les angles A, B, C en deux parties égales au moyen des droites AO, BO, CO, le cercle c_1 sera inscrit au triangle ABO.

14. Réciproquement le cercle c_1 inscrit au triangle ABO, est touché de deux des trois tangentes xP, yP, zP, menées aux cercles a, b, c par leurs points de contact communs x, y, z, et touche en même tems le côté AB au même point w'', auquel il est rencontré par la troisième tangente Pz.

15. Soient de plus a_1 et b_1 les cercles inscrits aux deux autres triangles BCO et CAO, on prouve de la même manière, qu'ils sont touchés respectivement des droites yP, zP, et des droites zP, xP. Donc du point w'', auquel le cercle c_1 touche le côté AB, on peut mener une tangente Pz commune aux quatre cercles a, b, a_1, b_1, et qui touche en même tems les deux premiers à leur point de contact commun.

16. Étant donné le triangle ABC, si l'on cherche les trois cercles a, b, c, déterminés de manière, que chacun d'eux touche les deux autres et en même tems deux des côtés du triangle ABC, on partagera en premier lieu les angles A, B, C en deux parties égales au moyen des droites AO, BO, CO; après cela étant inscrits aux triangles BCO, CAO, ABO les cercles a_1, b_1, c_1, dont le dernier touche AB au point w'', si l'on mène du point w'' une tangente au cercle a_1 tellement choisie, qu'elle touche en même tems le cercle b_1, ce qui est toujours possible, elle touchera aussi deux des cercles cherchés a et b, qui sont par là entièrement déterminés. Par une construction semblable on trouve le troisième cercle c.

La construction précédente du problème de Malfatti est précisément celle, qui a été donnée par Mr. Steiner à l'endroit cité.

Königsberg, le 30. Oct. 1832.

26.

Mémoire sur les fonctions discontinues.

(Par Mr. *Guillaume Libri* de Florence.)

(Lu à l'Académie Royale des sciences de Paris, le 21. Mai 1832.)

Introduction.

Il y a quelques années que dans un mémoire où je discutais les valeurs des limites des fonctions discontinues, j'exposai une manière fort simple de représenter ces fonctions par des exponentielles sans intégrales définies ni suites infinies. J'assurai à cette occasion, que mes formules pouvaient s'appliquer avec succès aux transcendantes numériques, et spécialement à la recherche directe d'un nombre premier plus grand qu'une limite donnée.

Les géomètres qui tentèrent les premiers d'exprimer les fonctions discontinues en analyse, rencontrèrent de grands obstacles et de puissans antagonistes. Cette question agitée d'abord entre Daniel Bernoulli, Euler et D'Alembert, a occupé successivement les plus celèbres géomètres, mais ce n'est que dans ces derniers tems qu'elle a reçu une solution adoptée généralement par les analystes. Les travaux de Fourier et les belles recherches de Mr. Poisson sur les limites des fonctions discontinues, ont dû dissiper les doutes qui restaient encore sur la nature de ces fonctions.

Dans ce mémoire j'ai tâché de réduire à l'algèbre ordinaire et aux fontions exponentielles, les fonctions discontinues qui paraissaient placées aux limites les plus reculées de la science. Non seulement cette manière élémentaire de traiter des questions difficiles, sert à propager des connaissances qui étaient réservées à un petit nombre de personnes, mais elle conduit aussi à la résolution algébrique d'un grand nombre de problèmes qui paraissaient excéder les forces de l'analyse. Déjà dans ce mémoire j'applique mes principes à la détermination directe et générale des diviseurs des nombres, et à la recherche des nombres premiers. Mais ces formules sont d'un usage beaucoup plus étendu. Les géomètres qui auront bien saisi l'esprit de ma méthode verront qu'elle peut s'appliquer à une multitude de questions diverses. Elle sert surtout à la recherche du

terme général de certaines séries qui paraissaient n'obéir à aucune loi analytique.

Mes expressions s'éloignent tellement des formes analytiques ordinaires, elles paraîtront, peut être, si singulières au lecteur, que j'ai cru devoir insister spécialement sur leur démonstration. On trouvera au commencement de ce mémoire une discussion fort longue des valeurs de la fonction 0^x. J'aurais pu, peut être, m'en rapporter à ce qui se trouvait déjà dans d'autres ouvrages, mais j'ai tâché de combattre d'avance les difficultés que ce genre d'expression auroit pu faire naître dans l'esprit du lecteur.

La fonction $\frac{1}{0^x+1}$, dont je me sers dans ce mémoire, est beaucoup plus simple que celle dont je m'étais servi précédemment. Elle a de plus l'avantage de pouvoir s'appliquer à la théorie des nombres, de manière à éviter la valeur de 0^0. Alors elle devient évidente par elle même, indépendamment de toute considération étrangère.

Ces formules ne renferment aucune notation nouvelle. Elles sont le résultat nécessaire des propriétés connues des fonctions exponentielles. Les fonctions discontinues n'avaient été appliquées jusqu'ici qu'aux problèmes de physique mathématique. A l'avenir elles contribueront surtout aux progrès de l'analyse algébrique et à l'application de l'algèbre à la géométrie.

Analyse.

Dans nos recherches précédentes sur les fonctions discontinues nous avons considéré la valeur de 0^0 comme étant toujours égale à l'unité, en coséquence de la valeur de $x \log 0$, qui était toujours égale à zéro, lorsque $x = 0$. Mais il faut observer qu'on sait seulement que le produit $x \log x$ est égal à zéro lorsque $x = 0$; tandisque on ignore si dans $x \log 0$, le 0 du $\log 0$ vient de $\log x$, dans lequel on ait fait $x = 0$, ou de toute autre fonction de x sous le signe logarithmique. Il résulte de là quelque incertitude dans la valeur de $x \log 0$, lorsque $x = 0$, et par suite dans celle de $0^0 = 1$. Mais il est aisé de prouver directement par d'autres moyens que l'expression 0^0 a toujours pour valeur l'unité.

Mascheroni *) avait déjà observé que $0^0 = 1$. Il trouvait cette valeur par l'équation

$$0^0 = (a-a)^{n-n} = \frac{(a-a)^n}{(a-a)^n} = 1;$$

mais on peut y parvenir par d'autres voies.

On sait que lorsque x est un nombre entier, le développement du binome

$$(1-u)^x = 1 - xu + \frac{x(x-1)u^2}{2} - \frac{x(x-1)(x-2)u^3}{2.3} + \text{etc.},$$

s'arrête toujours et donne toujours une valeur exacte quelleque soit la valeur de u; ce qui ne tient pas à la convergence de la série du second membre (car cette convergence exige que l'on ait $u < 1$), mais au facteur $x - x$, qu'on retrouve dans tous les termes après le terme $x+1^{me}$. Il résulte de là que si l'on fait $x = 0$, tous les termes, excepté le premier, se détruiront, et on aura toujours $(1-u)^0 = 1$. On voit que cette valeur est indépendante de la valeur de u, et qu'on pourra faire $u = 1$, d'où il résultera $(1-1)^0 = 1 = 0^0$. On voit aussi que l'on parviendrait au même résultat, en fesant d'abord

$$(a-b)^x = a^x - x a^{x-1} b + \frac{x(x-1)}{2} a^{x-2} b^2 - \text{etc.}$$

et puis (par la supposition de $x = 0$), $(a-b)^0 = a^0 = 1$: car puisque ce dernier résultat est indépendant de a et de b, on pourra faire $a = b$, et on aura encore

$$(a-a)^0 = 0^0 = 1.$$

Il est clair que lorsque x est une quantité positive quelconque, la fonction 0^x est toujours égale à zéro. Ceci n'a pas besoin d'être démontré; mais si on voulait voir, comment la quantité 0^x, qui est égale à *l'unité* lorsque $x = 0$, devient égale à *zéro* pour une valeur quelconque de x très peu différente de zéro, on n'aurait qu'à faire x infiniment petit dans l'équation

$$(1-1)^x = 1 - x + \frac{x(x-1)}{2} - \frac{x(x-1)(x-2)}{2.3} + \text{etc.};$$

ce qui donnerait, en negligeant les puissances supérieures de x:

$$(1-1)^x = 1 - x(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} \ldots + \text{etc.})$$
$$= 1 - x \log(1-1) = 1 - x \log 0.$$

Maintenant on sait que lorsque $x = 0$, le produit $x(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots + \text{etc.})$

---

*) Euleri institutiones calculi differentialis. Ticini 1787. 4°. pars II. p. 813. 814.

est égal à zéro, quoique le second facteur soit une quantité infinie; il résulte de là que si on fait x égal à une quantité très-petite (mais plus grande que zéro) la valeur de ce produirt sera égale à l'unité, et alors on aura

$$(1-1)^x = 1 - x(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\ldots.+\text{etc.}) = 1-1 = 0.$$

Il résulte de là qu'en général la fonction 0^x aura pour valeur *zéro*, *l'unité*, ou *l'infini*, selon que x aura une valeur *positive*, *zéro* ou *négative*.

Puisque la fonction 0^x ne sauroit avoir que l'une de ces trois valeurs

$$0,\ 1,\ \infty,$$

il est clair que la fonction 0^{0^x} ne peut prendre que l'une des trois valeurs suivantes:

$$0^0,\ 0^1,\ 0^\infty,$$

qui donnent

$$0^0 = 1,\ 0^1 = 0,\ 0^\infty = 0.$$

Il résulte de là que la fonction 0^{0^x} est égale à zéro pour la valeur $x=0$, et pour une valeur négative quelconque de x; et que $0^{0^x} = 1$, pour toutes les valeurs positives de x.

Maintenant la fonction

$$z = 0^{0^x}\, 0^{0^{a-x}},$$

a pour valeur l'unité pour toutes les valeurs de x comprises entre $x=0$, et $x=a$; cette fonction se réduit à zéro pour toutes les autres valeurs de x. Car le premier facteur 0^{0^x} est égal à zéro depuis $x=0$ jusqu'à $x=-\infty$, et donne toujours $0^{0^x}=1$, pour toute valeur positive de x. Le second facteur $0^{0^{a-x}}$ est égal à zéro depuis $x=a$ jusqu'à $x=\infty$, et donne $0^{0^{a-x}}=1$, pour toutes les valeurs de x comprises entre $x=a$, $x=-\infty$, Partant, puisque pour toutes les valeurs de x, comprises entre $x=a$, $x=\infty$; et entre $x=0$, $x=-\infty$, l'un des deux facteurs de z est égal à zéro; et que entre $x=0$, $x=a$, ils sont tous les deux égaux à l'unité; il en résulte enfin que le produit $0^{0^x}\,0^{0^{a-x}}$ a pour valeur l'unité entre $x=0$, $x=a$, et que hors de ces limites on a toujours $0^{0^x}\,0^{0^{a-x}}=0$. En observant que pour $x=0$, et $x=a$, on aura toujours $0^{0^x}\,0^{0^{a-x}}=0$.

Il faut remarquer ici, qu'étant donnée une fonction discontinue quelconque, on pourra toujours la considérer comme étant égale à la somme d'un nombre donné de fonctions, qui resteront continues entre des limites

données. Ces limites seront déterminés par les points où il y a solution de continuité dans la fonction discontinue donnée. Maintenant, chacune des fonctions continues partielles, dont la fonction discontinue totale se compose, pourra être representée par le produit de deux facteurs, dont l'un exprimera la valeur de la fonction discontinue entre deux limites de discontinuité, et l'autre exprimera la loi de discontinuité: pourvu que l'on ait toujours égard à la valeur de ces fonctions aux limites et à d'autres circonstances qui tiennent aux valeurs infinies des fonctions dont on ne considère qu'une partie.

La fonction $0^{0^{\varphi(x)}}$ devient zéro pour chaque valeur de $\varphi(x)=0$, de manière que si on voulait exprimer de cette manière le contour d'un polygone, il est clair qu'en employant des facteurs de la forme $0^{0^x}0^{0^{a-x}}(Ax+B)$ pour représenter chaque côté, on aura pour chaque sommet une valeur de l'ordonnée égal à zéro, ce qui serait inexact. Mais il est facile dans chaque cas de corriger cette erreur. Pour fixer les idées nous allons prendre un exemple. Supposons qu'on doive trouver l'équation de la ligne $abcd\ldots.$ (Taf. V. Fig. 2.) telle que ac soit une ligne droite, et $cd\ldots.$ une parabole. Soit he l'axe des ordonnées et eg l'axe des abscisses, soit $ef=n$, et exprimons en général par $y=Ax+B$, l'équation de la droite abc, et par $y=\sqrt{(Cx+D)}$ l'équation de la parabole cd. Il s'agit de trouver une fonction de x telle que depuis $x=-\infty$, jusqu'à $x=n$, elle devienne $Ax+B$, et que depuis $x=n$ jusqu'à $x=\infty$, elle devienne $\sqrt{(Cx+D)}$. Il est clair qu en appellant $f(x)$ cette fonction inconnue, on pourra faire $f(x)=F(x)+\psi(x)$, pourvu que $F(x)$ soit égale à $Ax+B$ depuis $x=-\infty$ jusqu'à $x=n$, et s'évanouisse depuis $x=n$ jusqu'à $x=\infty$; et pourvu que $\psi(x)$ soit égale à $\sqrt{(Cx+D)}$ depuis $x=n$ jusqu'à $x=\infty$, et s'évanouisse depuis $x=n$ jusqu'à $x=-\infty$. Maintenant les fonctions $F(x)$ et $\psi(x)$ restent continues entre les limites $x=-\infty$, $x=n$; $x=n$, $x=\infty$: donc il faudra les décomposer en deux facteurs dont l'un exprime la condition de discontinuité, et l'autre la valeur numérique de la fonction. On voit que si on multiplie $Ax+B$ par une fonction $\varphi(x)$ telle qu'elle soit égale à l'unité depuis $x=-\infty$ jusqu'à $x=n$, et qu'elle devienne zéro depuis $x=n$ jusqu'à $x=\infty$, on aura d'abord la droite abc, et puis une valeur $y=0$ pour toutes les autres valeurs de x: de même si on multiplie $\sqrt{(Cx+D)}$ par une fonction $\varphi_1(x)$ telle qu'elle soit égale à l'unité de-

puis $x=n$ jusqu'à $x=\infty$, et qu'elle s'évanouisse depuis $x=n$ jusqu'à $x=-\infty$, on aura la parabole cd et puis une valeur de $y=0$ pour toutes les autres valeurs de x. Et comme ces valeurs de $y=0$ n'ajoutent rien à la valeur des ordonnées, on aura enfin

$$f(x)=F(x)+\psi(z)=\varphi(x)(Ax+B)+\varphi_1(x)\sqrt{(Cx+D)}.$$

Mais on a vu qu'on pouvait faire

$$\varphi_1(x)=0^{0^{x-n}};\ \varphi(x)=0^{0^{n-x}},$$

d'ou il résulte enfin, que la fonction cherchée $f(x)$ est donnée par l'équation

$$f(x)=0^{0^{n-x}}(Ax+B)+0^{0^{x-n}}\sqrt{(Cx+D)}.$$

Il faut observer cependant que pour la valeur $x=n$, au lieu d'obtenir, comme on le devrait, $f(n)=An+B$, on trouve $f(n)=0$, parceque $0^{0^{n-x}}$ et $0^{0^{x-n}}$ sont toutes deux égales à zéro l'orsqu'on fait $x=n$: cependant on aura une valeur exacte même pour cette limite $x=n$, en prenant pour $\varphi(x)$ la valeur $1-0^{0^{x-n}}$; car cette fonction donnera alors $\varphi(x)=1$, pour toutes les valeurs comprises entre $x=n$, $x=-\infty$ (en y comprenant la valeur $x=n$), et se réduira à zéro pour toutes les valeurs comprises entre $x=n$, $x=\infty$. Ainsi on aura

$$f(x)=\left(1-0^{0^{x-n}}\right)(Ax+B)+0^{0^{x-n}}\sqrt{(Cx+D)};$$

et l'équation

$$y=\left(1-0^{0^{x-n}}\right)(Ax+B)+0^{0^{x-n}}\sqrt{(Cx+D)}$$

sera l'équation de la courbe $abcd,\ldots$ qui est composée de la ligne droite abc et de l'arc de parabole $cd\ldots$.

Toute la question consiste à trouver une fonction $F(x)$ telle qu'elle ait la valeur 1 entre les limites $x=0$, $x=a$, et s'évanouisse entre $x=0$, $x=-\infty$, et entre $x=a$, $x=\infty$: car en multipliant $F(x)$ par la fonction $\psi(x)$ qui exprime la valeur de la fonction discontinue entre les deux limites $x=a$, $x=0$, on aura $F(x)\,\psi(x)$, qui représentera une partie de la fonction discontinue entre les deux limites $x=0$, $x=a$, qu'on peut supposer être deux points où la fonction totale cesse d'être représentée par la fonction $\psi(x)$; ou en d'autres termes, être deux *points successifs de discontinuité*. On peut trouver plusieurs valeurs de la fonction $F(x)$, et ces valeurs diffèrent aux limites: ainsi la fonction

$$F(x)=0^{0^{x}}\,0^{0^{a-x}}$$

donne $F(x)=0$, pour $x=0$, et pour $x=a$. La fonction

$$F(x) = \left(1-0^{0^{-x}}\right)\left(1-0^{0^{x-a}}\right)$$

donne $F(x)=1$, pour les limites $x=0$, $x=a$; la valeur

$$F(x) = \left(1-0^{0^{-x}}\right)0^{0^{a-x}}$$

donne $F(x)=1$, pour $x=0$, et $F(x)=0$, pour $x=a$. Enfin la valeur

$$F(x)=\frac{1}{(0^x+1)(0^{a-x}+1)} \text{ donne } F(x)=\tfrac{1}{2},$$

pour $x=0$ et pour $x=a$; en observant toujours que toutes ces valeurs de $F(x)$ donnent $F(x)=0$ depuis $x=0$ jusqu'à $x=-\infty$, et depuis $x=a$ jusqu'à $x=\infty$: et qu'on a $F(x)=1$ entre les limites $x=0$, $x=a$: indépendamment des valeurs des limites que nous avons déjà déterminées.

Au reste ces diverses expressions peuvent être considérées comme étant les limites d'autres fonctions dans lesquelles le *zéro* est remplacé par une quantité très petite. Si l'on exprime par d une quantité très petite, la fontion 0^x sera la limite de la fonction d^x; et celle-ci aura une valeur très petite ou très grande selon que x est positif ou négatif. Lorsque $x=0$, on aura $d^x=1$. On voit de même que la fonction 0^{0^x} est la limite de d^{d^x}, et que $\frac{1}{0^x+1}$ est la limite de la fonction $\frac{1}{d^x+1}$. en supposant toujours que d est une quantité très petite.

Les fonctions que nous venons de considérer jouissent de plusieurs propriétés remarquables. Elles servent à transformer en fonctions exponentielles un grand nombre d'intégrales définies qu'on croyait irréductibles. Ainsi l'on a

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dq\cos qx}{1+q^2} = e^x.0^{0^{-x}} + e^{-x}\left(1-0^{0^{-x}}\right) = \frac{e^x}{0^{-x}+1} + \frac{e^{-x}}{0^x+1},$$

d'où l'on déduit ce rapport assez singulier:

$$\begin{aligned}\left(e^x.0^{0^{-x}} + e^{-x}\left(1-0^{0^{-x}}\right)\right)^n &= \left(\frac{e^x}{0^{-x}+1} + \frac{e^{-x}}{0^x+1}\right)^n \\ &= e^{nx}.0^{0^{-x}} + e^{-nx}\left(1-0^{0^{-x}}\right) \\ &= \frac{e^{nx}}{0^{-x}+1} + \frac{e^{-nx}}{0^x+1}.\end{aligned}$$

On voit par la formule précédente, que nos expressions s'appliquent à la théorie mathématique de la chaleur et qu'elles simplifient beaucoup l'expression de certaines fonctions, qu'on ne savait représenter que par

des intégrales définies. Les formules qu'on obtient de cette manière sont très simples, et rentrent dans l'algèbre ordinaire. Nous pensons même qui si au lieu d'exprimer les fonctions discontinues par des séries infinies ou par des intégrales définies, on les avait représentées d'abord par des fonctions du genre de celles que nous venons d'exposer, on aurait évité beaucoup de disputes et de malentendus sur les fonctions discontinues dont la marche et les propriétés ne sont, en dernière analyse pas moins évidentes que celles des fonctions les plus simples. Mais nos expressions trouveront surtout une application utile dans la théorie des nombres. Car elles donnent, sous formes finies et par des exponentielles seulement, la valeur en nombres de transcendantes numériques, dont on connaissait à peine quelques propriétés, et dont on ne pouvait avoir aucune expression générale. D'ailleurs pour simplifier la question, nous éviterons les valeurs de 0^0 que nous avons considérées au commencement de ce mémoire: ce qui rendra tout à fait élémentaires les recherches suivantes.

Il est évident que $\sqrt{0} = 0^{\frac{1}{2}} = 0$; maintenant la fonction $0^{\frac{1}{2}+x}$ (dans laquelle x doit toujours être un nombre entier) sera égale à zéro tant que x restera positif, et deviendra infinie lorsque x sera négatif. Il résulte de là que la fonction

$$\frac{1}{0^{\frac{1}{2}+x}+1},$$

sera égale à l'unité tant que x restera entier et positif, et deviendra égale à zéro lorsque x sera un nombre entier négatif.

On sait que la somme des puissances m^{mes} des racines de l'équation $x^n - 1 = 0$, sera égale à n ou à zéro, selon que le nombre $\frac{m}{n}$ sera un nombre entier ou une fraction. Maintenant si on divise l'équation proposée par $x-1$, on aura

$$X = x^{n-1} + x^{n-2} \ldots + x + 1 = 0,$$

et il est clair qu'en exprimant par P_m la somme des puissances m^{mes} des racines de l'équation $X = 0$, on aura $1 + P_m = n$, lorsque $\frac{m}{n}$ est un nombre entier, et $1 + P_m = 0$, dans le cas contraire. Il s'agit maintenant d'exprimer P_m généralement en fonctions des coefficiens de l'équation $X = 0$.

Nous avons démontré ailleurs *) qu'étant donnée l'équation

$$X_1 = x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} \ldots - a_n = 0,$$

*) Mémoires de mathématiques et de physique, tome I. p. 11.

si on exprime par S_m la somme des puissances m^{mes} de ses racines, on aura

$$(A.)\quad S_m = m\,a_m + (m-1)\,a_{m-1}(a_1) + (m-2)\,a_{m-2}(a_2 + a_1(a_1)) +$$
$$(m-3)\,a_{m-3}[a_3 + a_2 a_1 + a_1(a_2 + a_1(a_1))] \ldots . + (m-t)\,a_{m-t}A_t + \text{etc.};$$

dans laquelle la loi de la formation des termes est manifeste, car le coefficient A_t se forme en changeant m en t dans tous les termes qui précèdent $(m-t)\,a_{m-t}A_t$, et en égalant à l'unité (dans tous ces mêmes termes) les coefficiens numériques m, $m-1$, $m-2$, etc.

Pour appliquer cette formule avec succès dans les cas particuliers, il faut que les coefficiens a_1, a_2, a_3, etc. soient donnés en fonction des exposans des puissances de x qu'ils multiplient dans l'équation $X_1 = 0$. Cela est nécessaire surtout pour savoir *à priori* quels sont les termes de cette expression qui doivent s'évanouir, lorsque m étant plus grand que n, on aurait des termes de la forme a_m, a_{m-1}, etc. qui manquent tous dans l'équation $X_1 = 0$. Ainsi par exemple dans l'équation $X = 0$, il est clair que pour avoir la valeur de P_m, il faut exprimer la condition que les coefficiens de $X = 0$ sont tous égaux à l'unité, mais qu'il n'y en a que n: c'est-à-dire (si on compare les deux équations $X = 0$, $X_1 = 0$), que

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots . = a_n = -1;$$

et que

$$a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} \ldots . = 0,$$

Maintenant si l'on fait en général

$$a_p = -\frac{1}{1+0^{n+1-p}},$$

on voit que cette valeur satisfera aux conditions énoncés précédemment, car on aura

$$a_p = -\frac{1}{1+0^{n+1-p}} = -1,$$

(tant que $n > p$, ou même lorsque $n = p$) et

$$a_p = -\frac{1}{1+0^{n+1-p}} = 0,$$

lorsque $n < p$.

Il résulte de là que

$$(B.)\quad 1+P_m = 1 - m\cdot\frac{1}{1+0^{n+1-m}} - (m-1)\cdot\frac{1}{1+0^{n+1-m+1}}\left(\frac{-1}{1+0^{n+1-1}}\right)$$
$$-(m-2)\cdot\frac{1}{1+0^{n+1-m+2}}\left(\frac{-1}{1+0^{n+1-2}} - \frac{1}{1+0^{n+1-1}}\left(\frac{-1}{1+0^{n+1-1}}\right)\right)\ldots .$$
$$\ldots . -(m-t)\cdot\frac{1}{1+0^{n+1-m+t}}\left(\frac{-1}{1+0^{n+1-t}} - \frac{1}{1+0^{n+1-t+1}}\left(\frac{-1}{1+0^{n+1-1}}\right) - \text{etc.}\right)$$
$$\ldots . - \text{etc.}$$

et le second membre de cette équation sera égal à zéro où à n, selon que $\frac{m}{n}$ sera une fraction irréductible, ou un nombre entier.

Ce second membre est évidemment une fonction de m et de n; si on le représente, pour abréger, par $f(m, n)$, il est clair que la somme des diviseurs de m compris dans la série des nombres

$$a,\ a+1,\ a+2,\ \ldots.\ a+b,$$

sera donnée par la suite

$$F(m,a)+F(m,a+1)+F(m,a+2)\ldots.+F(m,a+b)=\sum_{x=a}^{x=a+b+1}F(m,x).$$

Cette suite contient $b+1$ séries semblables entre elles et peut s'écrire de cette manière:

$$\left.\begin{array}{l}
1-m.\frac{1}{1+0^{a+k-m}}-(m-1).\frac{1}{1+0^{a+k-m+1}}\left(\frac{-1}{1+0^{a+k-1}}\right)-\text{etc.}\\
+1-m.\frac{1}{1+0^{a+1+k-m}}-(m-1).\frac{1}{1+0^{a+1+k-m+1}}\left(\frac{-1}{1+0^{a+1+k-1}}\right)-\text{etc.}\\
\cdot\ \cdot\\
+1-m.\frac{1}{1+0^{a+b+k-m}}-(m-1).\frac{1}{1+0^{a+b+k-m+1}}\left(\frac{-1}{1+0^{a+b+k-1}}\right)-\text{etc.}
\end{array}\right\}$$

en substituant les valeurs de $F(m, a)$, $F(m, a+1)\ldots.$ etc. en nombres. Cette dernière formule qui, quant à la forme, a quelque rapport avec l'expression de **Laplace** pour les nombres de **Bernoulli**, sert à exprimer en nombres et en termes finis, la somme des diviseurs d'un nombre quelconque qui sont compris entre deux limites données; transcendante numérique qu'on n'avait pu, jusqu'à présent, représenter d'aucune manière en termes finis. Il est clair que si au lieu de la *somme*, on cherche le *nombre* des diviseurs de m compris dans la suite

$$a,\ a+1,\ \ldots.\ a+b,$$

on aura l'expression

$$\frac{1}{a}F(m,a)+\frac{1}{a+1}F(m,a+1)\ldots.+\frac{1}{a+b}F(m,a+b)=\sum_{x=a}^{x=a+b+1}\frac{1}{x}F(m,x),$$

qu'on pourra réduire en nombres en substituant les valeurs de $F(m, a)$, $F(m, a+1)$ etc., que nous avons déjà trouvées.

Pour obtenir la somme des diviseurs du nombre entier m, qui ne surpassent pas r, on fera $a=0$, $b=r$, dans la formule $(B.)$: maintenant si on appelle $f_r(m)$ cette somme des diviseurs de m qui ne surpassent pas r, on sait que le problème de la partition des nombres peut se ramener à la détermination de $f_r(m)$. Car si l'on désigne en général par $M_r(y)$

le nombre de fois que le nombre entier y peut résulter de la somme de s termes de la série des nombres naturels

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \text{etc.}$$

et si l'on fait, pour abréger, $y-\quad=u$, on aura:

$$(C.)\quad M_s(y)=\frac{f_s(u)}{u}+\frac{f_s(u-1)}{u}\frac{f_s(1)}{1}+\frac{f_s(u-2)}{u}\left(\frac{f_s(2)+f_s(1)f_s(1)}{2}\right)+\text{etc.};$$

et comme $f_s(u)$ peut toujours s'exprimer en nombres en termes finis, en fesant $a=0$, $b=s$ dans la formule $(C.)$; le second membre de l'équation précédente sera tout connu, et on aura, par conséquent, l'expression générale de $M_s(y)$: ce qui résout généralement le problème de la partition des nombres, qu'on ne savait résoudre jusqu'à présent que dans les cas particuliers, lorsque y et s étaient donnés en nombres.

On sait, par le théorème de **Wilson**, que le produit

$$1.2.3.4\ldots(x-1)+1=f(x),$$

sera divisible par x lorsque x est nombre premier; et que cette division ne pourra pas s'effectuer dans le cas contraire. Il résulte de là que si l'on fait $m=f(x)$, $n=x$, dans la formule $(B.)$, on aura:

$$1-f(x).\frac{1}{1+0^{x+1-f(x)}}-(f(x)-1).\frac{1}{1+0^{x+1-f(x)+1}}\left(\frac{-1}{1+0^{x+1-1}}\right)$$
$$-(f(x)-2).\frac{1}{1+0^{x+1-f(x)+2}}\left(\frac{-1}{1+0^{x+1-2}}-\frac{1}{1+0^{x+1-1}}\left(\frac{-1}{1+0^{x+1-1}}\right)\right)-\text{etc.},$$

et cette expression aura pour valeur x, ou *zéro*, selon que $\frac{f(x)}{x}$ est un nombre entier ou fractionnaire; ou bien (ce qui est la même chose) selon que x est un nombre premier, ou un nombre composé. Il résulte de là, que la somme des nombres premiers contenus dans la suite de nombres

$$a,\ a+1,\ a+2,\ \ldots\ a+b,$$

sera donnée par la formule:

$$\left.\begin{array}{l}
1-f(a).\frac{1}{1+0^{a+1-f(a)}}-(f(a)-1).\frac{1}{1+0^{a+1-f(a)+1}}\left(\frac{-1}{1+0^{a+1-1}}\right)-\text{etc.}\\
+1-f(a+1).\frac{1}{1+0^{a+1+1-f(a+1)}}-(f(a+1)-1).\frac{1}{1+0^{a+1+1-f(a+1)+1}}\left(\frac{-1}{1+0^{a+1+1-1}}\right)-\text{etc.}\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
+1-f(a+b).\frac{1}{1+0^{a+b+1-f(a+b)}}-(f(a+b)-1).\frac{1}{1+0^{a+b+1-f(a+b)+1}}\left(\frac{-1}{1+0^{a+b+1-1}}\right)-\text{etc.}
\end{array}\right\}(D.)$$

qui est composée d'un nombre fini de termes; car chaque série partielle s'arrête nécessairement après un certain nombre de termes: puisque dans la formule $(A.)$ on s'arrête dès qu'on trouve un coefficient extérieur égal

à zéro. Au reste il serait aisé de trouver une fonction discontinue telle, qu'elle exprimât la somme des nombres premiers, compris dans la suite

$$a,\ a+1,\ a+2,\ \ldots.\ a+b,$$

sans qu'il fût nécessaire d'y ajouter aucune condition: on n'aurait, pour cela, qu'à faire

$$a_p = -\left(\frac{1}{1+0^{n+1-p}}\right)\left(\frac{1}{1+0^{p+1}}\right),$$

au lieu de

$$a_p = -\frac{1}{1+0^{n+1-p}},$$

dans la formule (A.).

Si on voulait seulement le *nombre* des nombres premiers compris dans la série

$$a,\ a+1,\ a+2,\ \ldots.\ a+b;$$

on obtiendrait ce *nombre* en divisant par a la première ligne de la formule (D.); par $a+1$ la seconde, par $a+2$ la troisième: et enfin par $a+b$ la dernière.

Si l'on exprime par R_m la somme des puissances m^{mes} des racines de l'équation

$$x^n - y = 0,$$

il est clair qu'on aura $R_m = n y^{\frac{m}{n}}$, ou $R_m = 0$, selon que $\frac{m}{n}$ est un nombre entier ou une fraction irréductible. Il résulte de là que si l'on fait le produit

$$(x^m - y)(x^{m-1} - y)(x^{m-2} - y) \ldots. (x^2 - y)(x - y) = X_1 = 0,$$

et qu'on appelle T_m la somme des puissances m^{mes} des racines de l'équation $X_1 = 0$, on aura

$$T_m = y^m + \frac{m}{\alpha} y^\alpha + \frac{m}{\beta} y^\beta + \frac{m}{\gamma} y^\gamma + \ldots. + m y,$$

et les nombres α, β, γ, ... etc., seront tous les diviseurs de m.

Maintenant si on veut trouver un nombre premier plus grand que le nombre p, on fera (dans la valeur précédente de T_m) $m = 1.2.3\ldots$ $\ldots p+1$; et il est évident que le moindre des nombres α, β, γ .... etc. (autre que l'unité) sera un nombre premier plus grand que p.

En effectuant le produit, on trouve $\left(\text{en posant } \frac{m(m+1)}{2} = s\right)$

$$\begin{aligned} X_1 &= (x^m - y)(x^{m-1} - y) \ldots. (x - y) \\ &= x^s - y x^{s-1} - y x^{s-2} - (y - y^2) x^{s-3} - (y - y^2) x^{s-4} - (y - 2y^2) x^{s-5} - \text{etc.} \\ &= x^s - a_1 x^{s-1} - a_2 x^{s-2} - a_3 x^{s-3} - a_4 x^{s-4} - a_5 y^{s-5} - \text{etc.} = 0; \end{aligned}$$

et si on représente, comme nous l'avons déjà fait, par $M_t(q)$ le nombre de fois que le nombre q peut être formé par l'addition de t termes différens pris dans la série

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots.\ q,$$

on aura en général:

$$a_r = y M_1(r) - y^2 M_2(r) + y^3 M_3(r) \ldots. \pm y^r M_r(r);$$

et en substituant successivement les valeurs de a_1, a_2, a_3, etc. dans l'expression (A.), on trouvera généralement la valeur de T_m, et par suite on aura le plus petit des exposans α, β, γ, ... etc., qui sera un nombre entier plus grand que p.

Si l'on fait $y=1$, dans la valeur de $X_1=0$, on obtiendra (comme Euler l'a démontré):

$$(x-y)(x^2-y)\ldots.(x^m-y) = (x-1)(x^2-1)(x^3-1)\ldots.(x^m-1)$$
$$= x^s - x^{s-1} - x^{s-2} + x^{s-5} + x^{s-7} \ldots. \pm x^{\frac{3s^2 \pm s}{2}} \ldots. \text{etc.} = 0,$$

et partant:

$$M_r(r) - M_{r-1}(r-1) + M_{r-2}(r-2) \ldots. \pm M_1(r) = \pm 1, \text{ ou bien } = 0,$$

selon que r est ou n'est pas de la forme $\frac{3r^2 \pm r}{2}$. On voit dont que le problème de la *partition des nombres* peut se réduire assez simplement à une suite récurrente.

La méthode que nous venons d'exposer, conduit nécessairement à trouver un nombre premier plus grand qu'une limite donnée; mais cependant elle n'indique pas *a priori*, quel est le plus petit des diviseurs α, β, γ, etc.; et elle n'est pas, par conséquent, une formule générale. Car il faut réduire la valeur de T_m en nombres pour connaître quel est le plus petit des nombres α, β, γ, etc.; et par suite le nombre premier cherché, plus grand que p. Cependant, on peut trouver une formule générale de cette espèce, car si on fait, pour abréger, $1.2.3\ldots.p+1=m$, et qu'on exprime en général par e_n, la série

$$1 - m.\frac{1}{1+0^{n+1-m}} - (m-1).\frac{1}{1+0^{n+1-m+1}}\left(\frac{-1}{1+0^{n+1-1}}\right)$$
$$-(m-2).\frac{1}{1+0^{n+1-m+2}}\left(\frac{-1}{1+0^{n+1-2}} - \frac{1}{1+0^{n+1-1}}\left(\frac{-1}{1+0^{n+1-1}}\right)\right) - \text{etc.}$$

(que nous avons déjà démontré être égale à n ou à *zéro* selon que $\frac{m}{n}$ est ou n'est pas un nombre entier), il est clair que

$$e_1,\ e_2,\ e_3,\ \ldots.\ e_m$$

exprimeront tous les diviseurs de m. Partant si l'on suppose que e_1 est le plus petit de ces diviseurs, il n'y aura que ce nombre là qui rendra positives toutes les différences

$$e_2-e_1,\quad e_3-e_1,\quad e_4-e_1,\quad \ldots\ldots\quad e_m-e_1;$$

car si e_1 n'était pas le plus petit des nombres e_1, e_2, e_3, ..., e_m, dans la suite des différences précédentes, il y aurait au moins une valeur négative. Il résulte de là que la fraction

$$\frac{1}{0^{\frac{1}{2}+e_2-e_1}+0^{\frac{1}{2}+e_3-e_1}+0^{\frac{1}{2}+e_4-e_1}\ldots\ldots+0^{\frac{1}{2}+e_m-e_1}+0^{e_1-1-\frac{1}{2}}+1}$$

se réduira dans le dénominateur à l'unité lorsque e est plus petit que tous les autres termes e_2, e_3, etc.; mais qu'elle aura au dénominateur au moins une valeur infinie dans le cas contraire; ce qui fera évanouir la fraction. Le terme $0^{e_1-1-\frac{1}{2}}$ a été introduit pour éviter les valeurs de $e_1=1$, $e_1=0$; car ce terme devient infini dans ces deux cas, et fait évanouir la fraction.

Si l'on fait maintenant toutes les combinaisons possibles, on trouvera la formule:

$$\begin{aligned}
&\frac{e_1}{0^{\frac{1}{2}+e_2-e_1}+0^{\frac{1}{2}+e_3-e_1}\ldots\ldots+0^{\frac{1}{2}+e_m-e_1}+0^{e_1-1-\frac{1}{2}}+1}\\
+&\frac{e_2}{0^{\frac{1}{2}+e_1-e_2}+0^{\frac{1}{2}+e_3-e_2}\ldots\ldots+0^{\frac{1}{2}+e_m-e_2}+0^{e_2-1-\frac{1}{2}}+1}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
+&\frac{e_m}{0^{\frac{1}{2}+e_1-e_m}+0^{\frac{1}{2}+e_2-e_m}\ldots\ldots+0^{\frac{1}{2}+e_{m-1}-e_m}+0^{e_m-1-\frac{1}{2}}+1}
\end{aligned}$$

qui aura toujours pour valeur numérique e_1, en supposant que e_1 est le plus petit des diviseurs de m (autres que l'unité): e_1 sera toujours un nombre premier plus grand que p.

La formule que nous venons de trouver peut toujours se reduire généralement en nombres en termes finis; elle ne contient que les valeurs de p et des nombres inférieurs à p; les quantités e_1, e_2, e_3, ... e_m, sont connues et peuvent s'exprimer en nombres; nous les avons introduites dans notre formule pour en abréger et simplifier l'écriture.

27.

Über eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raume.

(Von Herrn *A. F. Moebius*, Professor in Leipzig.)

Zu den vorliegenden geometrischen Untersuchungen bin ich zunächst durch einige, bei Beschäftigung mit der Statik erhaltene, an sich sehr einfache Resultate veranlafst worden. Ich fand nemlich, dafs von den zwei Kräften, auf welche ein System von Kräften im Raume immer reducirbar ist, und welche im Allgemeinen nicht in einer und derselben Ebene liegen, die Richtung der einen nach Willkühr genommen werden kann, dafs ferner, wenn die Richtung der einen Kraft durch einen gegebenen Punct geht, die Richtung in einer mit dem Puncte bestimmten und ihn enthaltenden Ebene liegen mufs, und dafs umgekehrt, wenn die eine Richtung in einer gegebenen Ebene enthalten ist, die andere einen mit der Ebene gegebenen und in ihr begriffenen Punct trifft. Auf diese Weise entspricht also in Bezug auf ein System von Kräften jedem Puncte des Raumes eine gewisse Ebene, jeder Ebene ein Punct, und jeder Geraden, als der Richtung der einen von zwei mit dem System gleichwirkenden Kräften, eine andere Gerade, als die Richtung der andern Kraft; und es entstehen somit zwischen allen Theilen des Raumes duale Verhältnisse, die im Allgemeinen von derselben Beschaffenheit sind, als die in neuern Zeiten schon öfter behandelten Dualitätsverhältnisse der Figuren, nur dafs hier die beschränkende Bedingung hinzukommt, dafs die einem Puncte entsprechende Ebene durch ihn selbst geht, und dafs in jeder Ebene der ihr entsprechende Punct selbst liegt.

Ich habe nun diese Verhältnisse, abgesehen von ihrem statischen Ursprunge, rein geometrisch zu behandeln gesucht, und theile, was ich gefunden, jetzt mit, in der Hoffnung, dafs mehrere aus jener speciellen Voraussetzung hervorgehende Beziehungen nicht ohne Interesse sein werden. Insbesondere dürfte die hier gegebene Construction von Polyëdern, die zugleich in und um einander beschrieben sind, so wie das System von Linien, deren jede sich selbst zur entsprechenden hat, und welche bei einem System von Kräften die Axen sind, für welche die Momenten-

summe der Kräfte Null ist, einige Aufmerksamkeit verdienen. Zum Schlusse habe ich noch den Zusammenhang erörtert, der zwischen diesen Dualitätsverhältnissen und statischen Sätzen obwaltet.

---

1. Seien x, y, z und x', y', z' die recht- oder schiefwinkligen Coordiaten zweier Puncte P und P', und diese sechs Gröfsen durch eine einzige Gleichung,

$$V = 0,$$

mit einander verbunden. Giebt man alsdann den Coordinaten x, y, z oder x', y', z' bestimmte Werthe, so wird $V = 0$ eine Gleichung zwischen nur noch drei Unbestimmten x', y', z' oder x, y, z. Die beiden Puncte werden daher durch die Gleichung in eine solche Abhängigkeit von einander gebracht, dafs, wenn der Ort des einen P oder P' bestimmt ist, der andere P' oder P in einer damit gegebenen Fläche liegt.

2. Werde nun verlangt, dafs die Fläche, in welcher P' für einen bestimmten Ort von P liegt, stets eine Ebene sei, wo auch P angenommen werde. Zu diesem Ende mufs V von der Form sein:

$$Lx' + My' + Nz' + O,$$

wo L, M, N, O beliebige Functionen von x, y, z sind; und nach der Beschaffenheit dieser Functionen richtet sich die Natur der Fläche, in welcher für einen willkürlich gegebenen Ort von P' der Punct P begriffen ist. Soll daher auch letztere Flache stets eine Ebene sein, so müssen L, M, N, O lineäre Functionen von x, y, z, und daher die Gleichung $V = 0$ von der Form sein:

$$(A.)\quad (ax + by + cz + d)x' + (a'x + b'y + c'z + d')y' + (a''x + b''y + c''z + d'')z' + a'''x + b'''y + c'''z + d''' = 0.$$

Die Constanten a, b, c, d, a', ... d''' als gegeben angenommen, entspricht alsdann jedem Puncte P ein Ebene p', als der geometrische Ort des Punctes P', und jedem P' eine Ebene p, als der Ort von P. Ist ferner eine lineäre Gleichung zwischen x', y', z', als Gleichung der Ebene p', gegeben, und setzt man die Coefficienten dieser Gleichung den Coefficienten derselben Coordinaten in $(A.)$ proportional, so erhält man drei lineäre Gleichungen zwischen x, y, z, aus denen sich letztere Coordinaten, und damit der Punct P bestimmen lassen. Mithin gehört auch umgekehrt jedem Puncte P' irgend einer gegebenen Ebene p' einer und der-

selbe Punct P, so wie jedem Puncte P einer Ebene p einer und derselbe Punct P' zu.

Hiernach hat man also zwei Systeme von Puncten und Ebenen, — das eine, dessen Coordinaten mit x, y, z bezeichnet worden, und welches S heifse, das andere, S', mit den Coordinaten x', y', z', — und diese zwei Systeme stehen in einer solchen gegenseitigen Beziehung, daſs jedem Puncte P und jeder Ebene p des einen eine Ebene p' und ein Punct P' des andern entspricht.

Der Kürze wegen wollen wir die einem Puncte entsprechende Ebene die Gegenebene des Punctes, und den einer Ebene entsprechenden Punct den Gegenpunct der Ebene nennen.

3. Zwischen einem Puncte und seiner Gegenebene, oder einer Ebene und ihrem Gegenpuncte findet demnach immer die Beziehung Statt, dafs die Coordinaten dieses Punctes und die Coordinaten irgend eines Punctes der Ebene der Gleichung (A.) Genüge leisten. Und umgekehrt: Hat man zwei Puncte, durch deren Coordinaten die Gleichung erfüllt wird, so liegt jeder von ihnen in der Gegenebene des andern.

Ist folglich P ein Punct in der Gegenebene von P', so wird durch die Coordinaten von P und P' die Gleichung (A.) erfüllt, und es ist auch P' ein Punct in der Gegenebene von P; oder mit andern Worten: Hat man eine Ebene p und einen darin liegenden Punct R, so liegt auch der Gegenpunct P' der erstern in der Gegenebene p' des letztern.

Liegen daher vier oder mehrere Puncte in einer Ebene, so müssen die Gegenebenen der Puncte den Gegenpunct der Ebene in sich enthalten, und sich daher in diesem Puncte gemeinschaftlich schneiden. Und umgekehrt: Schneiden sich vier oder mehrere Ebenen in einem Puncte, so liegen die Gegenpuncte der Ebenen in einer Ebene, nemlich in der Gegenebene des Punctes.

Wir schliefsen hieraus weiter: Sind mehrere Puncte R, S, T, ... zweien Ebenen p, q gemeinsam, liegen sie also in der Durchschnittslinie der beiden Ebenen, so muſs auch die Gegenebene jedes der Puncte sowohl den Gegenpunct P' der Ebene p, als den Q' der Ebene q, mithin die Linie $P'Q'$, enthalten, d. h., liegen drei oder mehrere Puncte in einer Geraden, so schneiden sich die Gegenebenen der Puncte ebenfalls in einer Geraden. Auf ähnliche Art wird der umgekehrte Satz bewiesen, daſs von

drei oder mehreren sich in einer Linie schneidenden Ebenen die Gegenpuncte gleichfalls in einer Geraden enthalten sind.

So wie also jeder Punct seine Gegenebene, und jede Ebene ihren Gegenpunct hat, so entspricht auch jeder geraden Linie eine Gegenlinie dergestalt, daſs eines jeden in der einen Linie genommenen Punctes Gegenebene die andere Linie in sich enthält, und einer jeden durch die eine Linie gelegten Ebene Gegenpunct in der andern sich findet.

4. Ohne uns mit weiterer Entwickelung dieser zudem schon mehrfach behandelten reciproken Verhältnisse aufzuhalten, wollen wir jetzt zwischen den beiden Systemen die specielle Beziehung annehmen, daſs jeder Punct P' des Systems S' in seiner dem System S angehörigen Gegenebene p selbst enthalten ist, daſs also die Gleichung $(A.)$, da sie als Gleichung der Ebene p angesehen werden kann, auch dann noch besteht, wenn man $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$ setzt. Dies giebt aber:

$$ax'^2+b'y'^2+c''z'^2+(b''+c')y'z'+(c+a'')z'x'+(a'+b)x'y'+(d+a''')x' \\ +(d'+b''')y'+(d''+c''')z'+d'''=0;$$

und da diese Gleichung für jede beliebige Annahme des Punctes P' oder (x', y', z') Gültigkeit haben soll, so muſs seyn:

$$a=0,\quad b'=0,\quad c''=0,\quad c'=-b'',\quad a''=-c,\quad b=-a', \\ a'''=-d,\quad b'''=-d',\quad c'''=-d'',\quad d'''=0.$$

Hiermit zieht sich die Gleichung $(A.)$ zusammen in:

$$(-a'y+cz+d)x'+(a'x-b''z+d')y'+(-cx+b''y+d'')z' \\ -dx-d'y-d''z=0,$$

oder wenn wir, mehrerer Einfachheit willen, statt der Coefficienten b'', c, a', d, d', d'' von jetzt an a, b, c, f, g, h schreiben:

$$(B.)\quad (bz-cy+f)x'+(cx-az+g)y'+(ay-bx+h)z'-fx-gy-hz=0.$$

Da, wie man leicht wahrnimmt, diese Gleichung ungeändert bleibt, wenn x, y, z mit x', y', z' gegenseitig vertauscht werden, so liegt nunmehr nicht allein, wie verlangt wurde, jeder Punct P' des Systems S' in seiner dem System S angehörigen Gegenebene p, sondern auch jeder Punct P des letztern Systems in seiner Gegenebene p' des erstern. Aus demselben Grunde erhellet ferner, daſs von zwei zusammenfallenden Puncten P und P' des einen und andern Systems auch die Gegenebenen zusammenfallen, wogegen im Vorigen dem Puncte (p, q, r), wenn er, als

dem System S' angehörig betrachtet wurde, eine Gegenebene zukam, deren Gleichung

$$(ax+by+\ldots.)p+(a'x+b'y+\ldots.)q+\ldots.=0$$

war, und demselben Puncte, als einem Puncte des Systems S, eine Gegenebene entsprach, deren Gleichung

$$(ax'+a'y'+\ldots.)p+(bx'+b'y'+\ldots.)q+\ldots.=0.$$

Durch die Gleichung (B.) sind demnach alle Puncte und Ebenen des Raumes in eine solche gegenseitige Beziehung gesetzt, dafs je ein Punct und eine Ebene zusammengehören, und ersterer in letzterer enthalten ist. Aller Unterschied zwischen den beiden Systemen S und S' ist daher jetzt als gänzlich aufgehoben anzusehen.

5. Nichts desto weniger aber werden die bei der allgemeinen Betrachtung in No. 3. gefundenen Sätze auch jetzt noch gültig bleiben. Ist daher p eine Ebene, und Q irgend ein in ihr liegender Punct, so ist auch der Gegenpunct P' von p in der Gegenebene q' von Q enthalten; und da jetzt P' in p, und Q in q' selbst liegt, so liegen P' und Q in dem gegenseitigen Durchschnitte von p und q', und wir können den Satz auch folgendergestalt ausdrücken:

I. Wenn von zwei sich schneidenden Ebenen der Gegenpunct der einen in der Durchschnittslinie liegt, so ist darin auch der Gegenpunct der andern begriffen; und wenn von zwei Puncten die Gegenebene des einen den andern Punct trifft, so enthält auch die Gegenebene des andern den erstern Punct.

Hieraus folgern wir eben so, wie vorhin, weiter:

II. Von mehreren in einer Ebene liegenden Puncten schneiden sich die Gegenebenen in einem Puncte, welcher in ersterer Ebene liegt und ihr Gegenpunct ist.

III. Von mehreren sich in einem Puncte schneidenden Ebenen liegen die Gegenpuncte in einer Ebene, welche ersteren Punct enthält und seine Gegenebene ist.

IV. Alle geraden Linien des Raumes lassen sich paarweise als Linien und Gegenlinien zusammennehmen, und jedes dieser Paare besitzt der Eigenschaft, dafs von allen in der einen Linie genommenen Puncten die Gegenebenen die andere Linie in sich enthalten, dafs also jeder Punct der einen Linie die durch ihn und die andere Linie gelegte Ebene zu seiner Gegenebene hat, und dafs eben so umge-

kehrt der Gegenpunct einer jeden durch die eine Linie gelegten Ebene der Durchschnitt der Ebene mit der andern Linie ist.

V. Eine durch zwei Puncte gezogene Gerade hat daher den Durchschnitt der Gegenebenen der Puncte zur Gegenlinie, und von der Durchschnittslinie zweier Ebenen ist die Linie, welche die Gegenpuncte der Ebenen verbindet, die Gegenlinie.

Eine unmittelbare Folgerung aus diesen Eigenschaften der Gegenlinien ist noch:

VI. Von mehreren in einer Ebene liegenden Geraden schneiden sich die Gegenlinien in einem Puncte der Ebene, nemlich im Gegenpuncte der letzteren; und von mehreren in einem Puncte zusammentreffenden Geraden sind die Gegenlinien in einer durch den Punct gehenden Ebene, in der Gegenebene des Punctes, enthalten.

6. Um uns diese Sätze durch ein Beispiel noch deutlicher zu machen, wollen wir die Gegenpuncte der drei Coordinatenebenen zu bestimmen suchen.

Die Gleichung zwischen x', y', z' für die Ebene der y, z ist: $x'=0$, was auch y' und z' für Werthe haben mögen. Hiernach müssen in (*B.*) die Coefficienten von y' und z', und die Summe der mit x', y', z' nicht behafteten Glieder Null sein; also:

$$cx - az + g = 0,$$
$$ay - bx + h = 0,$$
$$fx + gy + hz = 0.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen resp. mit h, $-g$, a und addirt sie, so kommt: $(af+bg+ch)x=0$, also

$$x=0, \text{ und daher } y=-\frac{h}{a},\ z=\frac{g}{a},$$

Dies sind demnach die drei Coordinaten des Gegenpunctes der Ebene der y, z. Wir wollen ihn A nennen; wegen $x=0$ liegt er, wie gehörig, in der Ebene selbst.

Auf gleiche Art ergeben sich die Coordinaten des Gegenpunctes B der Ebene der z, x:

$$x=\frac{h}{b},\ y=0,\ z=-\frac{f}{b},$$

und des Gegenpunctes C der Ebene der x, y:

$$x=-\frac{g}{c},\ y=\frac{f}{c},\ z=0,$$

von denen B in der Ebene der z, x; C in der Ebene der x, y enthalten ist. Sämmtliche drei Puncte aber liegen in der Ebene, welcher die Gleichung

$$fx + gy + hz = 0$$

zukommt. Diese Ebene ist nach III. die Gegenebene des Punctes, in welchem sich die drei Coordinatenebenen schneiden, also des Anfangspunctes M der Coordinaten. Auch reducirt sich in der That, für $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$, die Gleichung (B.) auf $fx + gy + hz = 0$.

Endlich sind von den Axen der x, y, z resp. die Linien BC, CA, AB die Gegenlinien.

7. Die wenigen bis jetzt erhaltenen Resultate reichen hin, um ein System auf besagte Weise sich entsprechender Puncte und Ebenen ohne weitere Hülfe des Calculs construiren zu können. Da nemlich die Winkel, welche die Coordinatenebenen mit einander machen, ganz willkürlich sind, so lege man durch einen Punct M (Taf. V. Fig. 3.) nach Belieben drei Ebenen α, β, γ, als Coordinatenebenen. In α und β nehme man willkürlich zwei Puncte A und B, welches die Gegenpuncte dieser Ebenen seien. Durch die Lage von A sind die Verhältnisse $h:a$, $g:a$, und durch B die Verhältnisse $h:b$, $f:b$, also durch beide Puncte die Verhältnisse zwischen f, g, h, a, b bestimmt.

Man lege durch A, B, M eine neue Ebene μ; sie ist die Gegenebene von M, und enthält in ihrem Durchschnitte mit der Ebene γ den Gegenpunct von γ. Man nehme daher in diesem Durchschnitte von μ mit γ beliebig einen Punct C, als Gegenpunct von γ. Mit ihm ist noch das Verhältnifs gegeben, in welchem c zu f oder g steht; und da somit die Verhältnisse zwischen allen sechs in der Gleichung (B.) vorkommenden Constanten bestimmt sind, so mufs es möglich sein, auch für jeden andern Punct D seine Gegenebene δ, und für jede Ebene δ ihren Gegenpunct D zu bestimmen.

8. *a*. Liege der gegebene Punct D, dessen Gegenebene gesucht werden soll, zuerst in dem Durchschnitte der Ebenen β und γ, oder in $\beta\gamma$, wenn wir, der Kürze willen, den Durchschnitt zweier Ebenen durch Nebeneinanderstellung der die Ebenen bezeichnenden Buchstaben ausdrücken. Da von β und γ die Gegenpuncte resp. B und C sind, so ist nach V. von der Linie $\beta\gamma$ die Gegenlinie BC, und folglich nach IV. von D die Gegenebene BCD. Auf gleiche Art ist CAD oder ABD die Gegenebene von D, wenn D in $\gamma\alpha$ oder $\alpha\beta$ sich befindet.

b. Eben so erhellet, dafs, wenn der Punct D in einer der drei Linien BC, CA, AB liegt, seine Gegenebene durch ihn und resp. durch $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ gelegt werden mufs.

c. Sei jetzt der Punct D willkürlich genommen. Man lege durch ihn und durch die drei Linien BC, CA, AB die Ebenen BCD, CAD, ABD, welche die Linien $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ resp. in A', B', C' schneiden, so sind dies die Gegenpuncte jener drei sich in D schneidenden Ebenen (IV.), und folglich (III.) A', B', C' mit D in einer Ebene, welche die Gegenebene von D, und daher die gesuchte δ ist.

Da D selbst in δ liegt, so hätten zur Bestimmung von δ schon zwei der drei Puncte A', B', C' hingereicht. Dafs auch der dritte in δ mit enthalten ist, führt uns zu einer merkwürdigen Eigenschaft unserer Figur. Diese besteht, wenn wir sie etwas aufmerksamer betrachten, aus zwei Tetraëdern $A'B'C'M$ und $ABCD$. Das erstere ist von den vier Flächen α, β, γ, δ begränzt und um das andere umschrieben, weil α, β, γ, δ resp. die Puncte A, B, C, D, als ihre Gegenpuncte, enthalten. Zugleich aber ist es in das andere eingeschrieben, weil A', B', C', M die Gegenpuncte der Flächen BCD, CAD, ABD, ABC des andern sind. Hiermit haben wir also zwei Tetraëder, deren jedes in das andere zugleich um- und eingeschrieben ist, und wir können nun die vorhin gedachte Eigenschaft folgendergestalt in Worte fassen:

> Wenn von zwei Tetraëdern $A'B'C'M$ und $ABCD$ die vier Ecken A', B', C', M des einen in den vier Flächen BCD, CDA, DAB, ABC des andern, und drei Ecken, A, B, C des andern in den Flächen $B'C'M$, $C'MA'$, $MA'B'$ des erstern liegen, so liegt auch die vierte Ecke D des andern in der vierten Fläche $A'B'C'$ des erstern, und das eine Tetraëder ist in Bezug auf das andere zugleich um- und eingeschrieben.

d. Die Gegenebene von D kann auch dergestalt gefunden werden, dafs man durch D und die Linien $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ drei Ebenen $D\beta\gamma$, $D\gamma\alpha$, $D\alpha\beta$ legt. Schneiden diese die Linien BC, CA, AB resp. in A'', B'', C'', so sind dies (IV.) die Gegenpuncte der 3 Ebenen, und die durch A'', B'', C'', D zu legende Ebene wird (III.) gleichfalls die Gegenebene von D sein.

Man bemerke indessen, dafs, da die 3 Ebenen α, β, γ den Punct M gemeinschaftlich haben, und sich daher die 3 Ebenen $D\beta\gamma$, $D\gamma\alpha$, $D\alpha\beta$ in der Geraden DM schneiden, die Gegenpuncte A'', B'', C'' der letztern

Ebenen gleichfalls in einer Geraden, in der Gegenlinie von DM, liegen. Durch diese drei Puncte allein wird daher noch nicht die Gegenebene von D bestimmt, wohl aber schon durch irgend zwei derselben und den Punct D selbst. Da übrigens ein Punct nur eine Gegenebene haben kann, so müssen A'', B'', C'' mit A', B', C' in einer Ebene enthalten sein; und da erstere drei Puncte resp. in den Linien BC, CA, AB liegen, so sind sie nichts Anderes, als die Durchschnitte der Seiten des Dreiecks ABC mit der Ebene $A'B'C'$, woraus wiederum hervorgeht, dafs A'', B'', C'' in einer Geraden liegen, nemlich in dem gegenseitigen Durchschnitte der Ebenen ABC und $A'B'C'$.

9. Wir gehen jetzt zu der umgekehrten, aber ganz analog zu lösenden Aufgabe fort: Für eine gegebene Ebene δ den Gegenpunct D zu finden.

a. Wenn die Ebene δ durch eine der sechs Linien BC, CA, AB, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ geführt ist, so liegt ihr Gegenpunct daselbst, wo sie resp. von $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$, BC, CA, AB geschnitten wird.

b. Hat die Ebene δ irgend eine andere Lage, so schneide sie die Linien $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ in den Puncten A', B', C'. Von diesen drei in δ liegenden Puncten sind $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ die Gegenebenen, deren gegenseitiger Durchschnittspunct mithin (II.) ebenfalls in δ liegt und der gesuchte Gegenpunct D von δ ist.

Da δ und die 3 Ebenen $A'BC$, ... sich in D schneiden, so sind schon zwei dieser Ebenen nebst δ hinreichend, um D zu finden. Auch gewahrt man leicht, wie diese Construction gleichfalls zu dem obigen Satze von den in und um einander beschriebenen Tetraëdern hinführt.

c. Noch ein Verfahren, um für eine beliebige Ebene δ den Gegenpunct zu finden, besteht im Folgenden. Schneide δ die Linien BC, CA, AB in den Puncten A'', B'', C''. Man lege durch letztere und durch $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ die Ebenen $A''\beta\gamma$, $B''\gamma\alpha$, $C''\alpha\beta$, so sind dies die Gegenebenen von A'', B'', C'', und schneiden sich daher in einer geraden Linie, weil A'', B'', C'' in einer Geraden, in dem Durchschnitte von δ mit ABC, liegen. Jede dieser beiden Linien ist mithin die Gegenlinie der andern; und da die letztere Gerade in der Ebene δ liegt, so mufs der Durchschnitt der erstern Geraden mit δ der Gegenpunct von δ sein.

10. Dafs und wie zu einem gegebenen Tetraëder ein zweites construirt werden kann, welches in Bezug auf das erste zugleich ein- und

umschrieben ist, habe ich bereits in einem kleinen, im III. Bande dieses Journals, Seite 273 etc., befindlichen Aufsatze gezeigt. Mit Hülfe der eben entwickelten Theorie sieht man aber leicht, wie diese Construction sich verallgemeinern läfst, und wie es möglich ist:

> zu irgend einem gegebenen Polyëder ein anderes zu construiren, welches eben so viel Ecken und Flächen, als das erstere Flächen und Ecken, hat, und dessen Ecken in den Flächen des erstern liegen, dessen Flächen aber die Ecken des erstern in sich enthalten.

Sei, um diese Aufgabe zu lösen, S eine Ecke des gegebenen Polyëders, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ seien die in S in der Ordnung, wie sie aufeinander folgen, zusammenstofsenden Flächen, so dafs α mit β, β mit γ, u. s. w. eine gemeinsame Kante hat. Man suche von $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die Gegenpuncte, welche $A, B, C, \ldots$ heifsen, und construire damit das Vieleck $ABC \ldots$; dieses wird eben sein und in seiner Ebene den Punct S mit enthalten, da $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ im Puncte S zusammentreffen. Auf gleiche Art construire man um jede andere Ecke des Polygons ein Vieleck. Von den Seiten aller dieser Vielecke wird nun jede zweien Vielecken zugleich angehören; die Seite AB des Vielecks $ABC \ldots$, um S z. B., wird auch eine Seite des Vielecks um die Ecke T sein, wenn von der Kante des Polyëders, in welcher die Flächen α und β an einander grenzen, und welche S zum einen Endpunct hat, der andere Endpunct T ist. Alle die somit erhaltenen Vielecksflächen hängen daher als Flächen eines neuen Polyëders zusammen, und dieses zweite Polyëder ist rücksichtlich des erstern zugleich ein- und umschrieben zu nennen: eingeschrieben, weil seine Ecken $A, B, \ldots$ in den Flächen $\alpha, \beta, \ldots$ des erstern liegen; umschrieben, weil seine Flächen $ABC \ldots$, etc. den Ecken S, etc. des erstern begegnen.

Ueberhaupt, sieht man, findet zwischen beiden Polyëdern eine solche gegenseitige Beziehung Statt, dafs die Ecken, Kanten und Flächen des einen die Gegenpuncte, Gegenlinien und Gegenebenen der Flächen, Kanten und Ecken des andern sind. Einem Tetraëder entspricht in dieser Beziehung wiederum ein Tetraëder, einem Hexaëder ein Octaëder, einem Dodekaëder ein Ikosaëder, und umgekehrt, einem Octaëder ein Hexaëder u. s. w.

11. Zur weitern Verfolgung unserer über reciproke Verhältnisse angestellten Untersuchungen wollen wir jetzt von einer mit der Ebene der y, z

parallelen Ebene den Gegenpnnct zu bestimmen suchen. Die Gleichung einer solchen Ebene zwischen den Coordinaten x', y', z' ist: $x'=$ einer constanten Länge l, welches auch die Werthe von y' und z' sein mögen. Die Coefficienten von y' und z' in (B.) müssen daher Null sein; also

$$cx-az+g=0, \qquad ay-bx+h=0,$$

und aufserdem

$$l(bz-cy+f)-fx-gy-hz=0.$$

Aus diesen drei Gleichungen lassen sich die Coordinaten des gesuchten Gegenpunctes bestimmen; es sind dies also die Gleichungen dreier Ebenen, welche sich in dem Gegenpuncte schneiden. Da nur die dritte Gleichung den Abstand l der gegebenen Ebene von der Ebene der y, z enthält, so gehören die zwei ersten Gleichungen auch dem Gegenpuncte jeder andern mit der Ebene der y, z parallelen Ebene an. Die Gegenpuncte aller mit der Ebene der y, z parallelen Ebenen liegen daher in einer geraden Linie, deren Gleichungen

$$cx-az+g=0 \text{ und } ay-bx+h=0$$

sind. Auf gleiche Art sind die Gegenpuncte aller mit der Ebene der z, x parallelen Ebenen in einer Geraden enthalten, deren Gleichungen

$$ay-bx+h=0 \text{ und } bz-cy+f=0$$

sind. Letztere Gerade läuft aber mit der vorigen parallel, da jede von beiden parallel mit der durch den Anfangspunct der Coordinaten gelegten Geraden ist, welcher die Gleichungen

$$cx-az=0, \; ay-bx=0, \text{ also auch } bz-cy=0,$$

oder, was dasselbe ist, die Proportionen

$$x:y:z \;=\; a:b:c$$

zukommen. Da nun die Annahme der Coordinaten ganz der Willkühr überlassen ist, so schliessen wir:

VII. Die Gegenpuncte von drei oder mehreren einander parallelen Ebenen liegen in einer geradeu Linie, und die geraden Linien, in welchen die Gegenpuncte von zwei und also auch mehreren Systemen paralleler Ebenen liegen, sind sämmtlich einander parallel.

So mufs z. B. die Gerade, welche die Gegenpuncte der mit der Ebene der x, y parallelen Ebene verbindet, mit ersteren Parallellinien ebenfalls parallel sein, was auch eine der vorigen ähnliche Rechnung sogleich zu erkennen giebt. Die Gleichungen dieser Geraden sind nemlich

$$bz-cy+f=0 \text{ und } cx-az+g=0.$$

Die allen diesen Parallellinien zukommende Richtung ist demnach bei jedem System von Ebenen und Puncten, die man in die gegenwärtige Beziehung zu einander gesetzt hat, einzig in ihrer Art. Wir wollen sie deshalb die Hauptrichtung des Systems nennen. Sie ist in der Gleichung ($B.$) durch die Verhältnisse zwischen den Coefficienten a, b, c gegeben, Coefficienten, die, wenn das Coordinatensystem ein rechtwinkliges ist, den Cosinussen der Winkel der Hauptrichtung mit den Axen der x, y, z proportional sind.

12. Nehmen wir mit dieser Hauptrichtung die Axe der z parallel an, so werden a und $b=0$, und die Gleichung ($B.$) erhält die einfachere Gestalt:

$$(f-cy)x'+(g+cx)y'+hz'-fx-gy-hz=0.$$

Die Gleichungen für die Gerade, welche durch die Gegenpuncte der mit der Ebene x, y parallelen Ebenen geht, werden damit

$$f-cy=0 \text{ und } g+cx=0.$$

Nehmen wir daher noch diese mit der Axe der z jetzt parallele Gerade zur Axe der z selbst, so werden nächst a und b auch noch f und $g=0$, und die Gleichung ($B.$) gewinnt damit folgende einfachst mögliche Form:

$$(C.) \quad xy'-yx' = k(z'-z),$$

wo k statt des vorigen $-\frac{h}{c}$ gesetzt worden.

Für eine mit der Ebene x, y parallele Ebene, deren Gleichung $z'=n$, hat man hiernach $xy'-yx'=k(n-z)$, und folglich $x=0$, $y=0$, $z=n$, d. h. der Gegenpunct der Ebene ist, wie gehörig, ihr Durchschnitt mit der Axe der z. Ist aber die Ebene, deren Gegenpunct bestimmt werden soll, parallel mit der Ebene der y, z, und daher $x'=l$ ihre Gleichung, so wird: $xy'-ly=k(z'-z)$, oder was dasselbe ist:

$$\frac{x}{y}y'-\frac{k}{y}z'=l-k\frac{z}{y}, \text{ also } \frac{x}{y}=0, \quad \frac{k}{y}=0, \; l-k\frac{z}{y}=0,$$

d. h. y und z müssen unendlich grofs sein und sich wie k zu l verhalten. Der Gegenpunct der Ebene liegt mithin in ihr unendlich entfernt nach einer durch das Verhältnifs $k:l$ bestimmten Richtung. — Ist die gegebene Ebene die Ebene der y, z selbst, also $l=0$, so hat man blofs y unendlich grofs zu nehmen, und der Gegenpunct liegt folglich in unendlicher Entfernung nach der Richtung der Axe der y. Letzteres fliefst übrigens auch schon daraus, dafs in der Axe der y, in welcher sich die Ebenen der y, z und der x, y

schneiden, der Gegenpunct der letztern Ebene, der Anfangspunct der Coordinaten, liegt. Denn nach I. muss dann in derselben Axe auch der Gegenpunct der erstern Ebene enthalten sein. — Auf gleiche Art findet sich der Gegenpunct der Ebene der z, x unendlich entfernt in der Axe der x.

Da nun bei dem jetzigen Coordinatensystem die Axe der z allein eine bestimmte Richtung hat, die Richtungen der beiden andern Axen aber beliebige sein können, so folgern wir:

VIII. Jede mit der Hauptrichtung parallele Ebene hat einen unendlich entfernten Gegenpunct; und, umgekehrt, ist die Gegenebene eines unendlich entfernten Punctes mit der Hauptrichtung parallel.

Denn nimmt man x, y, z, unendlich grofs und in gegebenen Verhältnissen $a:b:c$ stehend an, so wird die Gleichung $(C.)$: $ay'-bx'+kc=0$, und gehört somit einer der Axe der z parallelen Ebene an.

Ziehen wir eine Ebene noch in Betracht, welche parallel mit der Axe der x ist, und daher die Gleichung $z'=ay'+b$ hat. Diesen Werth von z' in $(C.)$ substituirt, erhalten wir

$$xy'-yx' = k(ay'+b-z),$$

und hieraus $x=ak$, $y=0$, $z=b$, als Coordinaten des Gegenpunctes der Ebene. Weil $y=0$, so liegt dieser Punct immer in der Ebene z, x, wie auch die mit der Axe der x parallele Ebene gelegt sein mag. Wegen der Unbestimmtheit der Axe der x ziehen wir hieraus den Schlufs:

IX. Von zwei oder mehreren mit einer und derselben Geraden parallelen Ebenen liegen die Gegenpuncte in einer und derselben mit dieser Geraden und mit der Hauptrichtung des Systems parallelen Ebene.

13. Die jetzt durch Analysis gewonnenen Sätze VII., VIII. und IX. lassen sich aus den früheren Sätzen I. . . . . IV., auch durch einfache geometrische Betrachtungen ableiten.

a. Da nach III. von mehreren Ebenen, welche sich in einem Puncte schneiden, die Gegenpuncte mit dem Durchschnittspuncte in einer Ebene liegen, von welcher letzterer Punct der Gegenpunct ist, und da mehrere sich in Parallelen schneidende Ebenen auch als solche angesehen werden können, die sich in einem unendlich entfernten Puncte schneiden, so müssen die Gegenpuncte mehrerer sich in Parallelen schneidenden Ebenen in einer mit den parallelen Durchschnittslinien ebenfalls parallelen Ebene enthalten sein.

deren Gegenpunct unendlich entfernt nach der durch die Parallelen bestimmten Richtung zu liegt.

b. Da ferner von Ebenen, welche sich in einer und derselben Geraden schneiden, die Gegenpuncte ebenfalls in einer Geraden liegen (IV.), so müssen auch dann noch, wenn erstere Gerade unendlich entfernt liegt, und damit die Ebenen einander parallel werden, die Gegenpuncte derselben in einer Geraden liegen.

c. Man denke sich jetzt zwei Systeme von Ebenen; die Ebenen jedes dieser Systeme seien unter sich, aber nicht mit denen des andern parallel. Die Gerade, in welcher die Gegenpuncte des einen Systems liegen, heiſse a, die Gerade für die Gegenpuncte des andern Systems, b. Da nun auch je zwei dem einen und andern System angehörige Ebenen sich in Parallellinien schneiden, so müssen nach (a.) die Gegenpuncte sämmtlicher Ebenen, also auch die beiden Geraden a und b, in einer Ebene liegen, und folglich sich schneiden, oder einander parallel sein. Schnitten sich aber a und b in einem Puncte A, so wäre dies der gemeinschaftliche Gegenpunct zweier Ebenen des einen und andern Systems. Mithin wären auch diese zwei sich schneidende Ebenen die Gegenebenen eines und desselben Punctes A, welches nicht möglich ist. Es sind daher a und b mit einander parallel, und mit ihnen folglich auch jede andere Gerade, welche die Gegenpuncte irgend eines dritten Systems paralleler Ebenen enthält. Wir nannten die gemeinschaftliche Richtung dieser Parallellinien die Hauptrichtung des Systems.

d. Umgekehrt: Von zwei Puncten A und B, welche in einer Parallele mit der Hauptrichtung liegen, sind die Gegenebenen α und β einander parallel. Denn wären sie es nicht, so lege man durch B eine Ebene β' parallel mit α. Der Gegenpunct von β' müſste dann derjenige sein, in welchem β' von einer durch A mit der Hauptrichtung gelegten Parallele getroffen wird, folglich B selbst. Mithin hätte B zwei verschiedene Gegenebenen, β und β', welches nicht möglich ist.

e. Jede mit der Hauptrichtung parallele Ebene γ hat einen unendlich entfernten Gegenpunct. Denn seien A und B zwei Puncte in γ, welche in einer mit der Hauptrichtung parallelen Geraden liegen. Die Gegenebenen α und β von A und B sind folglich mit einander parallel und es sind daher auch die Linien a und b, in denen γ von α und β geschnitten wird, zwei Parallellinien. Nach I. muſs nun der Gegenpunct von γ

sowohl in a als in b, und daher in unendlicher Entfernung nach einer durch diese Parallelen bestimmten Richtung liegen.

Man kann hierbei noch bemerken, dafs alle Ebenen überhaupt, deren Gegenpuncte in einer mit der Hauptrichtung parallelen Ebene γ liegen, diese Ebene in Parallellinien schneiden; denn jede dieser Ebenen mufs durch den unendlich entfernt liegenden Gegenpunct γ gehen.

f. Ist die Richtung gegeben, nach welcher ein unendlich entfernter Punct liegt, und soll die Gegenebene desselben gefunden werden, so lege man drei Ebenen α, β, γ parallel mit dieser Richtung, bestimme die Gegenpuncte A, B, C derselben, und es wird ABC die verlangte Gegenebene sein. — Nimmt man, wie es dabei möglich ist, α und β mit einander parallel, so wird AB mit der Hauptrichtung parallel, und es ist daher ABC eine mit der Hauptrichtung parallele Ebene. So wie also jede mit der Hauptrichtung parallele Ebene einen unendlich entfernten Gegenpunct hat, so ist auch umgekehrt die Gegenebene eines unendlich entfernten Punctes der Hauptrichtung parallel.

Wir fügen noch hinzu:

X. Von einem nach der Hauptrichtung zu unendlich entfernt liegenden Puncte U ist die Gegenebene gleichfalls unendlich entfernt, hat aber keine bestimmte Lage und, umgekehrt, liegt von jeder unendlich entfernten Ebene u der Gegenpunct unendlich entfernt nach der Hauptrichtung.

Der erste Theil dieses Satzes erhellet daraus, dafs, wenn α irgend eine mit der Hauptrichtung nicht parallele Ebene, und A ihr Gegenpunct ist, die Linie AU sich als parallel mit der Hauptrichtung betrachten läfst, und folglich die durch U parallel mit α gelegte Ebene die Gegenebene von u ist. Um sich von dem umgekehrten Satze zu überzeugen, bemerke man, dafs, wenn α eine mit u parallele, nicht unendlich entfernte Ebene, und A ihr Gegenpunct ist, der Gegenpunct der Ebene u ihr Durchschnitt mit einer durch A der Hauptrichtung parallel gezogenen Geraden sein mufs.

14. Da die Hauptrichtung einzig in ihrer Art ist, und daher in Bezug auf dieselbe in der Lage der Ebenen und ihrer Gegenpuncte eine gewisse Symmetrie herrschen dürfte, die symmetrischen Eigenschaften einer Figur aber sich am bequemsten durch Anwendung eines rechtwinkligen Coordinatensystems entwickeln lassen, so wollen wir jetzt irgend eine die Hauptrichtung rechtwinklig treffende Ebene zur Ebene der x, y nehmen, und

zur Axe der z, wie vorhin, diejenige Parallele mit der Hauptrichtung wählen, welche die Ebene der x, y in ihrem Gegenpuncte trifft. Die Gleichung zwischen den Coordinaten x', y', z' für die Ebene p', welche den Punct (x, y, z) oder P zum Gegenpuncte hat, ist alsdann die bereits in No. 12. erhaltene Gleichung (C.).

Liege nun der Punct P zuvörderst in der Ebene der x, y selbst, sei also $z=0$, und daher die Gleichung für p':

$$xy'-yx'=kz'.$$

Sie wird, wie gehörig, erfüllt für $x'=x$, $y'=y$, $z'=0$, und für $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$, d. h. die Ebene p' geht durch ihren Gegenpunct P und durch den Anfangspunct M der Coordinaten, letzteres darum, weil P in der Ebene der x, y liegt, und diese den Punct M zum Gegenpuncte hat. (Vergl. I.) Da also von jedem in der Ebene der x, y enthaltenen Puncte P die Gegenebene durch die ihn mit M verbindende Linie MP zu legen ist, so braucht man zur völligen Bestimmung dieser Gegenebene nur noch den Winkel zu kennen, den sie mit der Ebene der x, y bildet.

Man setze deshalb $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $x'=r'\cos\varphi'$, $y'=r'\cos\varphi'$, wo also r den Abstand des Punktes P von M, φ den Winkel von MP mit der Axe der x, und r', φ' dasselbe für die Projection irgend eines Punctes der Ebene p' auf die Ebene x, y bezeichnen. Die Gleichung wird hiermit:

$$rr'\sin(\varphi'-\varphi)=kz', \text{ folglich } \frac{r}{k}=\frac{z'}{r'\sin(\varphi'-\varphi)}.$$

Nun ist $r'\sin(\varphi'-\varphi)$ nichts Anderes, als das Perpendikel, welches in der Ebene der x, y, von der Projection (x', y') eines Punctes (x', y', z') der Ebene p' auf die Linie MP oder den Durchschnitt von p' mit der Ebene der x, y gefällt wird, und daher $\frac{z'}{r'\sin(\varphi'-\varphi)}=$ der Tangente des Winkels, welchen p' mit der Ebene der x, y macht. Diese Tangente ist aber, voriger Gleichung zufolge, $=\frac{r}{k}$, und somit der noch zu wissen nöthige Winkel höchst einfach bestimmt.

Nennen wir demnach die jetzige Axe der z, oder die Gerade, welche durch die Gegenpuncte der die Hauptrichtung rechtwinklig treffenden Ebenen sich legen läfst, die Hauptlinie des Systems, und erwägen, dafs jede darauf normale Ebene zur Ebene der x, y genommen werden kann, so können wir das erhaltene Resultat folgendergestalt in Worte fassen:

XI. **Die Gegenebene eines Punctes enthält das Perpendikel, welches von dem Puncte auf die Hauptlinie gefällt wird, und macht mit der Hauptlinie einen Winkel, dessen Cotangente diesem Perpendikel proportional ist.**

Von allen Puncten, welche gleichweit von der Hauptlinie entfernt sind, also in der Fläche eines um die Hauptlinie als Axe beschriebenen Cylinders liegen, machen daher die Gegenebenen mit der Hauptlinie gleiche Winkel nach einerlei Seite. Von Puncten in ungleichen Entfernungen von der Hauptlinie macht die Gegenebene des nähern den gröfsern Winkel, und während die Entfernung von Null bis in das Unendliche wächst, nimmt der Winkel von einem Rechten bis auf Null ab. Vergl. VIII.

Der Satz XI. lehrt zunächst, wie, mit Hülfe der Hauptlinie, eines gegebenen Punctes Gegenebene bestimmt werden kann. Soll umgekehrt einer gegebenen Ebene p Gegenpunct gefunden werden, so lege man durch den Durchschnittspunct der p mit der Hauptlinie eine auf letzterer perpendiculare Ebene. In der Durchschnittslinie dieser Ebene mit p wird alsdann der Gegenpunct von p liegen, und darin von der Hauptlinie in einem Abstande sein, welcher der Cotangente des Winkels von p mit der Hauptlinie proportional ist.

15. Es ist noch übrig, die zwischen Linien und ihren Gegenlinien obwaltenden dualen Verhältnisse etwas näher zu betrachten. In No. 5. VI. haben wir gesehen, dafs von mehreren in einer Ebene enthaltenen Linien die Gegenlinien sich gemeinschaftlich in dem Gegenpuncte der Ebene schneiden. Seien jetzt $a, b, c, \ldots$ mehrere Linien, welche einer und derselben Ebene nur parallel sind. Man lege parallel mit dieser Ebene durch $a, b, c, \ldots$ die Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, und seien $A, B, C, \ldots$ die Gegenpuncte derselben. Da nun die Gegenlinien von $a, b, c, \ldots$ resp. durch $A, B, C, \ldots$ gehen (IV.), und $A, B, C, \ldots$ in einer mit der Hauptrichtung parallelen Geraden liegen (VII.), so schliefsen wir:

XII. **Sind mehrere Linien einer und derselben Ebene parallel, so werden ihre Gegenlinien von einer und derselben Geraden getroffen. Diese Gerade ist parallel mit der Hauptrichtung, und trifft die Ebene in ihrem Gegenpuncte.**

Ist a' die Gegenlinie von a, und legt man durch a und durch einen unendlich entfernten Punct A der a' eine Ebene, also eine Ebene parallel

mit a', so ist diese die Gegenebene von A (IV.), und mit der Hauptrichtung parallel (VIII.); folglich:

XIII. Jede mit einer Linie und ihrer Gegenlinie zugleich parallele Ebene ist auch mit der Hautrichtung parallel.

XIV. Von jeder mit der Hauptrichtung parallelen Geraden ist die Gegenlinie unendlich entfernt.

Denn jede durch eine solche Gerade gelegte Ebene hat einen unendlich entfernten Gegenpunct (VIII.).

16. Eine besondere Aufmerksamkeit verdienen diejenigen Linien, mit denen ihre Gegenlinien identisch sind. Zu einer gegebenen Linie a wird nach V. die Gegenlinie gefunden, wenn man von zwei durch a gelegten Ebenen α und β die Gegenpuncte A und B bestimmt; die Gerade AB ist alsdann die gesuchte Gegenlinie. Gesetzt nun, daſs der Gegenpunct A der einen von beiden Ebenen, α, in a selbst liegt, so liegt nach I. auch der Gegenpunct B von β, — so wie der Gegenpunct jeder andern durch a zu legenden Ebene, — in a. Mithin fällt dann die Linie a mit ihrer Gegenlinie selbst zusammen.

Heiſse eine solche mit ihrer Gegenlinie zusammenfallende Linie eine **Doppellinie.** Von ihr können wir vermöge I., II. und III. sogleich folgende Sätze aufstellen:

XV. Von einer jeden durch eine Doppellinie gelegten Ebene liegt der Gegenpunct in der Doppellinie, und eine Doppellinie ist in der Gegenebene eines jeden in ihr liegenden Punctes enthalten.

XVI. Jede in einer Ebene durch ihren Gegenpunct gezogene Gerade, und jede durch einen Punct gelegte und zugleich in der Gegenebene des Punctes enthaltene Gerade ist eine Doppellinie.

XVII. Liegen zwei Doppellinien in einer Ebene, so ist ihr gegenseitiger Durchschnitt, der auch unendlich entfernt sein kann, der Gegenpunct der Ebene.

Denn dieser Gegenpunct muſs nach XV., sowohl in der einen, als in der andern Doppellinie liegen. Es folgt hieraus weiter:

XVIII. Alle in einer Ebene liegenden Doppellinien schneiden sich in einem Puncte, und umgekehrt sind alle durch einen Punct gehenden Doppellinien in einer Ebene enthalten,

indem sonst wegen XVII. dieser eine Punct mehr als eine Gegenebene hätte.

17. Das System der Doppellinien erfüllt hiernach den ganzen Raum. Denn in jedem Puncte des Raumes schneiden sich unzählige Doppellinien, die aber insgesammt in einer Ebene liegen, und in jeder Ebene giebt es unzählige Doppellinien, die aber alle in einem Puncte zusammentreffen.

Ist eine Linie durch ihre Gleichungen gegeben, und verlangt man zu wissen, ob sie zu dem System der Doppellinien gehört, so untersuche man, ob die Coordinaten zweier ihrer Puncte, für x, y, z und x', y', z' in der Gleichung ($C.$) substituirt, der Gleichung Genüge leisten. Denn (x', y', z') ist in dieser Gleichung ein Punct der Ebene, welche (x, y, z) zum Gegenpuncte hat, die Linie aber, welche zwei solche Puncte verbindet, ist eine Doppellinie (XVI.). Seien daher

$$(a.) \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1, \qquad (b.) \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c'} = 1$$

die zwei Gleichungen einer Geraden. Ein in ihr liegender Punct ist (a, b, 0). Setzt man demnach in ($C.$) $x' = a$, $y' = b$, $z' = 0$, so kommt

$$(c.) \quad ay - bx = kz,$$

als Gleichung der Gegenebene des Punctes (a, b, 0); und in dieser Ebene muſs die Linie liegen, wenn sie eine doppelte sein soll. Die Gleichung ($c.$) und eine der beiden ($a.$) und ($b.$) sind daher die zwei allgemeinen Gleichungen einer Doppellinie. Auch kann man die Gleichung

$$\frac{1}{c} - \frac{1}{c'} = \frac{k}{ab},$$

welche durch Elimination von x, y, z aus ($a.$), ($b.$), ($c.$) hervorgeht, als die Bedingung aufstellen, unter welcher die durch ($a.$) und ($b.$) ausgedrückte Linie eine Doppellinie ist.

Nimmt man in ($C.$) die zwei Puncte (x, y, z) und (x', y', z') einander unendlich nahe an, setzt also $x' = x + dx$, u. s. w., so geht ($C.$) über in:

$$(D.) \quad x\,dy - y\,dx = k\,dz.$$

Dies ist also die allgemeine Differentialgleichung einer Doppellinie. Und in der That kommt man auch, wenn man ($a.$) oder ($b.$), und ($c.$) differentiirt, und hierauf die willkürlichen Constanten a, b, c eliminirt, auf diese Differentialgleichung zurück.

18. Sei a eine Linie, welche eine von ihr verschiedene Linie a' zur Gegenlinie hat, und A, A' zwei in a, a' beliebig genommene Puncte, so ist von A die Gegenebene Aa' (IV.), und daher AA' eine Doppellinie (XVI.), d. h.

XIX. **Jede, eine einfache Linie und ihre Gegenlinie zugleich schneidende Gerade ist eine Doppellinie.**

Ist ferner l eine Doppellinie und a eine einfache Linie, welche von l geschnitten wird, so ist von der Ebene la, als einer durch l gehenden, der Gegenpunct in l enthalten (XV.). Zugleich aber mufs der Gegenpunct der Ebene la, als einer durch a gelegten, in der Gegenlinie von a liegen (IV.); folglich mufs l diese Gegenlinie schneiden; d. h.

XX. **Eine Doppellinie, welche eine einfache Linie schneidet, trifft auch die Gegenlinie der einfachen.**

Aus diesem Satze, in Verbindung mit dem vorhergehenden, läfst sich ein merkwürdiger dritter ableiten. Sind nemlich a, b zwei einfache Linien, a', b' ihre Gegenlinien, und l eine Gerade, welche a, b, a' zugleich schneidet, so ist l wegen der Begegnung mit a und a' eine Doppellinie, und als solche mufs sie, weil sie b trifft, auch b' schneiden; also:

XXI. **Hat man zwei Linien und ihre Gegenlinien, so wird jede Gerade, welche dreien dieser vier Linien begegnet, auch die vierte treffen. Vier solche Linien können daher immer als eben so viel verschiedene Lagen einer ein hyperbolisches Hyperboloïd erzeugenden Geraden angesehen werden.**

Zusammenhang zwischen den bis jetzt erläuterten reciproken Verhältnissen und zwischen Sätzen der Statik.

19. Seien, wie in Nr. 7., α, β, γ (Fig. 3.) drei sich in M schneidende Ebenen, A, B zwei beliebige Puncte in α, β, und C ein beliebiger Punct in dem Durchschnitte der Ebenen γ und MAB. Nach den Richtungen $\alpha\beta$ und AB lasse man zwei Kräfte wirken, die man mit $[\alpha\beta]$ und $[AB]$ bezeichne. Die Kraft $[\alpha\beta]$ zerlege man nach den Richtungen MA und $\alpha\gamma$ in zwei andere, $[MA]$ und $[\alpha\gamma]$, welches immer möglich ist, da letztere Richtungen und $\alpha\beta$ in einer Ebene liegen und sich in einem Puncte M schneiden. Übrigens mag unter der Kraft $[MA]$ auch eine negative oder eine nach AM gerichtete verstanden werden können, und Gleiches gelte auch von den übrigen auf dieselbe Weise bezeichneten Kräften.

Hiermit sind nun die anfänglichen zwei Kräfte $[\alpha\beta]$ und $[AB]$ in drei verwandelt: $[\alpha\gamma]$, $[MA]$, $[AB]$. Von diesen haben die beiden letzten eine durch A gehende und in der Ebene MAB enthaltene Resultante.

Welche aber von allen durch A gehenden und in MAB liegenden Linien die Richtung dieser Resultante ist, hängt von dem Verhältniſs zwischen den Intensitäten der anfänglichen zwei Kräfte $[\alpha\beta]$ und $[AB]$ ab. Wir wollen daher dieses Verhältniſs so bestimmt annehmen, daſs AC selbst die Richtung der Resultante ist; und somit haben wir die anfänglichen Kräfte $[\alpha\beta]$ und $[AB]$ auf $[\alpha\gamma]$ und $[AC]$ reducirt, welches uns folgende zwei Sätze giebt:

a) Hat man zwei Kräfte, deren Richtungen $\alpha\beta$, AB nicht in einer Ebene liegen, und eine Richtung $\alpha\gamma$, welche mit der einen $\alpha\beta$ der beiden erstern in einer Ebene α liegt, und daher mit $\alpha\beta$ einen Punct M gemein hat, so ist es immer möglich, die zwei Kräfte in zwei mit ihnen gleichwirkende zu verwandeln, von denen die eine die Richtung $\alpha\gamma$ ist. Die Richtung der andern geht alsdann durch den Punct A, in welchem die Ebene α von der Richtung AB getroffen wird, und ist in der durch M und AB zu legenden Ebene enthalten.

b) Sind von den Ebenen α, β, γ die Gegenpuncte A, B, C, und daher AB von $\alpha\beta$, und AC von $\alpha\gamma$ die Gegenlinie, so ist es immer möglich, nach den Richtungen $\alpha\beta$ und AB zwei in solchem Verhältniſs zu einander stehende Kräfte wirken zu lassen, daſs sie in zwei andere nach den Richtungen $\alpha\gamma$ und AC verwandelt werden können.

Haben nun die Kräfte $[\alpha\beta]$ und $[AB]$ ein solches Verhältniſs zu einander, so läſst sich ferner zeigen, daſs überhaupt,

c) wenn von irgend zwei mit ihnen gleichwirkenden Kräften R und R' die eine in einer gegebenen Ebene δ liegt, die andere den Gegenpunct der Ebene trifft.

Denn seien C' und B' zwei beliebige Puncte in $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$. Nach *a*) lassen sich nun $[\alpha\beta]$ und $[AB]$ in zwei andere Kräfte Q und Q' verwandeln, von denen, wenn, wie wir annehmen wollen, die eine Q die Richtung $C'B'$ hat und daher $\alpha\beta$ in C' schneidet, die andere Q' in der Ebene $C'AB$, also in der Gegenebene von C' liegt. Weil aber $[\alpha\beta]$ und $[AB]$ gleichwirkend mit $[\alpha\gamma]$ und $[AC]$ sind, und $\alpha\gamma$ von $C'B'$ in B' geschnitten wird, so ist Q' aus gleichem Grunde in der Ebene $B'AC$ oder der Gegenebene von B' enthalten. Die Kraft Q' hat daher zu ihrer Richtung den Durchschnitt der Ebenen $C'AB$ und $B'AC$, d. i. die Gegenlinie der Linie $C'B'$ oder der Richtung von Q.

Sei nun von den zwei Kräften R und R', welche mit $[\alpha\beta]$ und $[AB]$, folglich auch mit Q und Q' gleichwirkend sein sollen, die eine R in einer beliebig gegebenen Ebene δ enthalten. Schneide diese Ebene die Linien $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ in C und B', und werde daher R von der Richtung CB' der Q getroffen. Nach a) geht alsdann die Richtung von R' durch den Punct, in welchem die Ebene δ, welche R und Q gemeinschaftlich enthält, von Q' geschnitten wird. Weil aber Q' die Gegenlinie von Q ist, so ist dieser Punct der Gegenpunct der Ebene δ, wie zu erweisen war. Wir ziehen hieraus noch die Folgerung:

d) Von zwei Kräften R und R', welche mit $[\alpha\beta]$ und $[AB]$, oder mit P und P', wie $[\alpha\beta]$ und $[AB]$ von jetzt an heiſsen mögen, gleichwirkend sein sollen, kann die Richtung der einen im Allgemeinen nach Willkühr genommen werden.

e) Von den Richtungen zweier mit P und P' gleichwirkenden Kräfte R und R' ist die eine die Gegenlinie der andern.

Denn man lege durch R zwei Ebenen δ und ε, deren Gegenpuncte D und E seien, so muſs nach c) die Kraft R' sowohl durch D als durch E gehen; DE ist aber die Gegenlinie von R. Eben so erhellet,

f) daſs umgekehrt, wenn a' die Gegenlinie von a ist, sich immer zwei nach a und a' gerichtete Kräfte angeben lassen, welche mit P und P' gleiche Wirkung haben.

g) So wie endlich, wenn R in einer gegebenen Ebene liegt, R' den Gegenpunct dieser Ebene trifft, so ist auch umgekehrt, wenn R durch einen gegebenen Punct D geht, R' in der Gegenebene des Punctes enthalten.

Denn da R' die Gegenlinie von R ist, so ist die durch D und R' gelegte Ebene die Gegenebene von D.

24. Aus diesen Sätzen erhellet nun zur Genüge der innige Zusammenhang, welcher zwischen den im Vorigen behandelten dualen geometrischen Verhältnissen und einigen ganz elementaren statischen Sätzen Statt findet. Auch begreift man leicht, wie umgekehrt aus den Elementen der Statik jene rein geometrische Theorie abgeleitet werden kann.

In Bezug nämlich auf zwei Kräfte P, P', deren Richtungen nicht in einer Ebene liegen, entspricht jeder Geraden eine andere Gerade dergestalt, daſs sich immer zwei nach ihnen gerichtete Kräfte angeben lassen, welche mit P und P' gleichwirkend sind. Es entspricht ferner jedem

Puncte eine gewisse ihn enthaltende Ebene, und jeder Ebene ein in ihr liegender Punct, so dafs, wenn von zwei mit P und P' gleichwirkenden Kräften die eine den Punct trifft, die andere in der Ebene enthalten ist, und umgekehrt.

Mit diesen rein statisch erweisbaren Sätzen sind die Begriffe von Gegenlinie, Gegenebene und Gegenpunct festgestellt, und hieraus lassen sich, wiewir bereits in Nr. 13., 15., 16. und 18. gesehen haben, die übrigen Eigenschaften dieser dualen Verhältnisse ohne Zuhülfenahme eines neuen Princips herleiten. — Im Folgenden sollen noch einige besonders merkwürdige Beziehungen zwischen beiderlei Verhältnissen, den geometrischen und den statischen, näher erörtert werden.

21. Dafs von den Richtungen der zwei Kräfte R, R', welche mit P, P' gleichwirkend sein sollen, die eine nach Willkühr genommen werden kann, gilt nur im Allgemeinen. Ausgenommen sind davon zuerst alle mit der Hauptrichtung parallelen Richtungen, indem, wenn R damit parallel wäre, die Kraft R' unendlich entfernt (XIV.), und daher nicht construirbar sein würde.

Um die statische Bedeutung der Hauptrichtung auszumitteln, erwäge man, dafs nach XIII. die beiden Ebenen, von denen die eine mit P und P', die andere mit R und R' parallel ist, — folglich auch der gemeinschaftliche Durchschnitt der beiden Ebenen, — mit der Hauptrichtung parallel sind. Werden daher die vier Kräfte P, P', R, R' parallel mit ihren Richtungen an einen und denselben Punct getragen, so wird der Durchschnitt der Ebenen PP' und RR' gleichfalls mit der Hauptrichtung parallel sein. Alsdann aber ist, einem bekannten Satze der Statik zu Folge, die Resultante von P und P' einerlei mit der Resultante von R und R', und hat mithin den Durchschnitt der Ebenen PP' und TT' zu ihrer Richtung. Die Hauptrichtung ist daher in statischer Hinsicht diejenige, mit welcher parallel die Resultante der Kräfte P und P' oder zweier ihnen gleichwirkender läuft, nachdem diese Kräfte parallel mit ihren Richtungen an einen und denselben Punct getragen worden.

Hieraus fliefst noch auf eine andere Weise die Unmöglichkeit, R mit der Hauptrichtung parallel zu nehmen. Denn hätte R diese Richtung, so würden R und R', an einen und denselben Punct getragen, in dieselbe mit der Hauptrichtung parallele Gerade fallen, und müfsten daher in ihrer ursprünglichen Lage entweder auf eine einzige Kraft reducirbar, oder ein-

ander gleich, parallel und entgegengesetzt, d. i. ein Kräftepaar im engern Sinne, sein. Keines von Beidem aber ist möglich, weil P und P' nicht in einer Ebene liegen sollen.

22. Von den Richtungen, welche zwei mit P, P' gleichwirkende Kräfte erhalten können, sind zweitens noch die Doppellinien ausgenommen, oder diejenigen Linien, welche P und P' oder irgend zwei andere Kräfte R und R', worauf P und P' reducirt worden, zugleich schneiden (XIX.). Denn sind S und S' zwei mit P und P', also auch mit R und R', gleichwirkende Kräfte, so sind R, R' und $-S$ auf eine einzige Kraft $= S'$ reducirbar. Dieses ist aber offenbar nicht möglich, sobald R und R', welche nicht in einer Ebene liegen, von S zugleich geschnitten werden.

Die Doppellinien haben aber eine andere merkwürdige statische Eigenschaft, welche darin besteht, dafs in Bezug auf jede dieser Linien, als Axe, die Summe der Momente von P und $P' = 0$ ist. Denn ist s eine Doppellinie, r eine sie schneidende einfache Linie, und r' die Gegenlinie der letztern, so wird nach XX. auch r' von s getroffen; nach 19. *f.* aber lassen sich P und P' in zwei nach r und r' gerichtete Kräfte R und R' verwandeln. Da also die Richtungen der R und R' von s zugleich getroffen werden, so ist für s als Axe das Moment von R sowohl, als von $R' = 0$, also auch die Summe dieser Momente $= 0$, folglich auch die Summe der Momente der damit gleichwirkenden Kräfte P und $P' = 0$.

Unter allen in einer Ebene liegenden Axen ist daher für diejenigen, welche den Gegenpunct der Ebene treffen, und unter allen durch einen Punct gehenden Axen für diejenigen, welche zugleich in der Gegenebene des Punctes liegen, die Summe der Momente $= 0$ (XVIII.). Für jede andere durch den Punct gelegte Axe ist, wie ich hier nur historisch erwähne, die Momentensumme dem Sinus des Winkels proportional, welchen die Axe mit der Gegenebene des Punctes macht; am gröfsten also für diejenige Axe, welche auf der Gegenebene normal steht. Die kleinste unter allen gröfsten Momentensummen kommt aber derjenigen Axe zu, welche mit der Hauptlinie des Systems (14.) zusammenfällt. Man vergleiche deshalb das am Ende von Poinsot's Statik befindliche *Mémoire sur la composition des momens et des aires.*

23. Werden zwei nicht in einer Ebene enthaltene Kräfte P, P' parallel mit ihren Richtungen an einen Punct verlegt und dann zu einer Kraft T vereinigt, so entsteht durch diese Verlegung eine Kräftepaar U, $-U$

welches in Verbindung mit T dieselbe Wirkung, als P und P', hervorbringt. Legt man nun in der Ebene von $U, -U$ durch den Punct D, in welchem die Ebene von T geschnitten wird, eine beliebige Gerade, so wird diese die Kräfte T, U, $-U$ immer zugleich treffen. In Bezug auf eine solche Gerade ist daher die Summe der Momente von T, U, $-U$, $=0$, mithin auch die Momentensumme von P und $P'=0$, folglich die Gerade eine Doppellinie (22.) und der Punct D der Gegenpunct der Ebene von U, $-U$. Wie also auch die Kräfte P, P' in eine einfache Kraft und ein Paar verwandelt werden mögen, so trifft erstere die Ebene des Paares stets in ihrem Gegenpuncte. Auch ist die Richtung der erstern Kraft immer der Hauptrichtung parallel, da, wenn T, U, $-U$ an einen Punct getragen werden, U und $-U$ sich gegenseitig aufheben und nur T als Resultante übrig bleibt. Vergl. Nr. 21.

Ein Kräftepaar kann man, ohne seine Wirkung zu ändern, nicht nur in seiner Ebene beliebig verlegen, sondern auch in jede andere damit parallele Ebene bringen. Verlegt man daher das Paar U, $-U$ aus seiner anfänglichen Ebene in eine damit parallele, so muſs auch letztere Ebene von T in ihrem Gegenpuncte geschnitten werden, in Übereinstimmung mit dem Satze (VII.), daſs die Gegenpuncte paralleler Ebenen in einer mit der Hauptrichtung parallelen Geraden liegen.

24. Ich müſste den Leser zu ermüden fürchten, wollte ich noch von allen übrigen im ersten Theile dieser Abhandlung enthaltenen Sätzen die entsprechenden statischen Theoreme in Betracht ziehen. Ich begnüge mich daher, auf den XXI. Satz noch aufmerksam zu machen, welcher, statisch ausgedrückt also lautet: Sind zwei Kräfte gleichwirkend mit zwei andern, oder — was hier auf dasselbe hinauskömmt, —

Sind vier Kräfte mit einander im Gleichgewicht, so trifft jede Gerade, welche den Richtungen dreier derselben begegnet, auch die Richtung der vierten.

Dies folgt auch höchst einfach aus der Theorie der Momente. Denn in Bezug auf eine Axe, welche die Richtungen von drei Kräften trifft, ist das Moment jeder dieser Kräfte $=0$. Da nun die 4 Kräfte im Gleichgewicht sein sollen, und mithin die Summe ihrer Momente für jede Axe null sein muſs, so muſs in Bezug auf jene Axe auch das Moment der vierten null sein. Dieses ist aber nicht anders möglich, als wenn jene Axe die Richtung der vierten ebenfalls schneidet.

28.

Rapport sur deux mémoires de Mr. J. Liouville,

ayant pour titre:

Mémoires sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique.

Commissaires M. M. *Lacroix*, *Navier* et *Poisson*, rapporteur.

(Suivi d'une note de M. *Liouville* sur l'objet des deux mémoires.)

Les formules différentielles dont on connait, sous forme finie, les intégrales indéfinies, se réduisent aux fractions rationnelles, à un petit nombre de formules que l'on rend rationnelles par des transformations très simples et à quelques autres que l'on ramène à des différentielles intégrables à la manière des monomes, par le procédé connu de l'intégration par partie. Ces intégrales ont été données par *Leibnitz* et les *Bernoulli*, dès l'origine du calcul intégral. Leurs successeurs se sont ensuite beaucoup occupés des formules qui se présentent après celles là, dans l'ordre apparent de simplicité et particulièrement les formules qui comprennent l'arc d'ellipse, auxquelles *Legendre* a donné le nom de fonctions elliptiques, et d'une autre sorte d'expressions connues sous la dénomination de différentielles binomes, que l'on ne sait intégrer que dans des cas très particuliers. Des efforts nombreux et variés n'ayant conduit à découvrir aucune nouvelle intégrale indéfinie, il y a lieu de croire que les intégrales dont on s'est tant occupé, n'existent pas sous forme finie. Toutes fois, nous ne connoissons encore aucune formule différentielle pour laquelle on ait démontré l'impossibilité de son intégrale exacte; et, cependant, ce genre de propositions négatives serait le complément des méthodes du calcul intégral, car, ce qu'on peut demander, c'est d'obtenir les intégrales, quand elles existent, ou de s'assurer rigoureusement qu'elles n'existent pas. La même remarque s'applique aux équations différentielles: le nombre de celle que l'on sait intégrer sous forme finie, sans le secours des intégrales définies, est extrèmement limité, et, néanmoins, il n'y a aucune équation différentielle dont on soit certain que son intégrale est impossible. Mais, ce qui peut paraître singulier, on est plus avancé à cet égard, par rapport aux équations aux différences partielles, quoiqu'elles soient d'une nature plus élevée que les simples équations différentielles. *Laplace* a donné pour intégrer les équations aux différences partielles, linéaires et

du 2e ordre, une méthode dont le caractère particulier est de faire connaître l'intégrale générale, toutes les fois qu'elle existe sous forme finie, ou de prouver qu'elle n'existe pas, ce qui a lieu plus souvent.

Dans les deux mémoires que M. *Liouville* a envoyés à l'académie, il s'est proposé de déterminer les cas où les différentielles algébriques admettent ou n'admettent pas des intégrales algébriques et de trouver ces intégrales, quand elles existent, par un procédé direct et uniforme. Mais, lorsqu'une formule donnée n'admettra pas une intégrale algébrique, il n'en faudra pas conclure que son intégrale soit impossible sous forme finie, car, indépendamment des expressions algébriques, entières ou fractionnaires, rationnelles ou irrationnelles, cette forme comprend encore les exponentielles et les logarithmes, et conséquemment, les fonctions trigonométriques et les arcs de cercle que l'on sait transformer en exponentielles et en logarithmes imaginaires. C'est de cette manière, par exemple, que les fractions rationnelles sont toujours intégrables sous forme finie, tandis que leurs intégrales ne sont algébriques que quand leurs dénominateurs ne renferment que des facteurs multiples. En se bornant à considérer les intégrales algébriques des formules différentielles dont il s'est occupé, M. *Liouville* n'a donc pas résolu complètement le problème de la possibilité ou de l'impossibilité absolue de leur intégration sous forme finie; mais ses recherches, dans une matière difficile et importante, nous paraissent dignes de l'attention des géomètres et nous allons en rendre compte, autant qu'il sera possible de le faire sans le secours des notations algébriques.

L'auteur suppose, d'abord, ce qui est toujours possible, qu'on a transformé la différentielle algébrique en une autre, où tous les exposans de la variable sont entiers et positifs; il appelle ensuite *irrationnelle de première espèce*, toute fonction algébrique dans laquelle les radicaux portent sur des fonctions rationnelles; il nomme de même *irrationnelle de seconde espèce*, toute fonction algébrique dans laquelle les radicaux portent sur des quantités rationnelles ou sur des *irrationnelles de première espèce* et ainsi de suite. L'auteur fait voir aisément que la forme la plus générale d'une irrationnelle de première espèce, est la somme d'un nombre quelconque de termes, dont chacun est une fonction entière divisée par le produit d'une semblable fonction et d'un radical portant sur une troisième fonction entière, et il détermine, de même, la forme la plus générale de chaque espèce d'irrationnelles. Cela étant, il considère séparément cha-

que terme d'une différentielle exprimée par une irrationnelle de première espèce; puis il démontre que son intégrale algébrique, si elle existe, ne peut renfermer d'autres radicaux, que celui qui est contenu dans le terme dont il s'agit. En effet, en égalant la différentielle de cette intégrale, à la différentielle donnée, on aura une équation, au moyen de laquelle on pourra éliminer de l'intégrale un des radicaux différens de celui qui se trouve dans la différentielle; en différentiant de nouveau l'intégrale, après cette première élimination, et égalant le résultat à la différentielle donnée, on obtient une nouvelle équation au moyen de laquelle on peut éliminer de l'intégrale un second radical; et ansi de suite, jusqu'à ce qu'on en ait fait disparaître tous les radicaux différens de celui que renferme le terme différentiel que l'on considère. Cela fait, on trouve aisément, qu'abstraction faite de la constante arbitraire, l'intégrale de chaque terme d'une irrationnelle de première espèce, ne peut être qu'un polynome divisé par le produit d'un autre polynome et du radical contenu dans le terme donné; en sorte que la question est réduite à déterminer ces deux polynomes ou à prouver qu'ils n'existent pas. L'auteur, après avoir donné la démonstration que nous venons d'indiquer, fait voir qu'elle s'étend aux irrationnelles des ordres supérieurs au premier, et qu'on peut toujours déterminer la forme la plus générale de leurs intégrales, si elles existent algébriquement. On peut ajouter qu'une série d'éliminations, pareille à la précédente, servirait aussi à faire disparaître les exponentielles et les fonctions trigonométriques, s'il en existait dans l'intégrale d'une différentielle algébrique; d'où il résulte, que ces transcendantes ne sauraient entrer dans l'intégrale d'une semblable différentielle; mais le même raisonnement ne s'applique point aux logarithmes, et aux arcs de cercle isolés, qui disparaissent d'eux mêmes par la différentiation; et, en effet, les intégrales connues de la plupart des différentielles algébriques, renferment des logarithmes ou des arcs de cercle isolés, c'est-à-dire, multipliés ou divisés par des quantités constantes.

M. *Liouville* ayant donc réduit l'intégration sous forme algébrique, de chaque terme d'une irrationnelle de première espèce, à la détermination de deux polynomes de degrés inconnus, il s'est ensuite occupé de cette détermination.

Dans un premier cas, il démontre que ces polynomes n'existent pas; ensorte que l'intégrale de la différentielle donnée, qui comprend, par

exemple, les fonctions elliptiques de la troisième espèce, est impossible sous forme algébrique. Dans un second cas, les deux polynomes se réduisent à un seul; et l'auteur montre que ce polynome unique doit satisfaire à une équation différentielle donnée, linéaire et du premier ordre, d'où il résulte qu'il est toujours facile de le déterminer ou de s'assurer qu'il n'existe pas, non plus que l'intégrale algébrique de la formule proposée. Ce second cas comprend les fonctions elliptiques de la première et de la seconde espèce; et il eut été à désirer que M. *Liouville* les eut choisies pour exemples de l'application de sa méthode, ce qui l'aurait, sans doute, conduit à prouver l'impossibilité de ces fonctions sous formes algébriques.

L'auteur s'appercevra aussi aisément que les démonstrations relatives à ces deux premiers cas, pourraient être un peu simplifiées, sans s'écarter des principes qu'il a suivis. Avant de passer au cas général, l'auteur considère encore un cas particulier dans lequel sont comprises les différentielles binomes. Venant enfin au cas général, dont l'auteur a bien fait de ne s'occuper qu'après avoir considéré spécialement les cas qui méritaient une attention particulière, il montre que l'intégrale algébrique dépend, comme dans le second cas, de la détermination d'un polynome d'après une équation différentielle, linéaire et du premier ordre: problème qu'il est toujours facile de résoudre, ou dont on peut aisément reconnaître l'impossibilité.

Telle est l'analyse du premier mémoire de M. *Liouville*, envoyé à l'académie le 7. Xbre dernier et dans lequel il annoncait déjà l'extension qu'il donnerait à ses recherches dans un mémoire subséquent. L'académie a reçu, en effet, un second mémoire de l'auteur sur le même sujet, dans une de ses dernières séances et nous a également chargés de lui en rendre compte.

Ce second mémoire est divisé en deux parties: dans la première, l'auteur se propose de résoudre ce problème: *Etant donnée une équation différentielle, linéaire et d'un ordre quelconque, dont les coëfficients sont des fonctions entières, déterminer les intégrales particulières de cette équation, qui peuvent être exprimées par des fonctions rationnelles, entières ou fractionnaires, ou s'assurer que l'équation donnée n'admet pas d'intégrale de cette forme.* Cette question ne présenterait aucune difficulté, si l'intégrale demandée devait être une fonction entière; mais elle devient beaucoup moins facile, quand il s'agit d'une fonction fractionnaire,

dont les deux termes peuvent être des polynomes de degrés inconnus. M. *Liouville* en donne la solution dans le cas d'une équation différentielle du premier ordre; il la résout encore dans le cas du second ordre; ce qui exige alors une discussion minutieuse des diverses circonstances qui peuvent se présenter. Cette discussion s'étendrait et se compliquerait encore davantage dans le cas du 3me et deviendrait, peut-être, impraticable pour les équations différentielles des ordres supérieurs. Aussi, l'auteur s'est-il borné à considérer les équations différentielles du premier et du second ordre et s'est-il contenté d'ajouter que la méthode qu'il a suivi conviendrait également aux autres équations; ce que nous croyons, en effet, quant aux principes de cette méthode et sauf la complication croissante des calculs qui peut tenir, au reste, à la nature même de la question.

Dans la seconde partie de son nouveau mémoire, M. *Liouville* considère une différentielle rationnelle par rapport à la variable indépendante, et à une fonction implicite de cette variable, donnée par une équation algèbrique d'un dégré quelconque dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de cette même variable. Il démontre, par les considérations déjà exposées au commencement de ce rapport, que son intégrale algébrique, si elle existe, ne peut contenir d'autres irrationnelles que les puissances de la fonction implicite d'un dégré inférieur à celui de l'équation donnée. Il reste donc seulement à déterminer les coefficiens de ces diverses puissances qui peuvent être des fonctions fractionnaires de la variable indépendante. L'auteur fait voir que ces inconnues doivent satisfaire à un nombre égal d'équations différentielles, linéaires et du premier ordre, que l'on peut réduire par l'élimination de toutes les inconnues, moins une, à une équation linéaire de l'ordre marqué par leur nombre et dont tous les coefficients sont des fonctions rationnelles et entières. Ce résultat s'étend également aux intégrales algébriques des formules différentielles exprimées par des irrationnelles de première espèce ou d'une espèce quelconque relativement à la variable indépendante, et à une ou plusieurs fonctions implicites, et, de cette manière, l'intégration sous forme algébrique des différentielles algébriques considérées sous le point de vue le plus général, se trouve ramenée à la solution du problème dont l'auteur s'est occupé dans la première partie de son second mémoire. Si donc on regarde ce problème comme résolu, les méthodes de M. *Liouville* appliquées à une différentielle algébrique proposée, conduiront toujours à son intégrale algé-

brique ou à la conséquence certaine que la différentielle proposée n'est pas susceptible d'une pareille intégrale.

Nous pensons que les deux mémoires de ce jeune géomètre, déjà connu par d'autres travaux, méritent l'approbation de l'académie; et nous proposons d'arrêter qu'ils seront imprimés dans le recueil des savans étrangers.

Signé à la minute: *Navier, Lacroix* et *Poisson*, rapporteur.

L'académie adopte les conclusions de ce rapport.

Certifié conforme:
Le sécrétaire perpétuel
pour les sciences mathématiques
F. Arago.

Note sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique.

(Par Mr. *Joseph Liouville* à Paris.)

I.

Les mémoires que j'ai présentés à l'Académie des Sciences de Paris le 7. Décembre 1832 et le 4. Février 1833 ont pour objet de résoudre le problème suivant: *Etant donnée une fonction quelconque algébrique de x, explicite ou implicite, savoir y, trouver une méthode exacte qui permette de décider si elle a ou n'a pas pour intégrale une fonction explicite ou implicite algébrique, et qui conduise en outre à la valeur de $\int y\,dx$, toutes les fois que cette quantité est exprimable algébriquement.* Le rapport de M. *Poisson* fournit une idée générale de la méthode que j'ai suivie dans mes deux mémoires. Mais j'ai pensé qu'il pouvait être bon d'y joindre cette courte note dans laquelle je traiterai quelques-unes des questions dont je me suis occupé. Toutefois il ne faut pas voir dans le présent écrit un simple extrait des mémoires dont j'ai fait mention tout à l'heure. Désirant au contraire éviter un double emploi, je me suis attaché à présenter ici ma théorie d'une manière nouvelle, sinon dans son ensemble, au moins dans ses détails, et j'y ai même fait plusieurs additions qui me semblent utiles. J'entre en matière.

II.

Soit y une fonction algébrique, explicite ou implicite, de la variable indépendante x. On peut toujours regarder y comme la racine d'une équation algébrique de la forme:

$$1.\quad y^\mu - Ly^{\mu-1} - \ldots - My - N = 0,$$

$L, \ldots M, N$ désignant des fonctions rationnelles de x; et il est également permis de supposer l'équation (1.) irréductible, c'est-à-dire telle que y ne puisse être racine d'aucune autre équation rationnelle de degré moindre. Cela posé, on veut obtenir l'intégrale $\int y\,dx$ toutes les fois que cette intégrale est exprimable algébriquement. Or *Abel* a démontré dans le journal de M. *Crelle* (tome IV., page 264) un théorème général *sur la forme dont l'intégrale d'une fonction algébrique quelconque donnée est susceptible, en supposant cette intégrale exprimable par des fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques.* Si l'on restreint ce théorème au cas particulier dont il s'agit ici, on verra qu'il peut s'énoncer de la manière suivante:

Théorème. *Si l'intégrale $\int y\,dx$ est exprimable algébriquement, sa valeur est égale à une certaine fonction rationnelle de x et de y, en sorte que l'on pourra poser:*

$$\int y\,dx = \frac{F(x,y)}{\varphi(x,y)},$$

$F(x,y)$, $\varphi(x,y)$ étant des polynomes entiers par rapport à x et y.

Mais les deux quantités y et x étant liées entr'elles par l'équation (1.), il résulte des principes de l'Algèbre:

1°. Qu'il existe un facteur rationnel $\psi(x,y)$, entier par rapport à y et tel que le produit

$$\varphi(x,y)\ \psi(x,y),$$

se réduise à une simple fonction rationnelle de x, d'où il suit que la valeur de $\int y\,dx$, savoir

$$\int y\,dx = \frac{F(x,y)}{\varphi(x,y)} = \frac{F(x,y)\ \psi(x,y)}{\varphi(x,y)\ \psi(x,y)},$$

peut toujours être mise sous une forme entière par rapport à y, et qu'il est permis de poser en conséquence

$$\int y\,dx = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \ldots$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ étant des fonctions rationnelles de x.

2°. Que la valeur de $\int y\,dx$ ayant été écrite ainsi sous forme entière, on peut en éliminer, au moyen de l'équation (1.), toutes les puissances

de y dont l'indice est supérieur à $\mu-1$, de manière qu'il reste simplement une égalité de la forme:

$$2.\quad \int y\,dx = \alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\ldots\ldots+\lambda y^{\mu-1}.$$

Ainsi l'on a ce beau théorème:

Théorème. *Si l'intégrale $\int y\,dx$ est exprimable algébriquement, sa valeur sera de la forme*

$$2.\quad \int y\,dx = \alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\ldots\ldots+\lambda y^{\mu-1},$$

α, β, γ, δ, ... λ étant des fonctions rationnelles de x, et μ désignant le degré de l'équation irréductible (1.) *dont y est la racine.*

III.

Puisque l'équation (1.) est irréductible, si l'on désigne par F, G, ... H des fonctions rationnelles de x, on ne pourra avoir

$$F+Gy+\ldots\ldots+Hy^{\mu-1}=0,$$

à moins qu'on n'ait identiquement $F=0$, $G=0$, ... $H=0$: sans cela en effet, y serait racine d'une équation de degré $\mu-1$, ce qui est contre l'hypothèse. En partant de ce principe, on détermine aisément les coefficients rationnels α, β, γ, δ, ... λ, ou du moins on réussit à prouver qu'ils n'existent pas.

Différenciant en effet l'équation (2.), nous obtiendrons:

$$3.\quad \left\{\begin{matrix} y-\frac{d\alpha}{dx}-y\frac{d\beta}{dx}-y^2\frac{d\gamma}{dx}-y^3\frac{d\delta}{dx}-\ldots\ldots-y^{\mu-1}\frac{d\lambda}{dx} \\ -(\beta+2\gamma y+3\delta y^2+\ldots\ldots+(\mu-1)\lambda y^{\mu-2})\frac{dy}{dx} \end{matrix}\right\}=0.$$

L'équation (1.) différenciée fournit d'autre part:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^{\mu-1}\frac{dL}{dx}+\ldots\ldots+y\frac{dM}{dx}+\frac{dN}{dx}}{\mu y^{\mu-1}-(\mu-1)Ly^{\mu-2}-\ldots\ldots-M}.$$

La valeur de $\frac{dy}{dx}$ étant une fonction rationnelle de x et y peut être mise (comme on l'a vu pour celle de $\int y\,dx$) sous une forme entière par rapport à y: effectuez ensuite le produit

$$(\beta+2\gamma y+3\delta y^2+\ldots\ldots+(\mu-1)\lambda y^{\mu-2})\frac{dy}{dx},$$

et chassez en, au moyen de l'équation (1.), toutes les puissances de y dont l'indice est égal ou supérieur à μ: par là vous donnerez à ce produit la forme:

$$A+By+Cy^2+Dy^3+\ldots\ldots+Ey^{\mu-1},$$

A, B, C, D, ... E étant des fonctions rationnelles de x, β, γ, δ, ... λ,

linéaires par rapport aux inconnues β, γ, δ, ... λ, et dans lesquelles x n'entre pas.

D'après cela l'équation (3.) peut être écrite ainsi:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dx}\\ +A+B\\ \quad\;\, -1\end{array}\right| y+\left.\begin{array}{l}\frac{d\gamma}{dx}\\ +C\end{array}\right| y^2+\left.\begin{array}{l}\frac{d\delta}{dx}\\ +D\end{array}\right| y^3+\ldots.+\left.\begin{array}{l}\frac{d\lambda}{dx}\\ +E\end{array}\right| y^{\mu-1}=0,$$

et l'on en conclut:

$$\frac{d\alpha}{dx}+A=0,\ \frac{d\beta}{dx}+B-1=0,\ \frac{d\gamma}{dx}+C=0,\ \frac{d\delta}{dx}+D=0,\ \ldots.\ \frac{d\lambda}{dx}+E=0.$$

Ces équations sont en nombre μ égal à celui des inconnues; et celles-ci doivent avoir des valeurs rationnelles, toutes les fois que $\int y\,dx$ est une quantité algébrique. Tout revient donc à résoudre cette question: *Etant donné un système de μ équations linéaires du premier ordre, à coëfficients rationnels, contenant μ inconnues, trouver les intégrales particulières exprimées par des fonctions rationnelles de x, qui satisfont à ces équations, ou prouver qu'il n'existe pas de telles intégrales.* Cette question une fois résolue, il est clair que le problème énoncé en tête de la présente note, n'offrira plus aucune difficulté. En effet, ou l'on obtiendra pour α, β, γ, δ, ... λ des valeurs rationnelles convenables, et on aura

$$\int y\,dx=\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\ldots.+\lambda y^{\mu-1},$$

ou l'on démontrera que ces valeurs rationnelles n'existent pas, d'où l'on conclura que l'intégrale $\int y\,dx$ n'est pas exprimable sous forme algébrique. Cette question importante de l'intégration des équations linéaires en quantités rationnelles, est résolue dans mon second mémoire, mais il me serait impossible de développer ici la méthode dont j'ai fait usage. Seulement j'en donnerai plus bas un exemple très simple.

IV.

Il est nécessaire de démontrer que nos équations ne rentrent pas les unes dans les autres, c'est-à-dire que si par exemple l'on élimine β, γ, δ, ... λ, l'équation finale en α, obtenue par cette élimination, ne sera jamais identique. En effet si une pareille circonstance pouvait se présenter, le nombre des équations deviendrait inférieur à celui des inconnues, et notre méthode se trouverait en défaut. Mais on peut prouver que cela n'a jamais lieu. La démonstration dont il s'agit, n'ayant point été inséré dans mon mémoire, je crois devoir la transcrire ici.

Je vois d'abord que chacune de nos équations contient une seule des différentielles $\frac{d\alpha}{dx}$, $\frac{d\beta}{dx}$, etc.; car les quantités désignées par les lettres A, B, C, etc. sont indépendantes de ces différentielles. Tel est le caractère propre des équations que nous considérons; caractère sur lequel je vais m'appuyer, pour prouver qu'en éliminant β, γ, δ, ... λ, on ne tombera pas sur une identité.

Il suffit, pour établir cette proposition, de considérer le cas particulier où il y a quatre inconnues α, β, γ, δ; car la marche du calcul est la même, lorsque le nombre des inconnues est plus considérable.

Dans le cas particulier dont nous parlons, les valeurs de $\frac{d\alpha}{dx}$, $\frac{d\beta}{dx}$, $\frac{d\gamma}{dx}$, $\frac{d\delta}{dx}$ sont comprises dans la forme un peu plus générale que voici;

$$4.\quad \begin{cases} \frac{d\alpha}{dx} = P + Q\alpha + R\beta + S\gamma + T\delta, \\ \frac{d\beta}{dx} = P' + Q'\alpha + R'\beta + S'\gamma + T'\delta, \\ \frac{d\gamma}{dx} = P'' + Q''\alpha + R''\beta + S''\gamma + T''\delta, \\ \frac{d\delta}{dx} = P''' + Q'''\alpha + R'''\beta + S'''\gamma + T'''\delta, \end{cases}$$

P, P', etc. désignant des quantités rationnelles en x: ces coefficients peuvent être nuls, mais non pas indéterminés ou infinis. Cela posé, voici quelle marche on pourra suivre pour éliminer β, γ, δ.

L'élimination sera toute faite si l'on a $R=0$, $S=0$, $T=0$, ce qui pourra arriver dans certains cas particuliers. Alors α sera donnée par l'équation

$$\frac{d\alpha}{dx} = P + Q\alpha$$

qui ne peut jamais être identique.

Si les quantités R, S, T ne sont par toutes les trois nulles, si T par exemple est différent de zéro, différencions la première des équations (4.) et remplaçons, dans le second membre de l'équation différentielle ainsi obtenue, $\frac{d\beta}{dx}$, $\frac{d\gamma}{dx}$, $\frac{d\delta}{dx}$ par leurs valeurs: substituons en outre, au lieu de δ, l'expression équivalente

$$\delta = \frac{1}{T}\cdot\frac{d\alpha}{dx} - \frac{P+Q\alpha+R\beta+S\gamma}{T}$$

et faisons la même substitution dans la seconde et la troisième des équa-

tions (4.): il est clair que par ces opérations, nous formerons trois égalités de la forme:

$$5.\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\alpha}{dx^2} = P_1 + Q_1\alpha + R_1\beta + S_1\gamma + T_1\dfrac{d\alpha}{dx}, \\ \dfrac{d\beta}{dx} = P'_1 + Q'_1\alpha + R'_1\beta + S'_1\gamma + T'_1\dfrac{d\alpha}{dx}, \\ \dfrac{d\gamma}{dx} = P''_1 + Q''_1\alpha + R''_1\beta + S''_1\gamma + T''_1\dfrac{d\alpha}{dx}. \end{cases}$$

Les coefficients P_1, P'_1, etc. sont des quantités rationnelles en x qui peuvent être nulles, mais non pas infinies ou indéterminées.

Si l'on a $R_1 = 0$, $S_1 = 0$, l'élimination dont nous nous occupons est terminée, puisque α se trouve fournie par l'équation

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2} = P_1 + Q_1\alpha + T_1\frac{d\alpha}{dx},$$

qui ne peut jamais être identique.

Si les quantités R_1, S_1 ne sont pas toutes deux nulles, si S_1 par exemple n'est pas $=0$, différencions la première des équations (5.), puis, après la différenciation, remplaçons $\frac{d\beta}{dx}$, $\frac{d\gamma}{dx}$ par leurs valeurs; substituons en outre au lieu de γ l'expression équivalente

$$\gamma = \frac{1}{S_1}\cdot\frac{d^2\alpha}{dx^2} - \frac{P_1 + Q_1\alpha + R_1\beta + T_1\frac{d\alpha}{dx}}{S_1}$$

et faisons la même substitution dans la seconde des équations (5.). Nous obtiendrons ainsi deux équations nouvelles:

$$6.\quad \begin{cases} \dfrac{d^3\alpha}{dx^3} = P_2 + Q_2\alpha + R_2\beta + S_2\dfrac{d\alpha}{dx} + T_2\dfrac{d^2\alpha}{dx^2}, \\ \dfrac{d\beta}{dx} = P'_2 + Q'_2\alpha + R'_2\beta + S'_2\dfrac{d\alpha}{dx} + T'_2\dfrac{d^2\alpha}{dx^2} \end{cases}$$

dans lesquelles P_2, P'_2, etc. sont des coefficients rationnels qui ne peuvent pas être infinis ou indéterminés.

Si l'on a $R_2 = 0$, notre élimination est achevée, puisque α doit satisfaire à l'équation non identique

$$\frac{d^3\alpha}{dx^3} = P_2 + Q_2\alpha + S_2\frac{d\alpha}{dx} + T_2\frac{d^2\alpha}{dx^2}.$$

Mais si R_2 n'est pas $=0$, il faut différencier la première des équations (6.) et remplacer ensuite $\frac{d\beta}{dx}$ par sa valeur, et β par l'expression

$$\beta = \frac{1}{R_2}\cdot\frac{d^3\alpha}{dx^3} - \frac{P_2 + Q_2\alpha + S_2\frac{d\alpha}{dx} + T_2\frac{d^2\alpha}{dx^2}}{R_2}.$$

Cela conduira à une équation définitive de la forme:

$$\frac{d^4\alpha}{dx^4} = P_3 + Q_3\alpha + R_3\frac{d\alpha}{dx} + S_3\frac{d^2\alpha}{dx^2} + T_3\frac{d^3\alpha}{dx^3},$$

P_3, Q_3, etc. étant des fonctions rationnelles déterminées de x. Cette équation est l'équation finale en α, et il est évident qu'elle ne peut jamais être identique, puisque le coefficient de $\frac{d^4\alpha}{dx^4}$ est l'unité.

Il est aisé de voir que la marche du calcul restera la même dans le cas général où il y a μ inconnues. L'équation finale en α ne sera donc jamais identique. Cette équation finale est généralement de l'ordre μ, mais il est bon d'observer que dans certains cas elle s'abaisse à un ordre moindre.

V.

C'est par exemple ce qui arrive quand l'équation (1.) se réduit à une équation à deux termes de la forme

$$y^\mu - N = 0,$$

N étant une fonction rationnelle de x. Je vais examiner en détail ce cas particulier. La valeur de y est alors $y = \sqrt[\mu]{N}$, et la quantité qu'il s'agit d'intégrer est $y\,dx = \sqrt[\mu]{N}.dx$. Or si l'on pose

$$\int y\,dx = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \ldots + \lambda y^{\mu-1},$$

puis si l'on différencie cette égalité, et qu'après avoir remplacé $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\frac{dN}{dx}}{\mu N},$$

on égale à zéro les coefficients des diverses puissances de y, réunies dans le premier membre, on obtiendra

$$\frac{d\alpha}{dx} = 0,$$

$$\frac{d\beta}{dx} + \frac{\beta\frac{dN}{dx}}{\mu N} - 1 = 0,$$

$$\frac{d\gamma}{dx} + \frac{2\gamma\frac{dN}{dx}}{\mu N} = 0,$$

$$\frac{d\delta}{dx} + \frac{3\delta\frac{dN}{dx}}{\mu N} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d\lambda}{dx} + (\mu-1)\frac{\lambda\frac{dN}{dx}}{\mu N} = 0.$$

La première de ces équations nous donne

$$\alpha = \text{constante}.$$

Celles qui contiennent $\gamma, \delta, \ldots . \lambda$ prouvent en outre que l'on peut prendre $\gamma = 0$, $\delta = 0$, ... $\lambda = 0$. Pour le faire voir, considérons par exemple l'équation où entre γ, savoir

$$\frac{d\gamma}{dx} + 2\gamma \frac{\frac{dN}{dx}}{\mu N} = 0.$$

Comme elle est du premier ordre, on peut l'intégrer, et il vient

$$\gamma = \frac{C}{\sqrt[\mu]{N^2}}.$$

Mais cette valeur devant être rationnelle, il est clair que la constante arbitraire C doit être nulle, d'où l'on tire $\gamma = 0$. On prouvera de même que $\delta = 0$, ... $\lambda = 0$.

Il résulte de cette discussion que la valeur de $\int y\,dx$ ou plutôt de $\int \sqrt[\mu]{N}.dx$ ne peut être que de la forme

$$\int \sqrt[\mu]{N}.dx = \beta \sqrt[\mu]{N} + \text{constante},$$

β étant une fonction rationnelle de x qu'il faut déterminer.

VI.

Pour cela j'observe que N étant une fonction rationnelle de x, si l'on représente par Q son dénominateur et par P son numérateur, P et Q étant des fonctions entières, on aura

$$N = \frac{P}{Q},$$

d'où

$$\sqrt{N} = \sqrt[\mu]{\frac{P}{Q}} = \frac{P}{\sqrt[\mu]{(P^{\mu-1}.Q)}},$$

c'est-à-dire

$$\sqrt[\mu]{N} = \frac{P}{\sqrt[\mu]{T}}$$

en posant $P^{\mu-1}.Q = T$. De même il viendra

$$\beta \sqrt[\mu]{N} = \frac{\beta P}{\sqrt[\mu]{T}} = \frac{\theta}{\sqrt[\mu]{T}},$$

pourvu que l'on représente par une seule lettre θ le produit βP. D'après cela, on obtiendra

$$\int \sqrt[\mu]{N}.dx = \int \frac{P\,dx}{\sqrt[\mu]{T}} = \frac{\theta}{\sqrt[\mu]{T}} + \text{constante},$$

θ étant une fonction rationnelle déterminée par l'égalité

$$7. \quad PT = T\frac{d\theta}{dx} - \frac{\theta}{\mu}.\frac{dT}{dx}$$

qui se déduit de la précédente par la différenciation.

Maintenant je dis que θ est non seulement une fonction rationnelle, mais même une fonction entière de x. En effet si θ n'est pas un polynome entier, on pourra toujours exprimer θ par le quotient de deux fonctions entières X et Y, c'est à dire faire $\theta = \frac{X}{Y}$, la fraction $\frac{X}{Y}$ étant réduite à sa plus simple expression. Pour prouver que θ est un polynome entier, il suffit de faire voir que Y ne contient pas la variable x, ou en d'autres termes, que nul facteur linéaire $x+a$ ne peut diviser Y. Or, soit, s'il est possible, $x+a$ un facteur qui entre α fois dans Y; et posons en conséquence

$$Y = Z(x+a)^{\alpha},$$

Z étant une fonction entière non divisible par $x+a$: je vais montrer que cette hypothèse conduit à une absurdité.

On en conclut en effet

$$\theta = \frac{X}{Z(x+a)^{\alpha}}, \quad \frac{d\theta}{dx} = -\frac{\alpha X}{Z(x+a)^{\alpha+1}} + \frac{Z\frac{dX}{dx} - X\frac{dZ}{dx}}{Z^2(x+a)^{\alpha}}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (7.), on trouve

$$8. \quad Z^2 PT(x+a)^{\alpha} = -\frac{\alpha TXZ}{x+a} + T\left(Z\frac{dX}{dx} - X\frac{dZ}{dx}\right) - \frac{XZ}{\mu}.\frac{dT}{dx}.$$

La forme de cette équation prouve que TXZ doit être divisible par $x+a$; et comme il est évident que ce binome ne peut diviser ni X, ni Z, il en résulte qu'il doit diviser T. Pour fixer les idées, supposons qu'il le divise m fois, et faisons

$$T = (x+a)^m.R$$

d'où:

$$\frac{dT}{dx} = (x+a)^m.\frac{dR}{dx} + mR(x+a)^{m-1}.$$

Substituons au lieu de T et $\frac{dT}{dx}$ leurs valeurs dans l'équation (8.), divisons la ensuite par $(x+a)^m$, et il nous sera aisé de lui donner la forme

$$Z^2PR(x+a)^{\alpha} = R\left(Z\frac{dX}{dx} - X\frac{dZ}{dx}\right) - \frac{XZ}{\mu}.\frac{dR}{dx} - \left(\alpha + \frac{m}{\mu}\right)\frac{XZR}{x+a}.$$

Or cette dernière égalité est évidemment absurde; car, pour qu'elle put subsister, il faudrait que le produit XZR fut divisible par $x+a$, et cela

n'a pas lieu puisque le facteur premier $x+a$ ne divise aucune des trois quantités X, Z, R. Donc Y ne peut pas contenir x: donc θ est une fonction entière. Ainsi me voilà conduit à ce théorème:

Théorème. *Si l'équation*

$$7. \quad PT = T\frac{d\theta}{dx} - \frac{\theta}{\mu}\cdot\frac{dT}{dx}$$

n'est satisfaite par aucune valeur entière de θ, *l'intégrale* $\int\sqrt[\mu]{N}.dx = \int\frac{P\,dx}{\sqrt[\mu]{T}}$ *n'est pas exprimable algébriquement. Et dans le cas contraire, on a*

$$\int\sqrt[\mu]{N}dx = \int\frac{P\,dx}{\sqrt[\mu]{T}} = \frac{\theta}{\sqrt[\mu]{T}} + \text{Constante.}$$

VII.

A la seule inspection de l'égalité

$$\int\frac{P\,dx}{\sqrt[\mu]{T}} = \frac{\theta}{\sqrt[\mu]{T}} + \text{constante},$$

il est aisé de comprendre que, toutes les fois qu'elle a lieu, le polynome entier θ est d'un degré supérieur d'une unité au degré de P; en sorte que si P est, comme nous le supposerons, du degré $n-2$, θ ne peut être que du degré $n-1$. On se convaincra de la vérité de cette proposition, si l'on développe les deux membres de l'équation en séries ordonnées suivant les puissances de x, et si l'on observe que les premiers termes de ces séries doivent être les mêmes de part et d'autre. Il résulte de là que pour savoir si l'équation dont il s'agit est possible, il suffit de faire

$$\theta = Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \dots + Cx + D,$$
$$\frac{d\theta}{dx} = (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + \dots + C,$$

puis de substituer ces valeur dans (7.) et de chercher s'il y a moyen de satisfaire à cette équation, en déterminant convenablement les constantes A, B, ... C, D.

La règle commode à laquelle je viens d'arriver pour intégrer la quantité différentielle $\sqrt[\mu]{N}.dx$, quand la valeur de $\int\sqrt[\mu]{N}.dx$ est algébrique, se trouve dans mon premier mémoire. Je l'ai découverte dans l'origine par des calculs beaucoup plus composés. Elle me semble être démontrée ici d'une manière extrêmement simple; et je crois qu'elle pourrait être introduite dans les cours en dans les traités élémentaires de calcul intégral, d'autant plus que le théorème établi à la fin du No. V. peut être

démontré tout de suite par des considérations directes dont le principe est suffisamment indiqué dans le rapport de M. *Poisson*.

VIII.

Revenons à l'équation

$$7. \quad PT = T\frac{d\theta}{dx} - \frac{\theta}{\mu}\cdot\frac{dT}{dx},$$

afin d'examiner d'une manière générale dans quels cas elle peut être satisfaite par une valeur entière de θ. D'abord si le degré de P est $n-2$, on a vu que le degré de θ sera $n-1$. Par conséquent on aura $\frac{d^n\theta}{dx^n}=0$. Il faut donc déduire de l'équation (7.) la valeur de $\frac{d^n\theta}{dx^n}$ et l'égaler à zéro, s'il est possible.

Or on a:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\theta\frac{dT}{dx}}{\mu T} + P.$$

Si l'on différencie cette égalité et que dans le second membre on remplace, après la différenciation, $\frac{d\theta}{dx}$ par la valeur que nous venons d'écrire, on trouvera pour $\frac{d^2\theta}{dx^2}$ une valeur de la forme

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = p_2\theta + q_2.$$

En différenciant de nouveau, il viendra semblablement

$$\frac{d^3\theta}{dx^3} = p_3\theta + q_3,$$

et en général

$$\frac{d^m\theta}{dx^m} = p_m\theta + q_m.$$

Il est aisé de trouver p_m et q_m. En effet on peut former la valeur de $\frac{d^{m+1}\theta}{dx^{m+1}}$ de deux manières qui doivent mener au même résultat: la première consiste à prendre

$$\frac{d^{m+1}\theta}{dx^{m+1}} = p_{m+1}\theta + q_{m+1},$$

et la seconde, à différencier d'abord $\frac{d^m\theta}{dx^m}$, ce qui donne

$$\frac{d^{m+1}\theta}{dx^{m+1}} = p_m\frac{d\theta}{dx} + \theta\frac{dp_m}{dx} + \frac{dq_m}{dx},$$

puis à remplacer $\frac{d\theta}{dx}$ par sa valeur. En opérant ainsi, on démontre aisément que p_m et q_m doivent satisfaire aux équations aux différences

mêlées:

$$p_{m+1} = \frac{\frac{dT}{dx}}{\mu T} p_m + \frac{dp_m}{dx},$$
$$q_{m+1} = \frac{dq_m}{dx} + Pp_m.$$

Les valeurs de p_m et q_m sont ainsi déterminées par la double condition de satisfaire aux équations que nous venons d'écrire, et de se réduire, quand on y fait $m=1$, à $p_1 = \frac{\frac{dT}{dx}}{\mu T}$, $q_1 = P$: ces dernières conditions résultent de ce que

$$\frac{d\theta}{dx} = p_1\theta + q_1 = \frac{\theta\frac{dT}{dx}}{\mu T} + P.$$

En partant de là on obtient:

$$p_m = \frac{1}{\sqrt[\mu]{T}} \cdot \frac{d^m \sqrt[\mu]{T}}{dx^m},$$
$$q_m = \frac{d^{m-1}P}{dx^{m-1}} + \sum_{r=2}^{r=m} \frac{d^{m-r}(Pp_{r-1})}{dx^{m-r}}.$$

Je dois faire observer que les limites $r=2$, $r=m$ relatives à la somme Σ, indiquent que l'on doit prendre successivement $r=2$, $r=3$, ... jusqu'à $r=m$ inclusivement, de telle sorte que l'on aurait

$$\sum_{r=2}^{r=m} f(r) = f(2) + f(3) + \dots + f(m).$$

Lorsque $m=1$, cette somme doit être regardée comme $=0$. Je n'entre pas dans les détails du calcul par lequel on arrive à nos formules générales: la raison en est qu'on peut tout de suite vérifier leur exactitude *à posteriori*; mais je remarque que lorsque l'on y pose $m=n$, la seconde se simplifie. En effet puisque P est, par hypothèse, un polynome entier du degré $n-2$, on a $d^{n-1}P=0$, et il reste seulement

$$p_n = \frac{1}{\sqrt[\mu]{T}} \cdot \frac{d^n \sqrt[\mu]{T}}{dx^n},$$
$$q_n = \sum_{r=2}^{r=n} \frac{d^{n-r}(Pp_{r-1})}{dx^{n-r}}.$$

En adoptant ces valeurs de p_n, q_n, nous aurons

$$\frac{d^n\theta}{dx^n} = p_n\theta + q_n.$$

Egalant donc $\frac{d^n\theta}{dx^n}$ à zéro, il nous viendra

$$\theta = -\frac{q_n}{p_n}.$$

Mais cette valeur de θ ne peut être admise qu'autant qu'elle fournit réellement pour θ une valeur entière de degré $n-1$. On a par conséquent ce théorème:

Théorème. *Si la quantité* $\frac{q_n}{p_n}$ *n'est pas un polynome entier de degré* $n-1$, *l'équation* (7.) *n'a pas d'intégrale entière, et par suite la quantité* $\int\sqrt[\mu]{N}.dx$ *n'est pas exprimable algébriquement. Et dans le cas contraire on a* $\theta = -\frac{q_n}{p_n}$ *et*

$$\int\sqrt[\mu]{N}.dx = -\frac{q_n}{p_n\sqrt[r]{T}} + \text{constante.}$$

Ce dernier théorème renferme implicitement tout ce qui est relatif aux fonctions irrationnelles de première espèce. Quant à l'intégration des fonctions algébriques en général, je renverrai à mes deux mémoires qui doivent être imprimés dans le recueil *des savants étrangers* et dans le 22ème cahier *du Journal de l'école polytechnique.*

Paris, 1er Mars 1833.

29.

Discours
prononcé aux funérailles de M. Legendre,

par *M. Poisson,* président du bureau des longitudes.

Messieurs,

Lorsque nous perdons un de nos confrères les plus avancés en âge, nos regrets sont adoucis par la pensée qu'il a moins souffert à ses derniers moments, et qu'affaibli par les années, il s'est éteint sans douleur. Cette consolation nous manque aujourd'hui: la maladie qui a terminé les jours de M. *Legendre* dans sa 81ᵉ année, a été longue et douloureuse; mais il en a supporté les souffrances avec courage et sans se faire illusion sur leur fatal issue; avec une résignation que devaient lui rendre bien difficile, le bonheur qu'il trouvait dans son intérieur, et les soins et les voeux dont il était entouré.

Notre confrère a souvent exprimé le désir qu'en parlant de lui, il ne fût question que de ses travaux, qui sont, en effet, toute sa vie. Je me conformerai religieusement à sa volonté, dans cet hommage que je viens rendre, au nom de l'Académie des Sciences*) et du Bureau des Longitudes, au géomètre illustre, au doyen de la science, dont le monde savant va pleurer la perte. Habitué à l'étude de ses ouvrages, la tâche qui m'est imposée, me sera facile à remplir; en parlant devant vous, Messieurs, je ne craindrai pas d'entrer dans des détails où vous ne trouverez que des citations pour éloges.

M. *Legendre* débuta dans la carrière des sciences par un de ses plus beaux Mémoires. Depuis peu de temps, *Lagrange* avait soumis au calcul la question importante de l'attraction des sphéroïdes, déja traitée synthétiquement par *Newton* et *Maclaurin*. Sans craindre que ce grand analyste eût épuisé la matière, M. *Legendre* choisit cette même question pour le sujet de ses premières recherches: elles furent heureuses; et la réduction en série, dont il fit usage, donna naissance à des théorèmes

---

*) En l'absence de M. *Arago*, actuellement à Metz, pour les examens dont il est chargé.

qu'on a étendus ensuite, mais qui sont encore à présent la base de la théorie générale à laquelle on s'est élevé. Le travail du nouveau géomètre fut apprécié alors comme il devait l'être: dans l'année 1783, où les sciences perdirent *Euler* et *Dalembert,* il ouvrit à M. *Legendre* les portes de cette Académie des Sciences de Paris, si fameuse en Europe, et dont il comptait encore parmi nous quatre de ses anciens confrères *). Le second Mémoire de M. *Legendre* eut pour objet une question non moins importante et qui était liée à celle dont il s'était d'abord occupé: il y donna la première et la seule solution directe, connue jusqu'à présent, du problème de la figure d'une planète homogène et supposée fluide; et bientôt après il étendit ses recherches au cas général d'une planète composée de couches hétérogènes. A la même époque, il lut à l'Académie un Mémoire sur le calcul aux différences partielles, dans lequel il expose plusieurs moyens d'intégration, qu'il applique à différents exemples. Ayant pris part à une opération astronomique, qui avait pour objet de lier le méridien de Paris à celui de Greenwich, il fut conduit à s'occuper de questions de trigonométrie; et la science y gagna un théorème d'une grande utilité, sur la mesure des triangles très-peu sphériques, tels que ceux qui sont tracés à la surface de la terre. Les Mémoires de la première classe de l'Institut renferment aussi d'autres recherches de M. *Legendre,* relatives aux triangles sphéroïdiques, qui ont été précédées de l'ouvrage sur le calcul d'un arc du méridien, publié en commun avec *Delambre.*

L'Académie des Sciences de Berlin proposa pour sujet de prix, la question du mouvement d'un projectile dans l'air; M. *Legendre* concourut, et le prix lui fut décerné. Si j'ajoute encore que notre confrère est auteur d'une méthode pour le calcul des orbites des comètes; que c'est à lui que les sciences d'observation sont redevables d'une règle de calcul qu'il a nommée *Méthodes des moindres carrés des erreurs,* et dont *Laplace* a montré tout l'avantage probable sous le rapport de la précision des résultats; si je rappelle les nombreuses recherches qu'il a faites, à différentes époques, sur deux sortes d'intégrales définies, nommées par lui *intégrales Eulériennes;* si je dis, en outre, qu'il a coopéré au calcul des grandes tables de logarithmes, construites sous la direction de M. *Prony,* il y a près de 40 ans, et toujours restées inédites; et si je nomme enfin

*) MM. *de Cassini, de Jussieu, Desfontaines* et *Tessier.*

ses Éléments de Géométrie, où l'auteur a remarqué, le premier, un genre d'égalité dont la considération, négligée jusque là, était nécessaire pour rendre complètes les démonstrations qu'on suivait depuis *Euclide:* vous trouverez sans doute, Messieurs, que tous ces titres justifient pleinement le rang élevé que M. *Legendre* occupait dans les sciences. Cependant, je n'aurai pas encore parlé des deux genres de recherches qui ont été pour lui un objet de prédilection, sur lesquelles il est tant de fois revenu pendant sa longue carrière, et qu'il a terminées par deux grands ouvrages, où sont réunis en corps de doctrine, tout ce qu'il a fait et tout ce que nous savons sur la théorie des nombres et sur la théorie des *fonctions elliptiques.* Les questions relatives aux propriétés des nombres, isolées de toute application, n'ont qu'un seul attrait, à la vérité bien puissant sur les mathématiciens: l'extrême difficulté qu'elles présentent, et que notre confrère a souvent vaincue, en prenant pour modèles, dans cette partie, les deux grands géomètres qui lui inspiraient le plus d'admiration, *Euler* et *Lagrange.* Le Traité des fonctions elliptiques renferme des tables numériques de ces quantités, calculées par l'auteur et qui seraient, à elles seules, un travail immense. Depuis long-temps, il n'y avait que lui qui s'occupât de cette théorie, lorsque M. *Abel* et M. *Jacobi* montrèrent, à leur début, qu'on pouvait encore, après *Euler* et après M. *Legendre,* faire des découvertes capitales dans sa science chérie. Vous n'avez pas oublié, Messieurs, quel bonheur il en éprouva; avec quel abandon, avec quelle effusion il l'exprimait: cette science, où ses deux jeunes émules l'ont suivi, il en parlait comme d'une création qui lui apparaissait toute nouvelle. Toutefois il ne resta pas en arrière de leurs travaux; et quoiqu'il fût alors presque octogénaire, le troisième volume de son ouvrage, publié depuis moins d'un an, contient toutes leurs découvertes et les développements qu'il a su y ajouter. Cette satisfaction d'avoir trouvé deux successeurs dignes de lui, ne fut pas long-temps complète; les sciences perdirent M. *Abel,* bientôt après qu'il se fut fait connaître.

M. *Legendre* a eu cela de commun avec la plupart des géomètres qui l'ont précédé, que ses travaux n'ont fini qu'avec sa vie. Le dernier volume de nos Mémoires renferme encore un Mémoire de lui, sur une question difficile de la théorie des nombres; et peu de temps avant la maladie qui l'a conduit au tombeau, il se procura les observations les plus récentes des comètes à courtes périodes, dont il allait se servir pour ap-

pliquer et perfectionner ses méthodes. C'est une chose bien digne de remarque, et aussi, bien consolante, de voir que quand les forces physiques nous abandonnent, les forces intellectuelles conservent encore toute la vigueur nécessaire pour s'occuper de spéculations difficiles. L'histoire des sciences en offrait déjà plusieurs exemples: dans un âge presque égal à celui que M. *Legendre* a atteint, *Lagrange* est mort en publiant une seconde édition de la *Mécanique analytique*, double de la première; *Laplace*, en achevant le cinquième volume de la *Mécanique céleste*; et *Euler*, à la fin d'un calcul sur la force ascensionnelle des ballons, qui occupaient alors le public et les savants.

Telle est l'enumération des travaux de tout genre qui ont rempli, sans aucune interruption, la vie entière du géomètre célèbre dont la perte vient encore s'ajouter à toutes celles que l'Institut a faites pendant l'an dernier. A un intervalle de moins d'une année, *Cuvier* a été enlevé aux sciences naturelles, et *Legendre* aux sciences mathématiques; la mort, dans sa cruelle équité, a frappé au faîte les deux divisions de notre Académie.

30.

Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung.

(Fortsetzung des Aufsatzes No. 1. im ersten, No. 10. im zweiten und No. 18. im dritten Hefte dieses Bandes.)

(Von dem Herrn Dr. *Stern*, zu Göttingen.)

Viertes Capitel.

Summirung der Kettenbrüche.

52.

Die Frage nach der Summe oder dem Werthe eines gegebenen Kettenbruchs kann nur dann besondere Schwierigkeiten darbieten, wenn dieser Kettenbruch ein unendlicher ist. Die Werthe endlicher Kettenbrüche findet man durch Reduction nach §. 5., daher sind letztere von den folgenden Untersuchungen ausgeschlossen. Es sollen ferner nur solche Kettenbrüche betrachtet werden, deren Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, da alle übrigen Kettenbrüche *) auf Kettenbrüche dieser Art zurückgeführt werden können (§. 18.), und zwar wird stillschweigend angenommen, dafs die Theilnenner, den ersten etwa ausgenommen, alle positiv sind (§. 19.).

53.

Um aber Dunkelheiten und Widersprüche zu verhüten, ist es hier, wie bei den Reihen, nöthig, den Sinn des Wortes Summe und die Bedeutung des convergirenden und divergirenden Kettenbruchs genauer zu bestimmen. Es wurde früher gezeigt (§. 28.), dafs man statt eines jeden Kettenbruchs $F(a, a_m)$ auch

$$a + F(a, a_1) - a + F(a, a_2) - F(a, a_1) + \dots + F(a, a_m) - F(a, a_{m-1})$$

schreiben kann. Setzt man zur Abkürzung

$$F(a, a_1) - a = r, \; F(a, a_2) - F(a, a_1) = r_1, \; \dots \; F(a, a_m) - F(a, a_{m-1}) = r_{m-1},$$

so ist

$$F(a, a_m) = a + r + r_1 + r_2 + \dots$$

Ist nun dieser Ausdruck so beschaffen, dafs er niemals über alle Gränzen hinaus wächst, so viel Glieder $r, r_1, r_2, \dots$ man auch zu dessen Bildung anwendet, sondern im Gegentheil immer zwischen angebbaren endlichen Gränzen enthalten ist und sich einem bestimmten Werthe unbe-

*) Wofern sie aus rationalen Gröfsen gebildet sind.

gränzt nähert, so heiſst der Kettenbruch ein convergenter, und dieser bestimmte Werth heiſst die Summe des Kettenbruchs. Wächst aber der Ausdruck $a+r+r_1+r_2 \ldots$ über jede angebbare Gränze hinaus, wenn man nur eine hinlängliche Anzahl von Gliedern zu dessen Bildung anwendet, so heiſst der Kettenbruch ein divergenter. In diesem Sinne hat also ein divergenter Kettenbruch keine Summe. Würde man dagegen unter Summe eines Kettenbruches nur einen Ausdruck verstehen, aus welchem sich durch gewisse Operationen dieser Kettenbruch entwickeln läſst, in welchem Sinne das Wort oft in Rücksicht auf Reihen gebraucht wird, so würde der divergirende Kettenbruch eben so wohl wie der convergirende eine Summe haben können. Ein solcher Ausdruck soll aber im Folgenden nicht die Summe, sondern die erzeugende Function des Kettenbruchs heiſsen.

54.

Ein Kettenbruch $F(a, a_m) = F(a + b_1 : a_1 + b_2 : a_2 \text{ etc.})$, in welchem nur positive Gröſsen vorkommen, ist immer convergent; setzt man $\frac{b_2}{F(a_2, a_m)} = M$, so ist M eine positive Gröſse, also $F(a, a_m) = a + \frac{b_1}{a_1 + M}$ und daher $F(a, a_m) \gtrless \begin{matrix} a \\ a + \frac{b_1}{a_1} \end{matrix}$. Je mehr Glieder man zur Berechnung anwendet, desto näher kommt man dem wahren Werthe, und es ist leicht zu bestimmen, wie weit man in der nähernden Berechnung vorgeschritten ist (§. 11.).

Sobald ein Theil $F(a_m, a_{m+n})$ eines Kettenbruchs $F(a, a_{m+n})$ convergirt, so convergirt auch der ganze Kettenbruch. Denn es sei die Summe des Kettenbruchs $F(a_m, a_{m+n}) = M$, so kann man statt $F(a, a_{m+n})$ den endlichen Kettenbruch $F(a \pm b_1 : a_1 + \ldots \pm b_m : M)$ setzen, dessen Summe durch Reduction gefunden werden kann. Hieraus folgt, daſs wenn die ersten Theilzähler eines Kettenbruchs positiv oder negativ sind, von einer gewissen Gränze an aber nur positive Theilzähler vorkommen, der Bruch convergirt. Ein solcher Kettenbruch hat mit einer Reihe Ähnlichkeit, die anfangs wenig, dann aber schnell convergirt. Wendet man zur nähernden Berechnung nur die ersten Glieder an, so kann man sich sehr weit vom wahren Werthe entfernen. Geht man aber in der nähernden Berechnung weiter fort, so daſs man auch einen Theil des Kettenbruchs zu Hülfe nimmt, in welchem alle Theilzähler positiv sind, so wird man dem wahren Werthe desto näher kommen, je mehr Theilbrüche man zur Berech-

nung anwendet, und zwar werden alsdann die Resultate abwechselnd kleiner und größer als der wahre Werth sein.

55.

Sind alle Theilzähler negativ, so wird der Bruch convergiren, wenn jeder Theilnenner a_n größer ist als der dazu gehörende Theilzähler b_n. Denn es sei der Bruch $F(a, a_{m+n}) = F(a - b : a_1 - b_2 : a_2 - b_3 : a_3 \ldots)$ gegeben; man betrachte einen beliebigen Theil desselben:

$$F(a, a_m) = F(a - b_1 : a_1 - b_2 : a_2 \ldots - b_m : a_m).$$

Ist nun allgemein $a_n > b_n$, so ist:

$$\frac{b_m}{b_m} \begin{smallmatrix} < 1 \\ > 0 \end{smallmatrix}, \quad a_{m-1} - \frac{b_m}{a_m} > a_{m-1} - 1, \quad \frac{b_{m-1}}{a_{m-1} - \frac{b_m}{a_m}} \begin{smallmatrix} < 1 \\ > 0 \end{smallmatrix}, \quad a_{m-2} - \frac{b_{m-1}}{a_{m-1} - \frac{b_m}{a_m}} > a_{m-2} - 1,$$

und führt man auf diese Weise fort, so findet man

$$a_1 - \frac{b_2}{a_2 - \frac{b_3}{a_3 \text{ etc.}}} > a_1 - 1, \quad \frac{b_1}{a_1 - \frac{b_2}{a_2 - \frac{b_3}{a_3 \text{ etc.}}}} \begin{smallmatrix} < 1 \\ > 0 \end{smallmatrix},$$

also $F(a - b_1 : a_1 - b_2 : a_2 \ldots) \begin{smallmatrix} > a - 1 \\ < a \end{smallmatrix}$. Der Kettenbruch ist also zwischen zwei angebbaren Gränzen eingeschlossen, d. h. er convergirt, und ist einer positiven Größe gleich, die zwischen $a - 1$ und a liegt. Nur in dem besonderen Falle, wenn jeder Theilnenner den dazu gehörenden Theilzähler um eine Einheit übertrifft, d. h., wenn allgemein $a_m = b_n + 1$ ist, ist der Werth des Kettenbruchs genau $a - 1$. Denn er ist alsdann =

$$F[a - b_1 : (b_2 + 1) - b_2 : (b_2 + 1) - b_3 : (b_3 + 1) \ldots],$$

nun ist

$$1 = \frac{b_2}{b_2 + 1 - 1}, \quad 1 = \frac{b_1}{b_2 + 1 - 1} \text{ also } 1 = \frac{b_1}{b_2 + 1 - \frac{b_2}{b_2 + 1 - 1}}.$$

Eben so hat man aber auch $1 = \frac{b_3}{b_3 + 1 - 1}$, $1 = \frac{b_4}{b_4 + 1 - 1}$ u. s. w.; substituirt man daher allmälig diese Werthe der Einheit, so findet man

$$1 = F[b_1 : (b_2 + 1) - b_2 : (b_2 + 1) - b_3 : (b_3 + 1) \ldots],$$

und daher ist der angegebene Bruch $= a - 1$.

Wären einige der Theilzähler positiv, so würde die Convergenz noch deutlicher sein, und zwar brauchte dann der zum negativen Theilzähler b_m gehörende Theilnenner a_m, auf welchen ein positiver Theilzähler b_{m+1} folgt, nur $= b_m$ zu sein, denn es wäre schon in diesem Falle

$$\frac{b_m}{a_m} + \frac{b_{m+1}}{a_{m+1}} \begin{smallmatrix} < 1 \\ > 0 \end{smallmatrix} \text{ und } a_{m-1} - \frac{b_m}{a_m} + \frac{b_{m+1}}{a_{m+1}} > a_{m-1} - 1,$$

woraus das Übrige wie früher folgt. Man sieht zugleich, daß der positive

Theilzähler b_{m+1} auch gröfser wie a_{m+1} sein darf, nur müssen die Theilnenner gröfser als die Einheit sein, denn wäre z. B. $a_{m-1} = 1$, so wäre $a_{m-1} - \frac{b_m}{a_m \text{ etc.}}$ ein ächter Bruch und $\frac{b_{m-1}}{a_{m-1} - \frac{b_m}{a_m \text{ etc.}}} > 1$.

56.

Kettenbrüche, in welchen auch negative Theilzähler vorkommen, wenn sie überhaupt convergiren und allgemein $a_n \geqq b_n + 1$ ist (oder wenn b_n positiv ist, auch $b_n > a_n$), haben eben sowohl wie Kettenbrüche mit nur positiven Theilzählern die Eigenschaft, dafs man sich dem wahren Resultate desto mehr nähert, je mehr Theilbrüche man zur Berechnung der genäherten Resultate anwendet. Denn man bemerke, dafs auch in diesem Falle Zähler und Nenner eines späteren Näherungswerthes bezüglich gröfser sind als die eines früheren, in Zeichen $a, a_{l+1} > a, a_l$; $a_1, a_{l+1} > a_1, a_l$; nimmt man nemlich an, es sei wirklich $a, a_l > a, a_{l-1}$, so hat man $a, a_{l+1} = a_{l+1} . a, a_l \pm b_{l+1} . a, a_{l-1}$ .... (§. 6.). Gilt das obere Zeichen, so ist an und für sich klar, dafs $a, a_{l+1} > a, a_l$ ist, gilt aber das untere, so dafs b_{l+1} negativ ist, so hat man nach der Voraussetzung $a_{l+1} \geqq b_{l+1} + 1$, folglich, da $a, a_l > a, a_{l-1}$, auch $a, a_{l+1} > a, a_l$. Es ist aber der Zähler des Bruches $a - \frac{b_1}{a_1}$ oder $a, a_1 = a a_1 - b_1$*) gröfser als a oder a, a (da $a_1 \geqq b_1 + 1$ ist), also allgemein $a, a_{l+1} > a, a_l$. Man könnte eben so beweisen, dafs überhaupt $a_l . a_m > a_l, a_{m-1}$, und weil $a_l, a_m = a_m, a_l$; $a_{l+1}, a_m = a_m, a_{l+1}$; so hat man auch $a_l, a_m > a_{l+1}, a_m$, da $a_m, a_l > a_m, a_{l+1}$ ist. Hieraus kann man wie in §. 11. beweisen, dafs $F(a, a_m) - F(a, a_{l+1})$ kleiner ist als $F(a, a_m) - F(a, a_l)$, woraus die Wahrheit unserer Behauptung folgt.

57.

Durch diese Eigenschaft werden aber diese Brüche keinesweges zur nähernden Berechnung eben so tauglich wie die Brüche mit nur positiven Theilzählern. Bei letzteren nemlich sind jede zwei auf einander folgende Näherungswerthe abwechselnd gröfser oder kleiner als der wahre Werth des Kettenbruchs, mithin gehören die ersten Ziffern, die beiden gemeinschaftlich sind, sicher auch dem wahren Werthe an, wodurch man

---

*) In dem besonderen Falle, wenn $a = 1$ und $a_1 = b_1 + 1$ wäre, hätte man $aa_1 - b_1 = a$, alsdann könnte man zeigen, dafs $a, a_2 > a, a_1$ ist.

ein bestimmtes Maaſs für den Grad der erhaltenen Annäherung hat. Wäre dagegen z. B. der convergente Kettenbruch $F(a, a_\infty) = F(a - b_1 : a_1 - b_2 : a_2 \ldots)$ mit durchaus negativen Theilzählern gegeben, so würden alle Näherungswerthe gröſser als der wahre Werth sein, und man würde daher von keiner Ziffer mit Bestimmtheit angeben können, ob sie dem wahren Werthe angehörte. Denn setzt man zur Abkürzung $F(b_2 : a_2 - b_3 : a_3 - b_4 : a_4 \ldots) = M$, $F(b_3 : a_3 - b_4 : a_4) = M_1$, $F(b_4 : a_4 - b_5 : a_5) = M_2$ u. s. w., so ist

$$\frac{b_1}{a_1} < \frac{b_1}{a_1 - M}, \quad \frac{b_2}{a_2} < \frac{b_2}{a_2 - M_1}, \quad \frac{b_3}{a_3} < \frac{b_3}{a_3 - M_2} \text{ u. s. w.,}$$

da M, M_1, M_2 u. s. w. positive Gröſsen sind (§. 55.), also

$$a - \frac{b_1}{a_1} > a - \frac{b_1}{a_1 - M}, \quad a - \frac{b_1}{a_1 - \frac{b_2}{a_2}} > a - \frac{b_1}{a_1 - \frac{b_2}{a_2 - M_1}},$$

$$a - \frac{b_1}{a_1 - \frac{b_2}{a_2 - \frac{b_3}{a_3}}} > a - \frac{b_1}{a_1 - \frac{b_2}{a_2 - \frac{b_3}{a_3 - M_2}}} \quad \text{u. s. w.}$$

Man kann aber in diesem Falle zu jedem Näherungswerthe noch einen anderen Bruch finden, welcher kleiner als der wahre Werth ist, so daſs dieser wieder zwischen zwei Gränzen eingeschlossen ist, und daher die nähernde Berechnung eben so sicher wie bei den Kettenbrüchen mit nur positiven Theilbrüchen angestellt werden kann. Denn da M, M_1, M_2, u. s. w. echte Brüche sind, so hat man

$$a - \frac{b_1}{a_1 - 1} < a - \frac{b_1}{a_1 - M}, \quad a - \frac{b_1}{a_1 - \frac{b_2}{a_2 - 1}} < a - \frac{b_1}{a_1 - \frac{b_2}{a_2 - M_1}}, \ \ldots\ldots$$

Die ersten Ziffern, welche den Brüchen

$$a - \frac{b_1}{a_1} \text{ und } a - \frac{b_1}{a_1 - 1}, \quad a - \frac{b_1}{a_1 - \frac{b_2}{a_2}} \text{ und } a - \frac{b_1}{a_1 - \frac{b_2}{a_2 - 1}} \text{ u. s. w.}$$

gemein sind, gehören also auch dem wahren Werthe an. Die Brüche $a - \frac{b_1}{a_1 - 1}$, $a - \frac{b_1}{a_1 - \frac{b_2}{a_2 - 1}}$ .... könnte man zur Unterscheidung mittelbare Näherungswerthe nennen.

Es sei z. B. der Kettenbruch $\frac{1}{\tan 1} = F(1-1:3-1:5-1:7-1:9 \text{ etc.})$ .... (§. 48.) gegeben; die Theilnenner sind sämmtlich gröſser als die entsprechenden Theilzähler, daher convergirt der Bruch, und man findet:

Näherungswerthe.	Mittelbare Näherungswerthe.
$\frac{2}{3} = 6{,}6666666\ldots$	$\frac{1}{2} = 0{,}5000000\ldots$

Näherungswerthe.	Mittelbare Näherungswerthe.
$\frac{9}{14} = 0{,}6428571\ldots.$	$\frac{7}{11} = 0{,}6363636\ldots.$
$\frac{61}{95} = 0{,}6421052\ldots.$	$\frac{52}{81} = 0{,}6419753\ldots.$
$\frac{540}{841} = 0{,}6420927\ldots.$	$\frac{479}{746} = 0{,}6420911\ldots.$
. . . .	. . . .

Hieraus folgt $\dfrac{1}{\text{tang } 1} \begin{matrix} < 0{,}6420927\ldots. \\ > 0{,}6420911\ldots., \end{matrix}$

es ist also bestimmt $\frac{1}{\text{tang } 1} = 0{,}64209\ldots.$, und man hat auf diese Weise den Werth des Kettenbruchs schon auf 5 Dezimalstellen genau gefunden. Der wahre Werth ist $\frac{1}{1{,}557407} = 0{,}642092\ldots.$ Dafs bei den Kettenbrüchen mit blos negativen Theilzählern die Näherungswerthe sämmtlich gröfser als der wahre Kettenbruch sind, könnte man auch aus §. 9. beweisen. Man schreibe denselben auf folgende Weise

$$F(a + (-b_1) : a_1 + (-b_2) : a_2 \ldots.) = F(a, a_m),$$

so ist

$$F(a, a\ \ ) - F(a, a_l) = \pm \frac{a_{l+2}, a_m . -b_1 . -b_2 \ldots . -b_{l+1}}{a_1, a_m . a_1, a_l},$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Anzahl der Theilzähler $b_1 \ldots . b_{l+1}$ ungerade oder gerade ist. In jedem Falle ist also $F(a, a_m) - F(a, a_l)$ negativ oder $F(a, a_l) > F(a, a_m)$, da a_{l+2}, a_m; a_1, a_m; a_1, a_l positive Gröfsen sind (§. 55.).

58.

Wären die Theilzähler alle negativ, und nicht allgemein $a_n \overset{=}{>} b_{n+1}$, so würde daraus noch nicht folgen, dafs der Kettenbruch zur Berechnung untauglich wäre, sondern im Gegentheil, wenn auch unter den ersten Theilzählern manche die entsprechenden Theilnenner übertreffen, sobald sie nur von irgend einem b_r an gerechnet, sämmtlich kleiner als die entsprechenden Theilnenner sind, so wird der Bruch von dort an nach §. 55., und daher auch der ganze Kettenbruch nach §. 54. convergent sein; wenn daher auch die ersten Glieder keine genügende Resultate zur nähernden Berechnung bieten, so kann man doch so viel Theilbrüche zu Hülfe nehmen, dafs auch ein Theil der auf b_r folgenden sich darunter befindet, und so mit Hülfe der mittelbaren Näherungswerthe immer Gränzen finden, zwischen welchen das wahre Resultat liegt. Hieraus folgt, dafs jeder

Kettenbruch zur nähernden Berechnung tauglich ist, bei welchem die Theilzähler einen beständigen Werth haben, während die Theilnenner ins Unendliche fortwachsen, weil man, wie grofs auch der Werth der Theilzähler angenommen wird, immer an einen Theilbruch kommt, von welchem an gerechnet, die Theilzähler kleiner als die Theilnenner sind. Dies ist z. B. der Fall bei dem Kettenbruche

$$\frac{t}{\text{tang}\, t} = F(1-t^2:3-t^2:5-t^2:7-t^2:9\ldots) \text{ (§. 48.)}.$$

Setzt man $t=2$, so ist

$$\frac{2}{\text{tang}\, 2} = F(1-4:3-4:5-4:7-4:9\ldots).$$

Der erste Theilzähler 4 ist gröfser als der Theilnenner, die übrigen Theilzähler aber sind sämmtlich kleiner als die entsprechenden Theilnenner, daher wird sich der Bruch $1-\frac{4}{3}$ sehr weit vom wahren Resultate entfernen, je mehr Theilbrüche man aber zur Berechnung anwendet, desto näher kommt man dem wahren Resultate. Fängt man die Rechnung an, so findet man

Näherungswerthe.		Mittelbare Näherungswerthe.	
$-\frac{1}{3}$	$=-0{,}3333333\ldots$	$1-\frac{4}{2}$	$=-1{,}0000000\ldots$
$-\frac{9}{11}$	$=-0{,}8181818\ldots$	-1	$=-1{,}0000000\ldots$
$-\frac{59}{65}$	$=-0{,}9076923\ldots$	$-\frac{25}{27}$	$=-0{,}9259259\ldots$
$-\frac{495}{541}$	$=-0{,}9149722\ldots$	$-\frac{109}{119}$	$=-0{,}9159663\ldots$
$-\frac{5209}{5691}$	$=-0{,}9153048\ldots$	$-\frac{2357}{2575}$	$=-0{,}9153398\ldots$

Hieraus folgt

$$\frac{2}{\text{tang}\, 2} \begin{matrix} > 0{,}9153048\ldots \\ < 0{,}9153398\ldots \end{matrix}$$

also

$$\frac{2}{\text{tang}\, 2} = -0{,}9153\ldots,$$

der wahre Werth ist

$$\frac{2}{2{,}1850404\ldots} = 0{,}91531\ldots$$

59.

Nach den Kettenbrüchen mit blofs negativen Theilzählern werden noch diejenigen besondere Berücksichtigung verdienen, bei welchen die Theil-

zähler abwechselnd positiv oder negativ sind, die also durch

$$F(a,\,a_m) = F(a - b_1 : a_1 + b_2 : a_2 - b_3 : a_3 + b_4 \ldots\ldots)$$

angedeutet werden können. Zur Convergenz ist nur erforderlich, daſs b_1, b_3, b_5, ... bezüglich nicht gröſser als a_1, a_3, a_5 .... sind, dagegen können b_2, b_4 .... gröſser als a_2, a_4 .... sein (§. 55.); sollen aber die Näherungswerthe bestimmt dem Kettenbruche immer näher kommen, so muſs a_1, a_3, a_5 .... gröſser als b_1, b_3, b_5 .... u. s. w. sein (§. 56.), und zwar werden die zwei ersten Näherungswerthe $F(a,\,a_1) = a - \frac{b_1}{a_1}$, $F(a,\,a_2) = a - \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2}}$ kleiner, die zwei folgenden gröſser als der wahre Werth sein, und überhaupt werden diejenigen Näherungswerthe, welche $4s+1$, $4s+2$ Theilzähler enthalten, kleiner, dagegen diejenigen die $4s$, $4s+3$ enthalten, gröſser als der wahre Werth sein. Denn schreibt man den Kettenbruch auf folgende Weise:

$$F(a,\,a_m) = F[a + (-b_1) : a_1 + b_2 : a_2 + (-b_3) : a_3 + b_4 : a_4 \ldots\ldots),$$

so ist allgemein

$$F(a,\,a_m) - F(a,\,a_l) = \pm\frac{a_{l+2,\,m}\cdot -b_1\cdot b_2\cdot -b_3\ldots(\mp b_{l+1})}{a_{1,\,m}\cdot a_{1,\,l}},$$

wo die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen sind, je nachdem die Anzahl der Theilzähler b_1, b_2 .... b_{l+1} ungerade oder gerade ist (§. 9.), oder je nachdem l gerade oder ungerade ist. Daher wird $F(a,\,a_m) - F(a,\,a_l)$ positiv sein, wenn $l = 1$, 5, 9 .... oder $= 2$, 6, 10 .... ist, dagegen negativ, wenn $l = 3$, 7, 11 .... oder $= 4$, 8, 12 .... ist, wie behauptet wurde. Wenn man daher zur nähernden Berechnung nur den zweiten und dritten, vierten und fünften, sechsten und siebenten Näherungswerth u. s. w. anwenden will, so kann man diese Kettenbrüche eben so sicher, wie die mit nur positiven Theilzählern anwenden, weil zwischen zwei solchen Näherungswerthen immer der wahre Werth liegt; will man dagegen alle Näherungswerthe benutzen, so muſs man wieder zwischen dem ersten und zweiten, dritten und vierten u. s. w. einen mittelbaren Näherungswerth einschalten.

Wäre der Kettenbruch in der Form $F(a + b_1 : a_1 - b_2 : a_2 + b_3 : a_3 \ldots)$ enthalten, so müſste b_2, b_4, b_6 u. s. w. kleiner als a_2, a_4, a_6 u. s. w. sein, und es würden alsdann die Näherungswerthe kleiner oder gröſser als der Kettenbruch sein, je nachdem sie $4s$, $4s+1$, oder $4s+2$, $4s+3$ Theilzähler enthielten, was man wieder aus der Formel

$$F(a, a_m) - F(a, a_l) = \pm \frac{a_{l+2}, a_m . b_1 . - b_2 . b_3 \ldots . (\pm b_{l+1})}{a_1, a_m . a_1, a_l}$$

ableiten kann. Man muſs auch hier wieder eine ähnliche Bemerkung machen, wie in (§. 58.), daſs nämlich der Kettenbruch zur Berechnung tauglich ist, wenn auch nur von einer gewissen Gränze an die Theilzähler kleiner als die dazu gehörenden Theilnenner sind. Es sei z. B. der Ausdruck

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{1.2} + \frac{t^3}{1.2.3} \ldots .$$

gegeben (wo e die Basis der natürlichen Logarithmen ausdrückt). Setzt man in Form. A. (§. 48.) $a = R$, $b = 1$, $c = 1$, $x = \frac{t}{R}$, wo R eine unbegrenzt groſse Zahl bedeutet, so wird

$$e^t = \varphi\left(k, 1, 1, \frac{t}{k}\right),$$

und (ebend. Form. 4.)

$$e^t = F\left[1:1 - t:1 + \frac{t}{2}:1 - \frac{t}{6}:1 + \frac{t}{6}:1 \text{ etc.}\right] =$$
$$F(1:1 - t:1 + t:2 - t:3 + t:2 - t:5 + t:2).$$

Dieser Bruch wird also unter allen Umständen convergiren, weil man, wie groſs auch t angenommen wird, immer an einen Theilbruch kommt, von welchem an gerechnet, alle negativen Theilzähler kleiner als die entsprechenden Theilnenner sind.

Setzt man $t = 1$, so folgt hieraus:

$$\frac{1}{e} = F(1 - 1:1 + 1:2 - 1:3 + 1:2 - 1:5 + 1:2 \text{ etc.}),$$

und man findet:

Näherungswerthe.	Mittelbare Näherungswerthe.
$0 = 0{,}0000000 \ldots .$	
	$\frac{1}{2} = 0{,}5000000 \ldots .$
$\frac{1}{3} = 0{,}3333333 \ldots .$	
$\frac{3}{8} = 0{,}3750000 \ldots .$	
	$\frac{4}{11} = 0{,}3636363 \ldots .$
$\frac{7}{19} = 0{,}3684210 \ldots .$	
$\frac{32}{87} = 0{,}3678160 \ldots .$	
	$\frac{39}{106} = 0{,}3679425 \ldots .$
$\frac{71}{193} = 0{,}3678756 \ldots .$	

also

$$\frac{1}{e} \begin{matrix} > 0{,}3678756 \ldots . \\ < 0{,}3679245 \ldots . \end{matrix}$$

und daher

$$\frac{1}{e} = 0{,}367 \ldots .$$

Der wahre Werth ist

$$\frac{1}{2{,}718281828} = 0{,}3678794\ldots.$$

Ein Kettenbruch, in welchem die Theilzähler abwechselnd positiv und negativ sind, wird auch convergiren, wenn die den positiven Theilzählern entsprechenden Theilnenner fortwährend wachsen, während die negativen Theilzähler und die dazu gehörenden Theilnenner beständig dieselben bleiben. Einen Bruch dieser Art kann man z. B. aus

$$e^t = F(1:1 - t:1 + t:2\ldots.)$$

ableiten, denn setzt man $-t$ statt t, so erhält man

$$e^{-t} = \frac{1}{e^t} = F(1:1 + t:1 - t:2 + t:3 - t:2 + t:5 - t:2\ldots.).$$

Wie groſs man aber auch t in dem letzten Kettenbruche nimmt, immer wird man an einen, einem positiven Theilzähler entsprechenden Theilnenner kommen, der gröſser als $\frac{t}{2}$ ist, daher wird $\frac{t}{m - \frac{t}{2}}$ eben so wohl positiv sein als $\frac{t}{m}$, und es wird überhaupt von dort an der Kettenbruch convergiren.

60.

Seltener werden Kettenbrüche vorkommen, in welchen die Zeichen auf eine weniger regelmäſsige Weise abwechseln. Immer aber werden sich die Näherungswerthe dem wahren Werthe mehr und mehr nähern, sobald die negativen Theilzähler kleiner als die entsprechenden Theilnenner sind, und man wird bei einem jeden Näherungswerthe durch die Formel

$$F(a, a_m) - F(a, a_l) = \pm \frac{a_{l+2}, a_m . (\pm b_1) . (\pm b_2) \ldots . (\pm b_{l+1})}{a_1, a_m . a_1, a_l},$$

entscheiden können, ob er gröſser oder kleiner als der wahre Werth ist.

61.

Man kann das in §. 55.—60 Gesagte noch auf eine andere Weise ableiten. Statt nemlich die Kettenbrüche mit negativen Theilzählern unmittelbar zu betrachten, kann man sie, vermöge der Formel $-\frac{b_m}{a_m + R} = -1 + \frac{1}{1} + \frac{b_m}{a_m - b_m + R}$ (§.19.), in andere verwandeln, die nur positive Zeichen enthalten, also nothwendig convergiren. Enthält der Kettenbruch $F(a, a_m)$ nur negative Theilzähler, ist er also $= F(a - b_1 : a_1 - b_2 : a_2 \ldots.)$, so giebt die Verwandlung

$$F(a, a_m) = F[(a-1) + 1:1 + b_1:(a_1 - b_1 - 1) + b_2:(a_2 - b_2 - 1)\ldots.].$$

Hieraus sieht man, dafs, wenn dieser Bruch durchaus positiv sein soll, $a_n \overline{\overline{>}} b_n + 1$ sein mufs (§. 55.), dafs ferner die Brüche $a - \frac{b_1}{a_1}$, $a - \frac{b_1}{a_1 - \frac{b_2}{a_2}}$ u. s. w. sämmtlich gröfser als der wahre Werth sind (§. 57.), denn ihnen entsprechen die Brüche

$$F[(a-1)+1:1+b_1:(a_1-b_1-1)+1:1],$$

$F[(a-1)+1:1+b_1:(a_1-b_1-1)+1:1+b_2:(a_2-b_2-1)+1:1]$ u. s. w., die sämmtlich gröfser als der wahre Werth sind. Dagegen entsprechen die mittelbaren Näherungswerthe $a - \frac{b_1}{a_1 - 1}$, $a - \frac{b_1}{a_1 - \frac{b_2}{a_2 - 1}}$ u. s. w. den Brüchen $F[(a-1)+1:1+b_1:(a_1-b_1-1)]$,

$$F[(a-1)+1:1+b_1:(a_1-b_1-1)+1:1+b_2:a_2-b_2-1] \text{ u. s. w.},$$

die kleiner als der wahre Werth sind. Man erhält daher durch diese Verwandlung dieselben Näherungswerthe, wie durch das in (§. 57.) gezeigte Verfahren, nur ist letzteres kürzer und daher in der Anwendung vorzuziehen. Auf ähnliche Weise könnte man auch die übrigen im Frühern gefundenen Sätze ableiten; jedoch ist es unnöthig, hierbei länger zu verweilen.

62.

Sobald nicht, von einer gewissen Gränze an, alle Theilzähler kleiner als die entsprechenden Theilnenner sind, so hört bei den Kettenbrüchen mit negativen Theilzählern die Gewifsheit, dafs sie convergiren, auf (einzelne Fälle wie in §. 59. ausgenommen), keinesweges aber werden solche Kettenbrüche bestimmt divergiren. Man wird sich von der Convergenz oder Divergenz eines solchen Kettenbruchs am besten überzeugen, wenn man das Gesetz aufsucht, nach welchem die Näherungswerthe gebildet werden. Soll der Bruch $F(a \pm b_1 : a_1 \pm b_2 : a_2 \ldots)$ divergiren, also $= \pm \infty$ sein, so wird auch $F(\pm b_1 : a_1 \pm b_2 : a_2 \ldots) = \pm \infty$, und $F(a_1 \pm b_2 : a_2 \ldots)$ $= 0$ sein; man hat daher nur zu untersuchen, ob die Näherungswerthe des letzteren Kettenbruchs so beschaffen sind, dafs ihre Nenner in einem viel gröfseren Verhältnisse wachsen als die Zähler, so dafs zuletzt ihre Quotienten, d. h. die Näherungswerthe, unter jede angebbare Zahl heruntersinken oder $= 0$ werden. Ist dies nicht der Fall, so wird

$$F(a \pm b_1 : a_1 \pm b_2 : a_2 \ldots)$$

einen bestimmten Werth haben. Es sei z. B. der Kettenbruch

$$1 - \frac{2}{2 - \frac{3}{3 - \frac{4}{4 \text{ etc.}}}} = {}^{m}_{2-\infty}F\left(1 - \frac{m}{m}\right)$$

gegeben, und es soll untersucht werden, ob er divergirt. Man untersuche daher, ob der Bruch $2-\frac{3}{3-\frac{4}{4\text{ etc.}}}=0$ ist; sucht man seine einzelnen Näherungswerthe, so findet man

$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{3}=\frac{1}{1},\ \frac{4(3-2)}{4(3-1)}=\frac{1}{2},\ \frac{5(4-3)}{5(8-3)}=\frac{1}{5},\ \frac{6(5-4)}{6(25-8)}=\frac{1}{17},\ \text{u. s. w.}$$

Man sieht hieraus, daſs die Zähler der Näherungswerthe sich alle auf Eins reduciren, während die Nenner ins Unendliche fort wachsen, daher ist allerdings der Werth des Kettenbruchs

$$2-\frac{3}{3-\frac{4}{4\text{ etc.}}}=0,\ \text{oder}\ 1-\frac{2}{2-\frac{3}{3\text{ etc.}}}=-\infty,$$

d. h. der letzte Bruch divergirt.

Aus der Gleichung $2-\frac{3}{3-\frac{4}{4\text{ etc.}}}=0$, folgt $\frac{3}{3-\frac{4}{4\text{ etc.}}}=2$, oder $\frac{4}{4-\frac{5}{5\text{ etc.}}}=\frac{3}{2}$ und $\frac{5}{5-\frac{6}{6\text{ etc.}}}=\frac{4}{3}$ u. s. w. Hieraus kann man nach Analogie schlieſsen, daſs $\frac{m}{m-\frac{m+1}{m+1-\frac{m+2}{m+2}}}=\frac{m-1}{m-2}$ ist (wo m eine ganze positive Zahl bedeutet), und es ist leicht, die Wahrheit dieses allgemeinen Ausdrucks darzuthun. Angenommen, er sei für irgend einen Werth von m richtig, so wird er auch für den Werth $m+1$ gelten. Denn man hätte in diesem Falle $\frac{m}{m-\frac{m+1}{m+1\text{ etc.}}}=\frac{m-1}{m-2}$, folglich, wenn man $m-\frac{m+1}{m+1\text{ etc.}}=m-x$ setzt, $\frac{m}{m-x}=\frac{m-1}{m-2}$ oder $x=\frac{m}{m-1}$, d. h. $\frac{m+1}{m+1-\frac{m+2}{m+2\text{ etc.}}}=\frac{m}{m-1}$, wie verlangt wurde. Da nun wirklich für die Werthe $m=1,2,3,4,5,\ldots\ \frac{m}{m-\frac{m+1}{m+1\text{ etc.}}}=\frac{m-1}{m-2}$ ist, so gilt der Ausdruck auch für alle folgenden Werthe von m.

Man hätte den Werth dieses Kettenbruchs auch auf folgende einfache Weise finden können. So wie nemlich (§. 27.) gezeigt wurde, daſs die zwei Kettenbrüche $F(a:a+a:a_1+a_1:a_2+a_2:a_3\ldots.)$ und $F(a_1:a_1+a_2:a_2\ldots.)$ gleich sind, so kann man auch darthun, daſs die beiden Kettenbrüche $F(1:1-1:a_1-a_1:a_2-a_2:a_3\ldots.)$ und $F(a_1:a_1-a_2:a_2-a_3:a_3\ldots.)$ gleich sind. Nun folgt aus §. 55., $F(m-m:(m+1)-(m+1):(m+2)\ldots.)=m-1$: setzt man daher $a_1=m$, $a_2=m+1$, $a_3=m+2$ u. s. w., so ist

$$F[1:1-1:m-m:(m+1)-(m+1):(m+2)\ldots.] =$$

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{m-1}=\frac{m-1}{m-2}=F[m:m-(m+1):(m+1)-(m+2):(m+2)\ldots.],$$

wie schon gefunden wurde.

Es wäre auch leicht, aus dem gegebenen Werthe $\frac{m-1}{m-2}$ den entsprechenden Kettenbruch $F[m:m-(m+1):(m+1)\ldots.]$ abzuleiten; man bemerke nur, daſs $\frac{m-1}{m-2}=\frac{m}{m}-\frac{m}{m-1}$ ist; hieraus folgt $\frac{m}{m-1}=\frac{m+1}{m+1}-\frac{m+1}{m}$, $\frac{m+1}{m}=\frac{m+2}{m+2}-\frac{m-2}{m-1}$ u. s. w. Substituirt man nun statt $\frac{m}{m-1}$, $\frac{m+1}{m}$ u. s. w. ihre gefundenen Werthe, so erhält man aus der Gleichung $\frac{m-1}{m-2}=\frac{m}{m}-\frac{m}{m-1}$ den gesuchten Kettenbruch.

(Fortsetzung folgt.)

31.

Inhalts-Verzeichnifs I.

der ersten zehn Bände des Journals für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben zu Berlin in den Jahren 1826 bis 1833 von *A. L. Crelle*, nach alphabetischer Ordnung der Namen der Verfasser.

N. H. Abel, aus Christiania in Norwegen (gestorben am 6. April 1829 zu Frolands Eisenwerk bei Arendahl in Norwegen, in dem Alter von 26 Jahren und 8 Monaten).

A. A. Cournot, Dr. ès sciences à Paris.

A. L. Crelle, Herausgeber dieses Journals.

Dr. Dietlein, Ober-Bau-Inspector und Professor zu Berlin.

Dr. Dirksen, Professor der Mathematik an der Universität zu Berlin.

F. Eberty, zu Berlin.

Eytelwein, Ober-Landes-Bau-Director zu Berlin.

L. Feldt, Professor der Mathematik zu Braunsberg in Ost-Preufsen.

Dr. W. A. Förstemann, Prof. der Math. zu Danzig.

Band. Heft. Seite.

M. L. Frankenheim, Professor zu Breslau.

Garbinsky, Professor a. d. Universität und Director der polytechnischen Schule zu Warschau.

Dr. Gaufs, Hofrath und Professor zu Göttingen.

M[lle] Sophie Germain, zu Paris, gestorben daselbst im Jahre 1832.

P. Gerwien, Pr. Lieutenant im Königl. Preufs. 22. Infanterie-Regiment.

C. H. Graeffe, zu Zürich.

Grüson, Geh. Hofrath und Professor zu Berlin.

Dr. J. A. Grunert, Professor der Mathematik, jetzt zu Brandenburg an der Havel.

Dr. Friedr. Schmeiſser, Professor und Prorector des Gymnasii zu Frankfurt a. O.

Dr. G. v. Schmidten, Prof. d. Math. zu Kopenhagen.

Dr. E. J. Scholtz, Prof. an d. Universität zu Breslau.

Dr. Sohncke, zu Königsberg in Preuſsen.

Specht, Cand. phil. zu Berlin.

Dr. Stein, Professor der Mathematik zu Trier, gestorben im Jahre 1831.

Dr. J. Steiner, Professor der Mathem. zu Berlin.

Ungenannte.

Preis-Aufgaben von Akademien.

32.

Inhalts-Verzeichnifs II.

der ersten zehn Bände des Journals für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben zu Berlin in den Jahren 1826 bis 1833 von *A. L. Crelle.* Nach den Gegenständen.

Wenn man die Zahlen dieses Verzeichnisses II. in dem Verzeichnifs I. aufschlägt, so findet man die Titel der bezeichneten Abhandlungen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

A. Algebra.

B. Combinatorik insbesondere.

C. Zerlegung der Brüche insbesondere.

D. Theorie der Zahlen insbesondere.

E. Kettenbrüche insbesondere.

F. Theorie der Gleichungen insbesondere.

G. Analytische Facultäten insbesondere.

H. Interpolation insbesondere.

I. Theorie der Functionen insbesondere.

K. Reihen insbesondere.

L. Differential- und Integral-Rechnung.

M. Bestimmte Integrale insbesondere.

N. Elliptische Functionen insbesondere.

2. Geometrie.

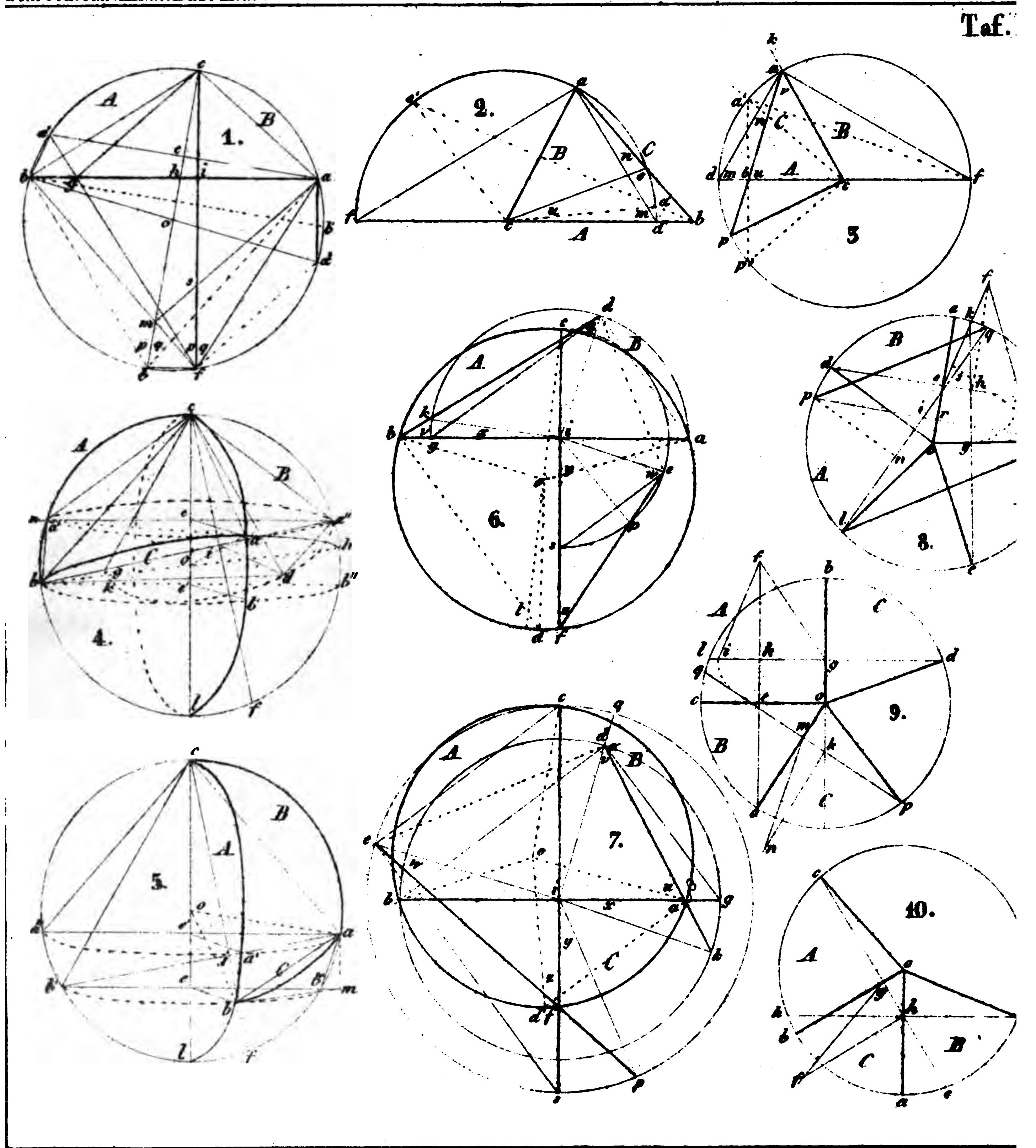
A. Elementar-Geometrie.

B. Goniometrie und Trigonometrie.

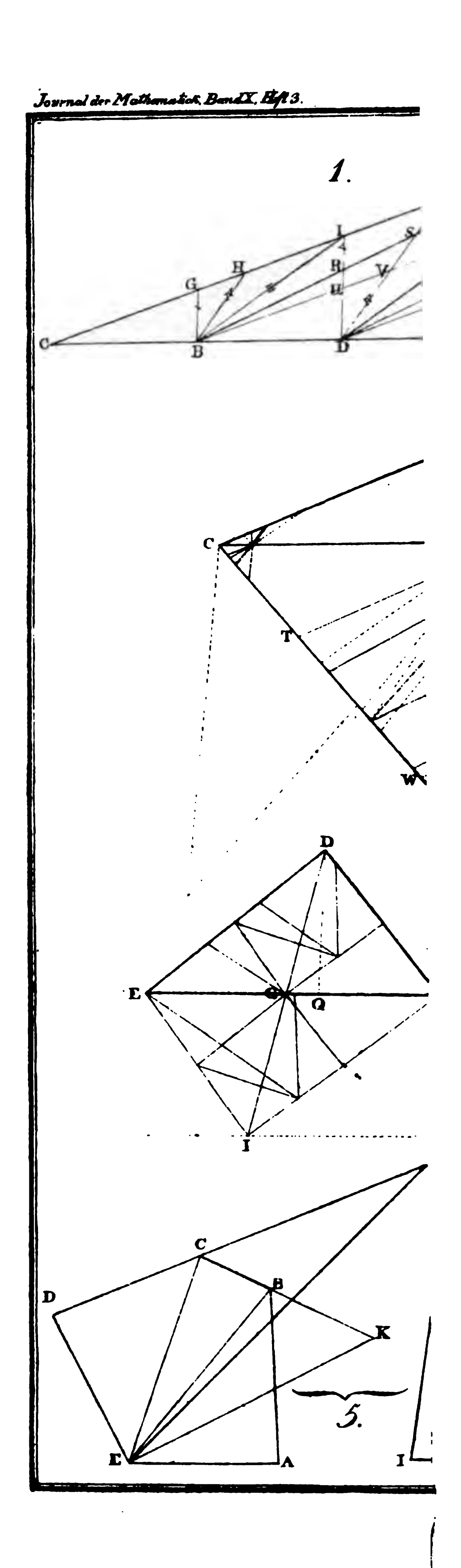
C. Sphärik und sphärische Trigonometrie.

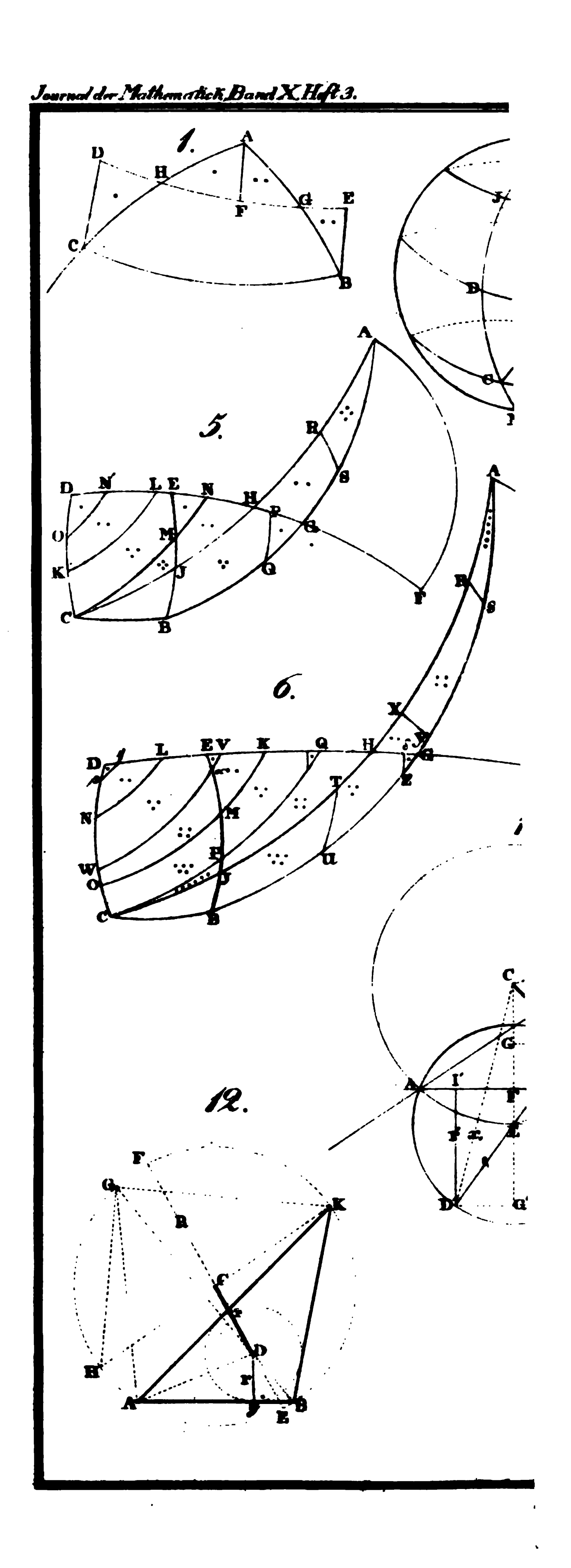
D. Synthetische Geometrie.

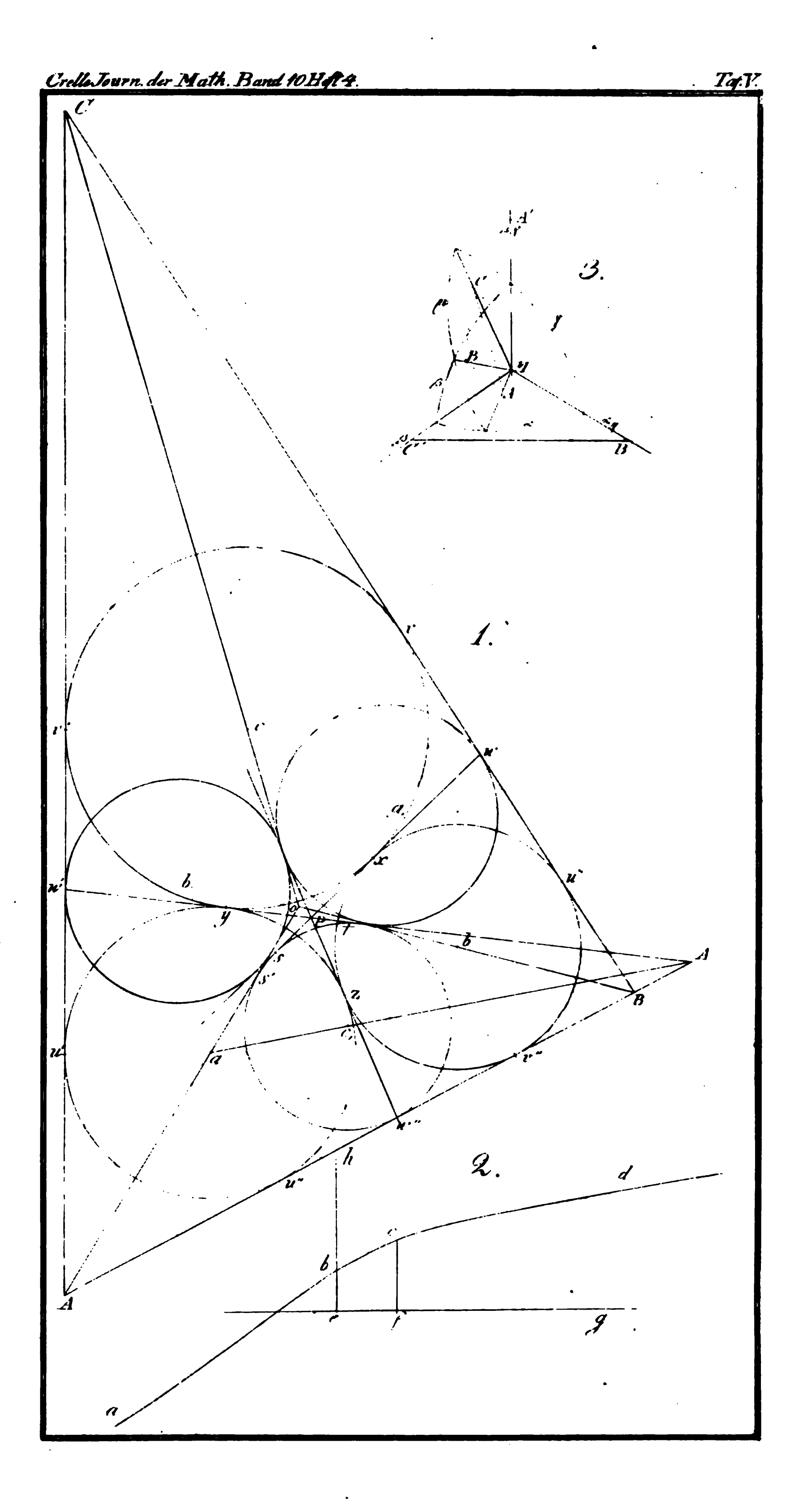
E. Analytische Geometrie.



Taf. II.


1.
C
G
H
I
B
R
S
V
D
C
T
W
D
E
G
Q
I
C
D
B
K
5.
E
A
I


1.
5.
6.
12.


1.
2.
3.
A
B
C
a
b
d
g
h

